УДК 519.44

*П. Г. Гресь*

# Несколько следствий для $p$-разрешимых групп гипотезы Алперина

Везде в настоящей работе $p$ будет обозначать простое число. Пусть $G$ — конечная группа. Термин «блок» будет обозначать $p$-блок характеров группы $G$ относительно зафиксированного нами простого числа $p$. Основные понятия, связанные с блоками, можно найти, например, в [1]. Символ $Bl(G)$ будет обозначать множество всех блоков группы $G$. Если $B \in Bl(G)$, то $k(B)$ — число неприводимых комплексных характеров, $k_0(B)$ — число неприводимых комплексных характеров высоты 0, $l(B)$ — число неприводимых характеров Брауэра в блоке $B$, $d(B)$ — дефект $B$, $\Delta(B)$ — дефектная группа $B$. Для натурального числа $n$ $n_p$ будет обозначать наибольшую степень $p$, делящую $n$. Если $B \in Bl(G)$ и $p^{d(B)} = |G|_p$, то блок $B$ будем называть максимальным. Пусть $H$ — подгруппа группы $G$, $\omega_B$ — линейный характер блока $B$, $b \in Bl(H)$, $\omega_b$ — линейный характер $b$. Если для всех сопряженных классов $K$ группы $G$ имеет место равенство $\omega_B(K) = \omega_b(K \cap H)$, то будем писать $b^G = B$. Положим $Bl(H, B) = \{b \in Bl(H) : b^G = B\}$. Множество $Bl(H, B)$ может быть и пустым. Однако если $C_G(\Delta(B)) \leqslant H$, то $Bl(H, B)$ непусто [2].

Пусть $D$ — $p$-подгруппа группы $G$. Первая основная теорема Брауэра утверждает, что между множеством блоков группы $G$ с дефектной группой $D$ и таким же множеством группы $N_G(D)$ существует биекция, которая осуществляется следующим образом: если $\tilde{B} \in Bl(N_G(D))$ и $D = \Delta(\tilde{B})$, то блоку $\tilde{B}$ ставится в соответствие блок $\tilde{B}^G$[1].

Пусть $B \in Bl(G)$, $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B))$ и $\tilde{B}^G = B$. Алперин [3] предположил, что $k_0(B) = k_0(\tilde{B})$ (гипотеза Алперина). В работах [4, 5] автора настоящей статьи гипотеза Алперина доказана для блоков $p$-разрешимых групп (несколько позже, но независимо, аналогичный результат был получен в [6, 7]). Цель настоящей статьи — получить ряд следствий для $p$-разрешимых групп гипотезы Алперина.

Одним из основных инструментов доказательства из [4, 5] для $p$-разрешимых групп гипотезы Алперина является двушаговая редукция Фонга [8]. В настоящей работе нам потребуется лишь первый ее шаг. Опишем вкратце его суть. Пусть $H$ — подгруппа конечной группы $G$. Если $\chi$ — характер группы $G$, то $\chi_H$ будет обозначать сужение $\chi$ на $H$. Предположим, что $H$ — $p'$-группа, $H \lhd G$ и $\chi$ — неприводимый комплексный характер $G$, принадлежащий блоку $B$ группы $G$.

Тогда $\chi_H = e(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$, где $\lambda_i$ — неприводимый комплексный характер группы $H$, $i = 1, \ldots, n$. Положим $T_G(\lambda_i) = \{g \in G : \lambda_i(g^{-1}hg) = \lambda_i(h)\ \forall h \in H\}$. Первый шаг редукции Фонга заключается в замене блока $B$ группы $G$ таким блоком $B'$ группы $T_G(\lambda_i)$, что $B = \{\psi^G : \psi \in B'\}$ (здесь $\psi^G$ обозначает индуцированный характер). Фонг [8] показал, что в результате такой замены выполняются равенства $k(B) = k(B')$, $k_0(B) = k_0(B')$, $l(B) = l(B')$, $d(B) = d(B')$, $\Delta(B) = \Delta(B')$. Кроме того, $\Delta(B)$ является силовской $p$-подгруппой группы $T_G(\lambda_i)$. Рейнольдс [9] заметил, что $(B')^G = B$. Пусть $G$ — $p$-разрешима, $B'$ — блок группы $T = T_G(\lambda_i)$, заменяющий $B$ на первом шаге редукции Фонга, $\tilde{B}' \in Bl(N_T(\Delta(B))$, $(\tilde{B}')^T = B'$. В [5] показано, что $k(\tilde{B}) = k(\tilde{B}')$ и $l(\tilde{B}) = l(\tilde{B}')$.

