УДК 519.248

Д. Г. Кореневский

Алгебраические условия абсолютной устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последействием. Случай векторного винеровского процесса и нескольких запаздываний

В статье получены алгебраические коэффициентные условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с постоянными запаздываниями аргумента, не зависящие от величины запаздываний. Предполагается, что при отсутствии случайных членов (случайных параметрических возмущений) невозмущенная детерминированная система дифференциальных уравнений с запаздываниями асимптотически устойчива по Ляпунову при любых постоянных запаздываниях (абсолютно устойчивая). Условия устойчивости выражены в терминах некоторых матричных неравенств для матриц, входящих в систему уравнений. Используется метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова—Красовского, матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы. Рассмотрен случай векторного винеровского процесса и нескольких постоянных отклонений аргумента. Случай скалярного винеровского процесса и одного запаздывания рассмотрен автором ранее в [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается основная начальная задача для векторно-матричных стохастических дифференциальных уравнений Ито с последействием следующего вида:

$$dx^{\varepsilon}(t) = \left[Ax^{\varepsilon}(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x^{\varepsilon}(t-\tau_i)\right]dt + \sum_{j=1}^{r}\left[B_j(\varepsilon)\, x^{\varepsilon}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)\, x^{\varepsilon}(t-\tau_i)\right] dw_j(t), \qquad (1)$$

$$x^{\varepsilon}(t_0-\theta) = \mathrm{const} = x_0 \neq 0, \quad t_0-\tau \leqslant \theta \leqslant 0, \quad \tau = \max_{(i)} \tau_i, \quad t_0 \leqslant t,$$

где A, A_i, B_j, B_{ij} — постоянные матрицы; $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m \equiv \tau$—запаздывания аргумента t; ε — параметр; $B_j(0) = B_{ij}(0) = 0$; $w_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, r$,— компоненты стандартного векторного r-мерного винеровского процесса $w(t)$.

Введем, отправляясь от определения абсолютной устойчивости (асимптотической устойчивости при любых постоянных $\tau_i = \mathrm{const} > 0$) решений детерминированных систем с запаздыванием, данного Л. Э. Эльсгольцем (см., например, [2, гл. 3, § 10]), следующее аналогичное определение для стохастических систем с последействием (запаздыванием).

Определение. *Тривиальное решение* ($x^{\varepsilon} = 0$) *системы с последействием* (1) *называется абсолютно устойчивым с вероятностью* 1, *если оно асимптотически устойчиво с вероятностью* 1 *при любом* $0 < \tau_i = \mathrm{const} < \infty$, *т. е.*

$$\mathrm{P}\{\lim_{t\to\infty} \| x^{\varepsilon}(t) \| = 0 \mid x_0 \neq 0\} = 1, \quad 0 \leqslant \tau_i = \mathrm{const} < \infty.$$

Наряду с системой уравнений (1), называемой в дальнейшем «возмущенной», рассмотрим детерминированную (невозмущенную, $\varepsilon = 0$) систему

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-\tau_i), \quad x(t_0) = {}_0. \qquad (2)$$

В предположении, что система (2) абсолютно устойчива, ставится задача определения алгебраических коэффициентных условий абсолютной устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения возмущенной системы (1).

При решении этой задачи используется метод квадратичных стохастических функционалов Ляпунова—Красовского (СФЛ—К), матрица квадратичных форм которых согласована с матрицей невозмущенной системы, т. е. с матрицей $A+\sum_{i=1}^{m} A_i$. Отметим, что одной из первых работ по устойчивости с вероятностью 1 (и по вероятности) решений стохастических уравнений Ито с последействием, в которой используется метод СФЛ—К, можно назвать работу [3]. В дальнейшем метод СФЛ—К в задачах изучения вероятностной устойчивости (в основном, устойчивости в среднеквадратическом) решений стохастических уравнений Ито с последействием использовался во многих работах. Однако поиск алгебраических коэффициентных условий абсолютной устойчивости с вероятностью 1 решений таких уравнений впервые предпринят в работе [1].

2. Некоторые используемые далее факты. Из предположения, что решение $x=0$ детерминированной системы (2) абсолютно устойчивое, следуют два факта, используемые в дальнейшем.

а). Для системы (2) существует положительно определенный квадратичный функционал $V_0\underset{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}{(x(t+\theta))}$ вида

$$V_0\underset{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}{(x(t+\theta))}=x^{\mathrm{T}}(t)\,H_0x(t)+\sum_{i=1}^{m}\int_{t-\tau_i}^{t}x^{\mathrm{T}}(\theta)\,H_0x(\theta)\,d\theta, \qquad (3)$$

постоянная матрица $H_0>0$ которого является решением матричного уравнения Ляпунова

$$\left(A+\sum_{i=1}^{m}A_i\right)^{\mathrm{T}}H_0+H_0\left(A+\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=-Q, \qquad (4)$$

где Q — любая заданная симметричная положительно определенная матрица, в частном случае она может быть принята равной единичной матрице E; «т» — символ транспонирования.

