УДК 530.1

Ю. М. Березанский, М. И. Гехтман, М. Е. Шмойш

Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений

В настоящей статье развивается метод интегрирования нелинейных разностных уравнений посредством обратной спектральной задачи, предложенный в [1—3]. Именно, при помощи его обобщения интегрируется неабелева полубесконечная цепочка Тоды, когда роль неизвестных играют последовательности операторнозначных функций времени. Далее, он видоизменяется для случая конечной скалярной цепочки Тоды; это дает возможность, с одной стороны, просто получить известные результаты, а с другой — обобщить процедуру нахождения решения на широкий класс разностных уравнений, связанных с неизоспектральными деформациями якобиевых матриц.

1. Неабелева цепочка Тоды. Для ее интегрирования понадобится процедура восстановления коэффициентов операторного разностного выражения по его спектральной мере [4, гл. 7, § 2]. Напомним эту процедуру. Рассмотрим разностное выражение

$$(\mathcal{L}u)_n = a_{n-1}u_{n-1} + b_nu_n + a_nu_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где коэффициенты a_n, b_n — ограниченные операторы в фиксированном гильбертовом пространстве H, $u = (u_n)_{n=0}^{\infty}$ — последовательность векторов этого пространства; при подсчете $(\mathcal{L}u)_0$ предполагаем $u_{-1} = 0$ (это условие играет роль граничного). Будем считать $a_n > 0$; $b_n^* = b_n$; $\|a_n\|$, $\|b_n\| \leqslant c < \infty$, $n = 0, 1, \ldots$, тогда $\mathcal{L}$ порождает естественным образом в ортогональной счетной сумме $l_2(H)$ пространств H ограниченный самосопряженный оператор Λ. Ему отвечает определенное на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ борелевских множеств из $\mathbb{R}^1$ разложение единицы $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1) \ni \alpha \mapsto E(\alpha)$, которое в свою очередь порождает спектральную меру $d\rho(\lambda)$, отвечающую $\mathcal{L}$: $\rho(\alpha) = \Delta_0^* E(\alpha)\Delta_0$, $\alpha \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, где оператор Δ_0 действует из H в $l_2(H)$ по закону $\Delta_0 x = (x, 0, 0, \ldots)$, $x \in H$. Таким образом, $d\rho(\lambda)$ — операторнозначная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, значения которой — неотрицательные операторы в H; $\rho(\mathbb{R}^1)$ равно единичному оператору $\mathbf{1}$ в H. Она определяет псевдоскалярное произведение $\{F(\cdot), G(\cdot)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\, d\rho(\lambda) G(\lambda)$ операторнозначных функций $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, значения которых — ограниченные операторы в H, и фигурирует в равенстве Парсеваля при разложении по обобщенным собственным векторам оператора Λ.

Обратная задача спектрального анализа (восстановление коэффициентов $\mathcal{L}$ по $d\rho(\lambda)$) решается следующим образом. Произведем «псевдоортогонализацию по Шмидту» относительно $d\rho(\lambda)$ системы операторнозначных полиномов $\mathbf{1}$, $\lambda\mathbf{1}$, $\lambda^2\mathbf{1}$, ... Получим в результате систему операторнозначных полиномов $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots$, которые находятся так. Полагаем $P_0(\lambda) = \mathbf{1}$. Затем рассмотрим полином $R_1(\lambda) = \lambda\mathbf{1} + X_1P_0(\lambda)$, где неизвестный оператор X_1 определяется из условия $\{R_1^*(\cdot), P_0^*(\cdot)\} = 0$. Обозначив $N_1 = \{R_1^*(\cdot), R_1^*(\cdot)\}$, положим $P_1(\lambda) = N_1^{-1/2}R_1(\lambda)$. Далее процедура псевдоортогонализации продолжается аналогично. Для ее проведения нужно от меры $d\rho(\lambda)$ требовать интегрируемость степеней $\lambda^n\mathbf{1}$, $n = 0, 1, \ldots$, равенство $\rho(\mathbb{R}^1) = \mathbf{1}$ и обратимость каждого оператора $\{P(\cdot), P(\cdot)\}$, где $P(\lambda)$ — операторнозначный полином, старший коэффициент которого равен $\mathbf{1}$.