**1.** Первый наш результат касается блоков с абелевой дефектной группой $p$-разрешимых групп.

Теорема 1. *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $B \in Bl(G)$, $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B))$, $\tilde{B}^G = B$. Если $\Delta(B)$ абелева, то $k(B) = k(\tilde{B})$ и $l(B) = l(\tilde{B})$.*

Доказательство. Так как $\Delta(B)$ абелева, то в силу [8] $k_0(B) = k(B)$ и $k_0(\tilde{B}) = k(\tilde{B})$. Поскольку для $p$-разрешимых групп верна гипотеза Алперина (см. [4, 5]), то $k(B) = k(\tilde{B})$. Таким образом, остается лишь доказать, что $l(B) = l(\tilde{B})$.

Пусть $G$ — минимальный контрпример к этому утверждению, т. е. $p$-разрешимая группа наименьшего порядка, содержащая такой блок $B$ с абелевой дефектной группой $\Delta(B)$, что $l(B) \neq l(\tilde{B})$, где $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B))$, $\tilde{B}^G = B$.

Предположим сначала, что блок $B$ не максимален. Тогда в силу [8] $O_{p'}(G) \neq 1$. Поэтому к $G$ и блоку $B$ можно применить первый шаг редукции Фонга. В результате получим группу $T$ и такой ее блок $B'$, что $k(B) = k(B')$, $l(B) = l(B')$, $\Delta(B)$ является силовской $p$-подгруппой группы $T$ и дефектной группой блока $B'$. Пусть $N_0 = N_T(\Delta(B))$, $\tilde{B}' \in Bl(N_0)$, $(\tilde{B}')^T = B'$. Выше мы заметили, что $l(\tilde{B}) = l(\tilde{B}')$. Если $T \neq G$, то ввиду минимальности $G$ $l(\tilde{B}') = l(B')$. Отсюда и в силу свойств блоков, получаемых на первом шаге редукции Фонга, имеем $l(\tilde{B}) = l(\tilde{B}') = l(B') = l(B)$ — противоречие. Поэтому $T = G$ и $B$ — максимальный блок группы $G$.

Пусть $1 = \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ — представители всех попарно различных сопряженных классов $p$-элементов группы $G$. Можно считать, что $\pi_i \in \Delta(B)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $\Delta(B)$ абелева, то по теореме Бернсайда $\pi_1, \ldots, \pi_n$ являются также представителями всех попарно различных классов сопряженных $p$-элементов группы $N = N_G(\Delta(B))$. Будем считать, что $\pi_1, \ldots, \pi_n$ занумерованы таким образом, что $\pi_1, \ldots, \pi_r$ — все те из $\pi_1, \ldots, \pi_n$, для которых $C_G(\pi_i) = G$, $i \leqslant r$. Тогда при $1 \leqslant i \leqslant r$ $Bl(C_G(\pi_i), B) = \{B\}$. По формуле Брауэра [2] имеем

$$k(B) = rl(B) + \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} l(b_j^{(i)}) \tag{1}$$

и

$$k(\tilde{B}) = rl(\tilde{B}) + \sum_{i=r+-}^{n} \sum_{j=1}^{t_i} l(\tilde{b}_j^{(i)}), \tag{2}$$

где $b_j^{(i)} \in Bl(C_G(\pi_i), B)$, $s_i = |Bl(C_G(\pi_i), B)|$, $\tilde{b}_j^{(i)} \in Bl(C_N(\pi_i), \tilde{B})$, $t_i = |Bl(C_N(\pi_i), \tilde{B})|$.

Покажем, что $t_i = s_i$ для всех $i = r + 1, \ldots, n$.