Алгебраические коэффициентные условия абсолютной устойчивости решений для наиболее общего вида детерминированных автономных линейных дифференциальных уравнений представлены в монографии Хейла [4, с. 134—135, 160—161]. Развивая упомянутые условия [4], можно показать с помощью функционала (3), что достаточными условиями абсолютной устойчивости (близкими к необходимым и достаточным и, по-видимому, неулучшаемыми), являются гурвицевость матрицы $A+\sum_{i=1}^{m}A_i$ и отрицательная определенность следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}H_0+H_0A+mH_0 & H_0A_1 & H_0A_2 & \dots & H_0A_m \\ A_1^{\mathrm{T}}H_0 & -H_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_2^{\mathrm{T}}H_0 & 0 & -H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_m^{\mathrm{T}}H_0 & 0 & 0 & \dots & -H_0 \end{bmatrix}(<0). \qquad (5)$$

Необходимость гурвицевости матрицы $A+\sum_{i=1}^{m}A_i$ следует из непрерывной зависимости корней λ характеристического квазиполинома

$$\det\left[A+\sum_{i=1}^{m}A_i\exp(-\tau_i\lambda)-E\lambda\right]$$

от запаздываний τ_i.

б). Алгебраические коэффициентные (близкие к необходимым и достаточным) условия асимптотической устойчивости с вероятностью 1 стохастических систем вида (1) без последействия ($\tau_i\equiv 0$)

$$dx(t) = \left(A + \sum_{i=1}^{m} A_i\right) x(t)\,dt + \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)\right] x(t)\,dw_j(t) \tag{6}$$

и с гурвицевой матрицей $A + \sum_{i=1}^{m} A_i$ сводятся к отрицательной определенности следующего соотношения (см. [5]):

$$\left(A + \sum_{i=1}^{m} A_i\right)^{\mathrm{T}} H_0 + H_0 \left(A + \sum_{i=1}^{m} A_i\right) + \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)\right]^{\mathrm{T}} \cdot H_0 \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)\right] < 0. \tag{7}$$

3. Основной результат. Итак, попытаемся установить условия, налагаемые на матрицы A, A_i, H_0, B_j, B_{ij}, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость с вероятностью 1 нулевого решения системы (1) при любых $0 < \tau_i = \mathrm{const} < \infty$.

В силу общих теорем об асимптотической устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений Ито с последействием их решения асимптотически устойчивы с вероятностью 1, если существует положительно определенный функционал Ляпунова—Красовского, математическое ожидание полной производной по времени которого вдоль решений отрицательно (см., например, [3]).

Учитывая, что согласно предположению исходная система (1) линейна и стационарна, а невозмущенная система (2) абсолютно устойчива по Ляпунову, можно выбрать для системы (1) в качестве функционала Ляпунова—Красовского положительно определенный квадратичный функционал $\underset{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}{V(x^\varepsilon(t+\theta))}$ фазовых переменных x^ε,

$$\underset{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0}{V(x^\varepsilon(t+\theta))} = (x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t-\tau_i}^{t} (x^\varepsilon(\theta))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(\theta)\,d\theta, \tag{8}$$

постоянная матрица $H_0 > 0$ которого определена из уравнения Ляпунова (4), соответствующего невозмущенной системе (2) с устойчивой матрицей $A + \sum_{i=1}^{m} A_i$.

Стохастический дифференциал dV функционала (8), вычисленный вдоль решений системы (1), равен

$$dV(x^\varepsilon)|_{(1)} = d(x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(t) + (x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 dx^\varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) x^\varepsilon(t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon) x^\varepsilon(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} H_0 \left[B_j(\varepsilon) x^\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon) x^\varepsilon(t-\tau_i)\right] dt +$$
$$+ \left[m(x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(t) - \sum_{i=1}^{m} (x^\varepsilon(t-\tau_i))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(t-\tau_i)\right] dt =$$
$$= \left\{\left[Ax^\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x^\varepsilon(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} dt + \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) x^\varepsilon(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon) x^\varepsilon(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} dw_j(t)\right\} H_0 x^\varepsilon(t) + (x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 \left\{\left[Ax^\varepsilon(t) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{m} A_i x^\varepsilon(t-\tau_i)\right] dt + \sum_{j=1}^{r} \left[B_j(\varepsilon) x^\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon) x^\varepsilon(t-\tau_i)\right] dw_j(t)\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r}\left[B_j(\varepsilon)x^{\varepsilon}(t) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)x^{\varepsilon}(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} H_0 \left[B_j(\varepsilon)x^{\varepsilon}(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)x^{\varepsilon}(t-\tau_i)\right]dt + \left[m(x^{\varepsilon}(t))^{\mathrm{T}} H_0 x^{\varepsilon}(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m}(x^{\varepsilon}(t-\tau_i))^{\mathrm{T}} H_0 x^{\varepsilon}(t-\tau_i)\right]dt. \tag{9}$$