Коэффициенты $\mathcal{L}$ восстанавливаются по формулам

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) d\rho(\lambda) P_{n+1}^*(\lambda), \qquad b_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\, d\rho(\lambda) P_n^*(\lambda), \; n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Спектральная мера, отвечающая $\mathscr{L}$, обладает указанными свойствами и обратно, всякая такая мера $d\rho(\lambda)$ является спектральной для выражения $\mathscr{L}$, коэффициенты которого ищутся согласно (2).

Перейдем к нелинейным уравнениям. Неабелевой цепочкой Тоды будем называть систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\dot{c}_n = 2(c_n d_{n+1} - d_n c_n) + [d_0, c_n], \quad \dot{d}_n = 2(c_n - c_{n-1}) + [d_0, d_n],$$
$$n = 0, 1, \ldots; \; c_{-1} = 0; \; \cdot = d/dt, \tag{3}$$

относительно функций $c_n = c_n(t)$, $d_n = d_n(t)$, $t \in [0, \infty)$, значения которых — ограниченные операторы в H. В скалярном случае, т. е. при $H = \mathbb{C}^1$, система (3) с точностью до коэффициента совпадает с обычной полубесконечной цепочкой Тоды, если перейти к неизвестным $\sqrt{c_n}$, d_n. В случае, когда d_0 коммутирует со всеми d_n и c_n, система (3) принимает вид неабелевой цепочки Тоды работы [5].

Будем искать решение начально-краевой задачи для системы (3) в виде

$$c_n = a_0^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} a_n^2 a_{n-1} \ldots a_0, \quad d_n = a_0^{-1} \ldots a_{n-1}^{-1} b_n a_{n-1} \ldots a_0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$c_0 = a_0^2, \quad d_0 = b_0 \tag{4}$$

с начальными данными при $t = 0$. Здесь $\forall t \in [0, \infty)$ $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$ — ограниченные операторы в H, причем $a_n(t) > 0$, $b_n^*(t) = b_n(t)$. Кроме того, предполагается выполненным условие $\sup\limits_{n = 0, 1, \ldots; \, t \in [0, \tau)} (\| a_n(t) \|, \|b_n(t)\|, \|\dot{a}_n(t)\|, \|\dot{b}_n(t)\|) < \infty$ $\forall \tau \in [0, \infty)$.

Теорема 1. *Для произвольных начальных данных $(a_n(0))_{n=0}^{\infty}$, $(b_n(0))_{n=0}^{\infty}$ таких, что $a_n(0) > 0$, $b_n^*(0) = b_n(0)$ и $\sup\limits_{n = 0, 1, \ldots} \{\| a_n(0) \|, \| b_n(0) \|\} < \infty$, существует и единственно решение системы (3) в виде (4).*

Это решение может быть получено следующим образом. Пусть $d\rho(\lambda; 0)$ — спектральная мера, отвечающая разностному выражению $\mathscr{L}$ с коэффициентами $a_n(0)$, $b_n(0)$. Для всех $t \in [0, \infty)$ определим операторнозначную меру $d\rho(\lambda; t)$ формулой

$$d\rho(\lambda; t) = C(t) e^{2\lambda t} d\rho(\lambda; 0) C^*(t), \tag{5}$$

где $C(t)$ — решение операторного уравнения

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{2} X(t) \dot{F}(t) F^{-1}(t), \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\rho(\lambda; 0), \tag{6}$$

удовлетворяющее условию $C(0) = 1$. Используя описанную выше процедуру псевдоортогонализации относительно $d\rho(\lambda; t)$, построим последовательность полиномов $P_0(\lambda; t)$, $P_1(\lambda; t)$, $\ldots$, $t \in [0, \infty)$. Формулы (2), записанные для этих полиномов и меры $d\rho(\lambda; t)$, дают искомое решение.