Заметим сначала, что $C_N(\pi_i) = N_{C_G(\pi_i)}(\Delta(B))$. В силу первой основной теоремы Брауэра, между блоками группы $C_G(\pi_i)$ с дефектной группой $\Delta(B)$ и такими же блоками группы $C_N(\pi_i) = N_{C_G(\pi_i)}(\Delta(B))$ существует биекция. Покажем, что эта биекция индуцирует биекцию между множествами $Bl(C_G(\pi_i), B)$ и $Bl(C_N(\pi_i), \tilde{B})$. В самом деле, пусть $b_j^{(i)} \in Bl(C_G(\pi_i), B)$. Тогда существует такой $\tilde{b}_j^{(i)} \in Bl(C_N(\pi_i))$, что $(\tilde{b}_j^{(i)})^{C_G(\pi_i)} = b_j^{(i)}$. Далее, $(b_j^{(i)})^G = B$. Поэтому (см. [2]) $(\tilde{b}_j^{(i)})^G = B$. С другой стороны, $\Delta(B) \lhd C_N(\pi_i)$ и поэтому $\Delta(B)$ является дефектной группой каждого из блоков группы $C_N(\pi_i)$. Далее, $C_N(\Delta(B)) \leqslant C_N(\pi_i)$. Поэтому $(\tilde{b}_j^{(i)})^N$ — блок группы $N$. Кроме того, $(\tilde{b}_j^{(i)})^G = ((\tilde{b}_j^{(i)}))^G = B$. Так как существует лишь единственный блок $B_0$ группы $N$ такой, что $B_0^G = B$ (а именно блок $\tilde{B}$), то $(\tilde{b}_j^{(i)})^N = \tilde{B}$. Поэтому $\tilde{b}_j^{(i)} \in Bl(C_N(\pi_i), \tilde{B})$.

Пусть теперь $\tilde{b}_j^{(i)} \in Bl(C_\Lambda(\pi_i), \tilde{B})$. Тогда $(\tilde{b}_j^{(i)})^N = \tilde{B}$ и $(\tilde{B})^G = B$, т. е. $(\tilde{b}_j^{(i)})^G = B$. Далее, $(\tilde{b}_j^{(i)})^{C_G(\pi_i)} \in Bl(C_G(\pi_i))$ и поскольку $((\tilde{b}_j^{(i)})^{C_G(\pi_i)})^G = B$, то $(\tilde{b}_j^{(i)})^{C_G(\pi_i)} \in Bl(C_G(\pi_i), B)$. Отсюда непосредственно следует существование биекции между множествами $Bl(C_G(\pi_i), B)$ и $Bl(C_N(\pi_i), \tilde{B})$. Следовательно, $t_i = s_i$.

Так как $G$ — минимальный контрпример и $C_G(\pi_i) < G$ при $i > r$, то для блоков группы $C_G(\pi_i)$ верна доказываемая теорема. Следовательно, $l(b_j^{(i)}) = l(\hat{b}_j^{(i)})$ для всех $i = r + 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, s_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} l(b_j^{(i)}) = \sum_{i=r+1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} l(\tilde{b}_j^{(i)}). \tag{3}$$

Кроме того, $k(B) = k(\tilde{B})$. Отсюда и из (1)—(3) следует, что $l(B) = l(\tilde{B})$ вопреки тому, что $G$ — контрпример. Теорема доказана.

Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$. Обозначим через $l_0(G)$ число неприводимых характеров Брауэра группы $G$, степень которых не делится на $p$, а через $l_0(N_G(P))$ — такое же число для группы $N_G(P)$.

С л е д с т в и е 1. *Если $P$ абелева, то $l_0(G) = l_0(N_G(P))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 $l(B) = l(\tilde{B})$ для любого максимального блока и такого блока $\tilde{B}$ группы $N_G(P)$, для которого $\tilde{B}^G = B$. По первой основной теореме Брауэра между максимальными блоками $B$ группы $G$ и блоками группы $N_G(P)$ существует биекция, причем блоку $B$ соответствует такой блок $\tilde{B}$ группы $N_G(P)$, что $\tilde{B}^G = B$. Пусть $B_1, \ldots, B_k$ — все максимальные блоки группы $G$, $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_r$ — соответствующие им блоки группы $N_G(P)$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} l(B_i) = \sum_{i=1}^{k} l(\tilde{B}_i)$. Покажем, что $l_0(G) = \sum_{i=1}^{k} l(B_i)$, $l_0(N_G(P)) = \sum_{i=1}^{k} l(\tilde{B}_i)$.