Исходя из (9) вычисляем математическое ожидание полной производной $\mathbf{M}\left\{\dfrac{dV}{dt}\bigg|_{(1)}\right\}$:

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dV(x^{\varepsilon})}{dt}\bigg|_{\substack{(1)\\ x^{\varepsilon}\equiv x}}\right\} = \left[Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} H_0 x(t) + (x(t))^{\mathrm{T}} H_0 \times$$

$$\times\left[Ax(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t-\tau_i)\right] + m(x(t))^{\mathrm{T}} H_0 x(t) - \sum_{i=1}^{m}(x(t-\tau_i))^{\mathrm{T}} H_0 x(t-\tau_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r}\left[B_j(\varepsilon)x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)x(t-\tau_i)\right]^{\mathrm{T}} H_0 \left[B_j(\varepsilon)x(t) + \sum_{i=1}^{m} B_{ij}(\varepsilon)x(t-\tau_i)\right]. \tag{10}$$

Правую часть соотношения (10) можно рассматривать как некоторую квадратичную форму от $x(t)$, $x(t-\tau_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда (10) перепишем в следующей матричной форме:

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dV(x^{\varepsilon})}{dt}\bigg|_{\substack{(1)\\ x^{\varepsilon}\equiv x}}\right\} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_m)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{c|c|c|c} A^{\mathrm{T}}H_0 + H_0A + mH_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_j^{\mathrm{T}}H_0B_j & H_0A_1 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_j^{\mathrm{T}}H_0B_{1j} & \cdots & H_0A_m + \sum\limits_{j=1}^{r} B_j^{\mathrm{T}}H_0B_{mj} \\ \hline A_1^{\mathrm{T}}H_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_{1j}^{\mathrm{T}}H_0B_j & -H_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_{2j}^{\mathrm{T}}H_0B_{2j} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{r} B_{2j}^{\mathrm{T}}H_0B_{mj} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_m^{\mathrm{T}}H_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_{mj}^{\mathrm{T}}H_0B_j & \sum\limits_{j=1}^{r} B_{mj}^{\mathrm{T}}H_0B_{2j} & \cdots & -H_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} B_{mj}^{\mathrm{T}}H_0B_{mj} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_m)\end{bmatrix} \equiv$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_m) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot G \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_m) \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Математическое ожидание (11) отрицательно лишь в случае, когда является отрицательно определенной матрица, входящая в правую часть (обозначим эту матрицу через G). Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема. *Тривиальное решение* ($x^\varepsilon = 0$) *системы стохастических уравнений Ито с последействием* (1) *абсолютно устойчиво с вероятностью* 1, *если выполнены следующие условия:* 1) *матрица* $A + \sum\limits_{i=1}^{m} A_i$ *гурвицева;* 2) *матрица* G *отрицательно определенная.*

Нетрудно заметить, что если случайных возмущений нет, т. е. $B_j = B_{ij} = 0$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, r$, то из условия $G < 0$ следует условие (5) для детерминированной системы.

В заключение отметим, что для систем с несколькими запаздываниями часто целесообразно, особенно для задач, возникающих в приложениях, вместо функционала (8) использовать функционал

$$V = (x^\varepsilon(t))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(t) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \int_{t-\tau_i}^{t} (x^\varepsilon(\theta))^{\mathrm{T}} H_0 x^\varepsilon(\theta)\, d\theta, \qquad (12)$$

где постоянные коэффициенты $\gamma_i > 0$ определяют вес каждого интеграла $\int\limits_{t-\tau_i}^{t}$ в общем значении функционала. В условии устойчивости (11) в этом случае следует заменить член mH_0 величиной $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i H_0$, а член $-H_0$ величиной $-\gamma_i H_0$.

1. *Кореневский Д. Г.* Алгебраические коэффициентные условия абсолютной (не зависящей от запаздывания) асимптотической устойчивости с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических уравнений Ито с последействием. — Укр. мат. журн., 1985, 37, № 6, с. 808—812.
2. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
3. *Kushner H. J.* On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations.— J. Different. Equat., 1968, **4**, N 3, p. 424—443.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
5. *Кореневский Д. Г.* Коэффициентный алгебраический критерий асимптотической устойчивости с вероятностью единица решений линейных систем стохастических уравнений Ито.— В кн.: Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 67—77.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.09.84