2. Конечная скалярная цепочка Тоды. Такая цепочка интегрируется методом обратной спектральной задачи для конечных якобиевых матриц, т. е. для скалярных разностных выражений вида (1) при $n = 0, \ldots, N$ ($N = 1, 2, \ldots$ фиксировано). Соответствующая спектральная теория сейчас выглядит следующим образом (см., например, [6, гл. 4], [4, гл. 7, § 1]). Итак, рассматривается разностное выражение (1) в случае $H = \mathbb{C}^1$ ($a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}^1$) и $n = 0, \ldots, N$; при подсчете $(\mathscr{L}u)_N$ предполагается $u_N = 0$ (граничное условие на правом конце). Ему отвечает самосопряженный оператор Λ, действующий в пространстве $\mathbb{C}^{N+1}$ и имеющий вид $(N+1)$-мерной якобиевой матрицы L, по главной диагонали которой располагаются b_n, а по двум смежным a_n. Спектр сейчас дискретный, состоящий из

$N+1$ вещественных собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_N$. В них сосредоточена (скалярная) спектральная мера $d\rho(\lambda)$, $\rho_j = \rho(\{\lambda_j\})$, $j = 0, \ldots, N$,— ее значения, равные нормировочным коэффициентам соответствующих собственных векторов. При решении обратной спектральной задачи обычная ортогонализация по Шмидту степеней $1, \lambda, \lambda^2, \ldots$ относительно такой меры приводит к тому, что все полиномы $P_n(\lambda)$ начиная с $(N+1)$-го будут равны 0 в смысле $L_2(\mathbb{R}^1, d\rho(\lambda))$ и формулы (2) превратятся в следующие конечные суммы:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) P_{n+1}(\lambda)\, d\rho(\lambda), \qquad b_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n^2(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad n = 0, \ldots, N. \tag{7}$$

Эти коэффициенты могут быть также выражены через моменты $s_m = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j^m \rho(\{\lambda_j\})$, $m = 0, 1, \ldots$, меры $d\rho(\lambda)$ при помощи формул

$$a_n = (D_{n-1}D_{n+1})^{1/2} D_n^{-1}, \quad b_n = \Delta_n D_n^{-1} - \Delta_{n-1} D_{n-1}^{-1}, \quad n = 0, \ldots, N;$$
$$D_l = |s_{j+k}|_{j,k=0}^{l}, \quad l = 0, \ldots, N+1;\ D_{-1} = 1, \tag{8}$$

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{l-1} & s_{l+1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_l & s_{l+2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ s_l & s_{l+1} & \ldots & s_{2l-1} & s_{2l+1} \end{vmatrix}, \quad l = 0, \ldots, N; \quad \Delta_{-1} = 0; \quad \Delta_0 = s_1.$$

Отметим, что формулы (7), (8) не зависят от нормировки меры $d\rho(\lambda)$: они сохраняются при ее умножении на положительную константу. Поэтому условие $\rho(\mathbb{R}^1) = 1$ ниже можно не требовать.

Конечная скалярная цепочка Тоды (со «свободными концами») имеет вид

$$\dot{a}_n = \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = a_n^2 - a_{n-1}^2, \quad n = 0, \ldots, N; \quad a_{-1} = a_N = 0, \tag{9}$$

где $a_n = a_n(t)$, $b_n = b_n(t)$, $t \in [0, \infty)$, — искомые функции. Будем искать решение начально-краевой задачи для (9), задавая при $t = 0$ начальные данные. Решение ищется в классе гладких функций, причем $\forall t \in [0, \infty)$ $a_n(t) > 0$, $b_n(t) \in \mathbb{R}^1$. Сейчас справедлив аналог теоремы 1; соотношения (5), (6), разумеется, существенно упрощаются.