Для этого докажем лишь первое равенство (второе доказывается аналогично). В самом деле, по теореме Фонга—Свана—Руколайне (см. [10]) всякий неприводимый характер Брауэра группы $G$ является сужением некоторого неприводимого комплексного характера на множество $p'$-элементов $G_{reg}$ группы $G$. Поэтому, если $\varphi$ — неприводимый характер Брауэра группы $G$, степень которого не делится на $p$, $\chi$— такой неприводимый комплексный характер группы $G$, что $\chi_{G_{reg}} = \varphi$, то степень $\chi$ также не делится на $p$. Поэтому $\chi$ принадлежит одному из максимальных блоков группы $G$. Следовательно, $\varphi$ принадлежит тому же максимальному блоку группы $G$. Поэтому $l_0(G) \leqslant \sum_{i=1}^{k} l(B_i)$. С другой стороны, если $\varphi$ — неприводимый характер Брауэра, принадлежащий максимальному блоку $B$ группы $G$, то снова по теореме Фонга — Свана — Руколайне существует неприводимый комплексный характер $\chi$ группы $G$ такой, что $\chi_{G_{reg}} = \varphi$. Кроме того, очевидно $\chi \in B$. Так как дефектной группой $B$ является абелева силовская $p$-подгруппа $P$, то в силу [8] всякий характер из $B$ имеет высоту 0. Значит, степень $\chi$ не делится на $p$. Поэтому степень $\varphi$ не делится на $p$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^{k} l(B_i) \leqslant l_0(G)$. Таким образом, $l_0(G) = \sum_{i=1}^{k} l(B_i)$. Аналогично $l_0(N_G(P)) = \sum_{i=1}^{k} l(\tilde{B}_i)$, Значит, $l_0(N_G(P)) = l_0(G)$. Следствие доказано.

Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $B \in Bl(G)$, $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B)))$, $\tilde{B}^G = B$. Если $\Delta(B)$ не является абелевой, то, по-видимому, имеет место следующее обобщение теоремы 1.

Г и п о т е з а. *Пусть $G$ — конечная $p$-разрешимая группа, $B \in Bl(G)$, $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B)))$, $\tilde{B}^G = B$. Обозначим через $l_0(B)$ и $l_0(\tilde{B})$ числа неприводимых характеров Брауэра высоты 0 в $B$ и $\tilde{B}$ соответственно. Тогда $l_0(B) = l_0(\tilde{B})$.*

2. Пусть $G$ — конечная группа, $\chi$ — неприводимый комплексный характер группы $G$, $H \lhd G$ и $H \leqslant \ker\chi$. Тогда $\chi$ определяет комплексный характер $\bar{\chi}$ группы $\bar{G} = G/H$ обычным способом: $\bar{\chi}(xH) = \chi(x)$, $x \in G$. Нетрудно проверить (см. [1]), что $\bar{\chi}$ — неприводимый комплексный характер группы $\bar{G}$. Если $\chi$ неприводимый комплексный характер группы $G$, то $\bar{\chi}$ всегда будет обозначать неприводимый комплексный характер группы $\bar{G}$, полученный только что описанным способом.

Л е м м а. *Пусть $G$ — конечная группа, $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, $P \lhd G$, $P'$ — коммутант $P$, $X_0(B)$ — множество характеров высоты 0 блока $B \in Bl(G)$, $\bar{G} = G/P'$. Если $\chi \in X_0(B)$, то $P' \leqslant \ker\chi$, и если $\overline{X_0(B)} = \{\bar{\chi} \mid \chi \in X_0(B)\}$, то существуют такие блоки $b_1, \ldots, b_n$ груп-*

*пы* $\overline{G}$, *что* $\overline{X_0(B)} \cap b_i = X_0(b_i)$ *и* $\overline{X_0(B)} = \bigcup_{i=1}^{n} X_0(b_i)$. *Кроме того, дефектной группой каждого из блоков* $b_i$ *является группа* $P/P'$.

Доказательство. Пусть $\chi \in X_0(B)$. По теореме Клиффорда (см. [1]), $\chi_P = r_\chi(\varphi_1 + \ldots + \varphi_m)$, где $r_\chi \in \mathbb{N}$, $\varphi_i$ — неприводимый характер группы $P$. Все характеры $\varphi_i$ имеют одинаковую степень. Поскольку $P \lhd G$, то $B$ — максимальный блок группы $G$ и $P$ — его дефектная группа (см. [1]). Следовательно, $\chi(1) \not\equiv 0 \pmod p$, и значит, $\varphi_i(1) \not\equiv 0 \pmod p$. Поскольку $\varphi_i(1) \mid |P|$, то $\varphi_i(1) = 1$, т. е. $\varphi_i$ — линейный характер группы $P$ и $P' \leqslant \ker \varphi_i$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому $\varphi_i$ совпадает со своим представлением. Пусть $x \in P$, $\Gamma$ — неприводимое представление группы $G$ с характером $\chi$. Тогда $\Gamma(x) = r_\chi(\varphi_1(x) + \ldots + \varphi_m(x)) = r_\chi(\varphi_1(1) + \ldots + \varphi_m(1)) = r_\chi m \varphi_1(1) = \Gamma(1)$, т. е. $x \in \ker \Gamma$, и значит, $x \in \ker \chi$. Таким образом, $P' \leqslant \ker \chi$ для всякого $\chi \in X_0(B)$.

Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — блоки группы $\overline{G}$, по которым распределяются характеры множества $\overline{X_0(B)}$. Очевидно $X_0(b_i) \geqslant \overline{X_0(B)} \cap b_i$, поскольку степень любого характера из $\overline{X_0(B)}$ не делится на $p$. Покажем, что $X_0(b_i) = X_0(B) \cap b_i$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть $\overline{\chi} \in X_0(b_i)$. Предположим, что $\overline{\chi} \notin \overline{X_0(B)}$. Выберем $\overline{\psi} \in \overline{X_0(B)} \cap b_i$ (он существует, поскольку по условию $\overline{X_0(B)} \cap b_i \neq \varnothing$). Так как $\overline{\chi}$ и $\overline{\psi}$ лежат в одном блоке $b_i$, то (см. [1])

$$\frac{|C_{\overline{g}}|\,\overline{\chi}(\overline{g})}{\overline{\chi}(1)} \equiv \frac{|C_{\overline{g}}|\,\overline{\psi}(\overline{g})}{\overline{\psi}(1)} \pmod J, \tag{4}$$

где $\overline{g} \in G$, $C_{\overline{g}}$ — сопряженный класс группы $\overline{G}$, содержащий $\overline{g}$, $J$ — простой идеал в кольце целых поля алгебраических чисел, являющегося полем разложения групп $\overline{G}$ и $G$.

Пусть $\chi$ и $\psi$—такие характеры группы $G$, что $\chi(y) = \overline{\chi}(yP')$ и $\psi(y) = \overline{\psi}(yP')$, $y \in G$. Если $g \in G$, то имеет место равенство (см. [11])

$$|C_g| = \frac{|G : C_G(g)|}{|\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{g})|}\,|C_{\overline{g}}|,$$

где $C_g$ — сопряженный класс группы $G$ в котором лежит элемент $g$, $\overline{g} = gP'$, $C_{\overline{g}}$ — сопряженный класс группы $\overline{G}$, в котором лежит $\overline{g}$. Учитывая это, имеем

$$\frac{|C_g|\,\chi(g)}{\chi(1)} = \frac{|G : G_G(g)|}{|\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{g})|}\,\frac{|C_{\overline{g}}|\,\overline{\chi}(\overline{g})}{\overline{\chi}(1)}$$

и

$$\frac{|C_g|\,\psi(g)}{\psi(1)} = \frac{|G : C_G(g)|}{|\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{g})|}\,\frac{|C_{\overline{g}}|\,\overline{\psi}(\overline{g})}{\overline{\psi}(1)}.$$

Отсюда и из (4) следует

$$\frac{|C_g|\,\chi(g)}{\chi(1)} \equiv \frac{|C_g|\,\psi(g)}{\psi(1)} \pmod J,$$

т. е. $\chi$ и $\psi$ лежат в одном блоке группы $G$. Однако по условию $\psi \in B$, поэтому $\chi \in B$. Так как степень $\chi$ не делится на $p$, то $\chi \in X_0(B)$. Значит, $\overline{\chi} \in \overline{X_0(B)}$ вопреки предположению. Таким образом, $X_0(b_i) = \overline{X_0(B)} \cap b_i$, и тем самым, $\overline{X_0(B)} = \bigcup_{i=1}^{n} X_0(b_i)$. Поскольку $P/P' \lhd \overline{G}$ и $P/P'$ является силовской $p$-подгруппой группы $\overline{G}$, то $P/P'$ — дефектная группа каждого из блоков группы $\overline{G}$ и, в частности, каждого из блоков $b_1, \ldots, b_n$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему, которая сводит вычисление числа неприводимых комплексных характеров высоты 0, принадлежащих блоку $p$-разрешимой группы, к вычислению чисел характеров высоты 0 в подходящих блоках $p$-разрешимой группы меньшего порядка и с нормальной абелевой силовской $p$-подгруппой. Эта теорема полезна в индуктивных рассуждениях о числе $k_0(B)$, где $B$ — блок $p$-разрешимой группы.