Теорема 2. *Для произвольных начальных данных* $(a_n(0))_{n=0}^{N-1}$, $(b_n(0))_{n=0}^{N}$ *таких, что* $a_n(0) > 0$, $b_n(0) \in \mathbb{R}^1$, *существует и единственно решение системы* (9). *Оно может быть получено следующим образом. Пусть* $d\rho(\lambda; 0)$ — *спектральная мера, отвечающая разностному выражению* $\mathcal{L}$ *с коэффициентами* $a_n(0)$, $b_n(0)$, *т. е. соответствующей конечномерной якобиевой матрице* L. *Эта мера сосредоточена в ее собственных значениях* $\lambda_j(0)$ *и равна* $\rho(\{\lambda_j(0)\}; 0) > 0$, $j = 0, \ldots, N$. *Для всех* $t \in [0, \infty)$ *определим меру* $d\rho(\lambda; t)$, *сосредоточенную в тех же точках, формулой*

$$\rho(\{\lambda_j(0)\}; t) = e^{\lambda_j(0)t} \rho(\{\lambda_j(0)\}; 0), \quad j = 0, \ldots, N. \tag{10}$$

Строя ортогональные полиномы относительно меры (10) *и пользуясь формулами* (7) *или непосредственно формулами* (8), *получаем искомое решение.*

Заметим, что эта теорема может быть перенесена и на неабелевую цепочку.

Приведенные формулы для решения цепочки (9), конечно, могут быть использованы при интегрировании уравнений движения конечного числа частиц на прямой с экспоненциальным взаимодействием. Так, уравнения движения

$$\dot{q}_n = \partial H / \partial p_n, \quad \dot{p}_n = -\partial H / \partial q_n, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{11}$$

с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} p_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \exp(q_n - q_{n+1})$ сводятся к (9) известной заменой $a_n = \exp\left(\frac{1}{2}(q_n - q_{n+1})\right)$, $b_n = -p_n$. Согласно формулам (8) получаем $p_n(t) = -b_n(t) = \Delta_{n-1}(t) D_{n-1}^{-1}(t) - \Delta_n(t) D_n^{-1}(t)$, $n = 0, \ldots, N$, где $\Delta_n(t)$, $D_n(t)$ строятся по моментам $s_m(t)$ меры $d\rho(\lambda; t)$. Из соотношения $d\dot{\rho}(\lambda; t) = \lambda d\rho(\lambda; t)$ легко следует $\dot{s}_m(t) = s_{m+1}(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, и $\dot{D}_l(t) = \Delta_l(t)$, $l = 0, \ldots, N$. Интегрируя соотношения $\dot{q}_n = p_n$, имеем

$$q_n(t) = q_n(0) + \int_0^t (\Delta_{n-1} D_{n-1}^{-1} - \Delta_n D_n^{-1})\, d\tau = q_n(0) + \int_0^t (\dot{D}_{n-1} D_{n-1}^{-1} - \dot{D}_n D_n^{-1}) \times$$

$$\times\, d\tau = q_n(0) + \ln(D_{n-1}(t) D_{n-1}^{-1}(0)) - \ln(D_n(t) D_n^{-1}(0)), \quad n = 0, \ldots, N.$$

Положив $\mathscr{D}_l(t) = D_l(t) D_l^{-1}(0)$, окончательно получим

$$q_n(t) = q_n(0) + \ln\frac{\mathscr{D}_{n-1}(t)}{\mathscr{D}_n(t)}, \quad n = 0, \ldots, N. \tag{12}$$

Формула (12) ранее была получена алгебраическими методами (см. [7], где также имеется библиография). Отметим, что и известная [8] асимптотика решения системы (9) при $t \to +\infty$ может быть выведена из формул (8).

Замечание. Если $(a_n(t))_{n=0}^{N-1}$, $(b_n(t))_{n=0}^{N}$ — решение начально-краевой задачи для (9), то из (9) видно, что и набор $(a_n')_{n=0}^{N-1}$, $(b_n)_{n=0}^{N}$ удовлетворяет (9), где каждое a_n' равно либо $a_n(t)$, либо $-a_n(t)$. Отсюда следует, что при любых начальных данных $(a_n(0))_{n=0}^{N-1}$, $(b_n(0))_{n=0}^{N}$, где $0 \neq a_n(0)$, $b_n(0) \in \mathbb{R}^1$, существует решение рассматриваемой задачи.

3. Неизоспектральные деформации якобиевых матриц. В работах по нелинейным разностным уравнениям, использующих метод обратной задачи рассеяния (см., [9, 10], где имеется библиография), в [1—3] и в пп. 1, 2 фигурировали такие деформации во времени якобиевых матриц, при которых спектр сохранялся. Покажем, что метод обратной спектральной задачи может быть легко обобщен на случай изменяющегося во времени спектра; это приводит к более широким классам уравнений, чем цепочка Тоды, Ленгмюра и их обобщения. Для простоты будут рассматриваться конечные цепочки скалярных уравнений, когда картина особенно простая и наглядная.

Итак, пусть $L(t)$ — $(N+1)$-мерная якобиевая матрица (оператор), по главной диагонали которой расположены гладкие функции $(b_n(t))_{n=0}^{N}$, а по двум смежным — $(a_n(t))_{n=0}^{N-1}$, $t \in [0, \infty)$. Как и ранее, $\forall t \in [0, \infty)$ $a_n(t) > 0$, $b_n(t) \in \mathbb{R}^1$. По заданным гладким вещественнозначным функциям $\lambda_0(t) < \lambda_1(t) < \ldots < \lambda_N(t)$ и $\rho_0(t), \ldots, \rho_N(t) > 0$, $t \in [0, \infty)$ можно при помощи описанной процедуры для каждого t однозначно построить якобиеву матрицу $L(t)$ указанного сейчас вида так, чтобы ее спектр совпадал с точками $\lambda_j(t)$, а спектральная мера $d\rho(\lambda; t)$ принимала значения $\rho(\{\lambda_j(t)\}; t) = \rho_j(t)$, $j = 0, \ldots, N$: нужно воспользоваться формулами (7), (8).

В случае цепочки Тоды (9) спектр от времени не зависит, а эволюция спектральной меры описывается соотношением (10). Предположим теперь, что имеется более общая ситуация: существуют две гладкие по совокупности переменных функции $\mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \ni (\lambda, t) \mapsto \Phi(\lambda; t) = \alpha(t)\lambda + \beta(t)$, $\Psi(\lambda; t) \in \mathbb{C}^1$ такие, что $\lambda_j(t)$ и $\rho_j(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\lambda}_j(t) = \Phi(\lambda_j(t); t), \quad \dot{\rho}_j(t) = \Psi(\lambda_j(t); t)\, \rho_j(t), \quad j = 0, \ldots, N; \quad t \in [0, \infty). \tag{13}$$

Построим по этим $\lambda_j(t)$ и $\rho_j(t)$ якобиеву матрицу $L(t)$. В случае $\Phi \neq 0$ ее эволюция во времени не будет, вообще говоря, изоспектральной.