Теорема 2. *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $B \in Bl(G)$. Тогда существует $p$-разрешимая группа $M$ и такие ее блоки $b_1, \ldots, b_n$, что*

а) $|M| \leqslant |G|$;

б) $k_0(B) = \sum_{i=1}^{n} k(b_i)$;

в) *силовская $p$-подгруппа $P$ группы $M$ абелева и нормальна в $M$ (и значит, является дефектной группой каждого из блоков $b_i$)*;

г) $P \cong \Delta(B)/\Delta(B)'$ ($\Delta(B)'$ — *коммутант* $\Delta(B)$).

Доказательство. Пусть $\tilde{B} \in Bl(N_G(\Delta(B)))$, $\tilde{B}^G = B$. В силу [4, 5] $k_0(B) = k_0(\tilde{B})$. Далее, к блоку $\tilde{B}$ можно применить первый шаг редукции Фонга и заменить группу $N_G(\Delta(B))$ на группу $T$, блок $\tilde{B}$ — на блок $\tilde{B}'$ группы $T$ такие, что $k_0(\tilde{B}) = k_0(\tilde{B}')$, $\Delta(B)$ — силовская $p$-подгруппа группы $T$ и $\Delta(B) \lhd T$. Положим $M = T/\Delta(B)'$. Тогда $|M| \leqslant |G|$. В силу леммы 1 существуют такие блоки $b_1, \ldots, b_n$ группы $M$, что $k_0(\tilde{B}') = |X_0(\tilde{B}')| = \sum_{i=1}^{n} |X_0(b_i)| = \sum_{i=1}^{n} k_0(b_i)$. Однако $k_0(B) = k_0(\tilde{B}')$. Отсюда следует б).

По построению силовской $p$-подгруппой группы $M$ является группа $\Delta(B)/\Delta(B)'$ и, так как $\Delta(B) \lhd T$, то $\Delta(B)/\Delta(B)' \lhd M$. Отсюда следуют условия в) и б). Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа, $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, $k_0(G)$ — число неприводимых комплексных характеров группы $G$, степень которых не делится на $p$. Тогда $k_0(G)$ совпадает с числом всех неприводимых комплексных характеров группы $N_G(P)/P'$.*

Доказательство. Число $k_0(G)$ совпадает с числом неприводимых комплексных характеров высоты 0, принадлежащих всем максимальным блокам группы $G$. В силу первой основной теоремы Брауэра и справедливости для $p$-разрешимых групп гипотезы Алперина, $k_0(G) = k_0(N_G(P))$. Кроме того, $k_0(N_G(P)) = \sum_{\tilde{B} \in Bl(N_G(P))} k_0(\tilde{B})$, и теперь осталось применить теорему 2, замечая, что в качестве $M$ можно взять группу $N_G(P)/P'$.


1. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М.: Наука, 1968.— 668 с.
2. *Brauer R.* On the structure of blocks of characters of finite groups.— In: Proc. Second Int. Conf. theory groups. Berlin : Springer, 1974, p. 103—130.
3. *Alperin J. L.* The main problem of block theory.— In: Proc. Conf. finite groups: New York etc. : Acad press, Inc., 1976, p. 341—356.
4. *Гресь П. Г.* К гипотезе Альперина о характерах высоты 0 для $p$-разрешимых групп.— В кн.: Материалы XXXI итоговой науч. конф. профес.-преподават. состава Ужгород. ун-та. Ужгород, 1978, с. 55—97. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3131-78.
5. *Гресь П. Г.* Доказательство для $p$-разрешимых групп гипотезы Альперина о числе характеров высоты 0.— В кн.: VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. Киев : Наук. думка, 1980, с. 179—188.
6. *Okayama T., Wijama M.* Irredusible characters of $p$-solvable groups.— Proc. Jap. Acad. A, 1979, N 55, p. 309—312.
7. *Dade E.* Correspondence of characters.— In: Santa Cruz conf. Finite croups, Santa Cruz (Calif.) Providence, R. I., 1979, p. 401—403.
8. *Fong P.* On the characters of $p$-solvable groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1961, N 98, p. 263—284.
9. *Reynolds W.* Blocks and normal subgroups of finite groups.— Nagoya Math. J., 1963, N 22, p. 15—32.
10. *Серр Ж.-П.* Линейные представления конечных групп.— М. : Мир, 1968.— 132 с.
11. *Michler G.* Blocks and centres of group algebras.—Lect. Notes Math., 1972, N 246, p. 429.


Ужгород. ун-т

Получено 03.09.84