Т е о р е м а 3. *Элементы построенной якобиевой матрицы $L(t)$ удовлетворяют системе нелинейных разностных уравнений*

$$\dot{a}_n = (\Phi(L(t); t))_{n,n+1} + \frac{1}{2} a_n ((\Psi(L(t); t))_{n+1,n+1} - (\Psi(L(t); t)_{n,n}),$$

$$\dot{b}_n = (\Phi(L(t); t))_{n,n} + a_n (\Psi(L(t); t))_{n,n+1} - a_{n-1} (\Psi(L(t); t))_{n-1,n}, \tag{14}$$

$$n = 0, \ldots, N; \quad a_{-1} = a_N = 0; \quad t \in [0, \infty),$$

где $\Phi(L(t); t)$, $\Psi(L(t); t)$ — функции $\Phi(\cdot; t)$, $\Psi(\cdot; t)$ от оператора $L(t)$, а нижние индексы обозначают соответствующий матричный элемент (поясним, что эти элементы в конечном счете выражаются через $(a_n)_{n=0}^{N-1}$ и $(b_n)_{n=0}^{N}$, поэтому (14) — действительно некоторая система нелинейных разностных уравнений).

Эта теорема, разумеется, дает возможность просто писать решение начально-краевой задачи для цепочки (14), если сперва проинтегрировать уравнения (13). Так, по начальным данным $(a_n(0))_{n=0}^{N-1}$, $(b_n(0))_{n=0}^{N}$ строим якобиеву матрицу $L(0)$ и находим ее спектр $\lambda_j(0)$ и спектральную меру $\rho_j(0)$, $j = 0, \ldots, N$. Затем решаем уравнения (13) с этими начальными данными и по найденным $\lambda_j(t)$, $\rho(\{\lambda_j(t)\}; t) = \rho_j(t)$ посредством (7), (8) записываем решение.

Теорема 3 справедлива и в случае общей функции Φ, однако система (14) существенно усложняется; мы ее здесь в общем виде не выписываем.

Приведем два (неизоспектральных) примера.

1. Пусть $\Phi(\lambda; t) = \lambda$, $\Psi(\lambda; t) = \lambda$. Тогда

$$\dot{a}_n = a_n + \frac{1}{2} a_n (b_{n+1} - b_n), \quad \dot{b}_n = b_n + a_n^2 - a_{n-1}^2, \quad n = 0, \ldots, N;$$

$$a_{-1} = a_N = 0.$$

2. Пусть $\Phi(\lambda; t) = \lambda^2$, $\Psi(\lambda; t) = \lambda^2$. Тогда

$$\dot{a}_n = a_n((n+1) b_{n+1} - (n-1) b_n) + \frac{1}{2} a_n (a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 - b_n^2 - a_{n-1}^2),$$

$$\dot{b}_n = b_n^2 + a_n^2 (b_{n+1} + b_n + 2n+1) - a_{n-1}^2 (b_n + b_{n-1} + 2n-3),$$

$$n=0, \ldots, N; a_{-1} = a_N = 0.$$

В обоих случаях уравнения (13) легко интегрируются, и поэтому может быть выписано решение начально-краевых задач для этих цепочек.

Должным образом переформулированные результаты этого пункта переносятся и на полубесконечные скалярные цепочки.

1. *Berezansky Ju. M.* The integration of semi—infinite Toda chain by means of inverse spectra problem.— Kiev, 1984.— 42 p. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 84.79).
2. *Березанский Ю. М.* Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи.— Докл. АН СССР, 1985, 281, № 1, с. 16—19.
3. *Березанский Ю. М.* Одно замечание относительно нагруженной цепочки Тоды.— Укр. мат. журн., 1985, 37, № 3, с. 352—355.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
5. *Вадати М.* Обобщенная матричная форма метода обратной задачи рассеяния.— В кн.: Солитоны / Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М. : Мир, 1983, с. 310—322.
6. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М. : Мир, 1968.— 750 с.
7. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Цепочки Тоды.— М., 1983.— 63 с.— (Препринт / АН СССР, Ин-т теорет. и эксперим. физики ; ИТЭФ-111).

8. *Moser J.* Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential.— Lect. Notes Phys., 1975, 38, p. 97—122.
9. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов : Метод обрат. задачи.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
10. *Тода М.* Теория нелинейных решеток.— М. : Мир, 1984.— 264 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Киев. ун-т

Получено 04.07.85,
после доработки — 16.10.85