УДК 511

Б. Б. Беньяминов

О распределении простых близнецов в множестве натуральных чисел

В 1923 г. Харди и Литлвуд выдвинули гипотезу о распределении простых близнецов в интервале [1; x] [1]

$$\pi_2(x) \sim 2\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\ln x}. \tag{1}$$

Позднее была получена формула [2]

$$\pi_2(x) \sim 2\prod_{p=3}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{\ln^2 x}\prod_{p=3}^{\infty}\frac{p-1}{p-2} \tag{2}$$

и др. Асимптотические представления (1) и (2) функции $\pi_2(x)$, имея большое теоретическое значение, не обладают достаточной простотой их практического применения.

В настоящей работе предлагается новая гипотеза о законе распределения простых близнецов, основанном на суперпозиции функции $\pi(x)$. На основании теоремы Чебышева об асимптотическом законе распределения простых чисел строятся нижняя и верхняя оценки числа простых близнецов, рассматривается эмпирическая функция их распределения.

имеющая высокую степень точности. В предположении правильности выдвигаемой гипотезы дается простое доказательство того, что число пар простых близнецов бесконечно (проблема простых близнецов). Рассматриваются также и некоторые другие вопросы.

Пусть $\pi(x)$ и $\pi_2(x)$— соответственно количество простых чисел и пар простых близнецов в интервале $[2; x]$. Для описания закона распределения простых близнецов в множестве натуральных чисел предлагается следующая гипотеза.

Таблица 1

x	$\pi(x)$	$\pi_2(x)$	$\pi(\pi(x))$	$\lvert\Delta\rvert$	$\frac{\lvert\Delta\rvert}{\pi_2(x)}$
50	15	6	6	0	0
150	35	11	11	0	0
500	95	24	24	0	0
1500	239	49	52	3	0,0612
2000	303	60	62	2	0,0333
3000	430	81	82	1	0,0123
4000	550	102	101	1	0,0098
5000	669	123	121	2	0,0163
10000	1226	201	201	0	0
15000	1754	268	273	5	0,0187
20000	2262	338	335	3	0,0089
25000	2762	403	402	1	0,0025
30000	3245	462	457	5	0,0108
40000	4203	585	575	10	0,0171
50000	5133	697	685	12	0,0172
100000	9592	1224	1184	40	0,0327
200000	17984	2159	2062	97	0,0449
500000	41538	4494	4343	151	0,0336
1000000	78498	8164	7902	262	0,0321

Гипотеза. *Число пар простых близнецов в интервале* $[2; x]$ *приближенно равно числу простых индексов* i *множества простых чисел* $p_i \in [2; x]$, *т. е. функция* $\pi_2(x)$ *имеет вид*

$$\pi_2(x) \approx \pi(\pi(x)). \tag{3}$$

Иначе говоря, простые близнецы распределены среди простых чисел так же, как простые числа среди натуральных.

В табл. 1 приведены значения функций $\pi_2(x)$ и $\pi(\pi(x))$ при $x \leqslant 1\,000\,000$. Значения $\pi_2(x)$ подсчитаны по таблицам Лемера [3].

Оценим число пар простых близнецов, лежащих в интервале $[2; x]$. Предварительно докажем теорему.

Теорема 1. *Пусть* $x \geqslant 2y$, $y \geqslant 1$, *тогда справедливо неравенство*

$$\pi(x/y) \geqslant \pi(x)/y. \tag{4}$$

Доказательство. В [4] доказано неравенство

$$\pi(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) \leqslant \pi(x_1) + \pi(x_2) + \ldots + \pi(x_k)$$

и рассмотрен случай $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x$, т. е.

$$\pi(kx) \leqslant k\pi(x), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Докажем, что неравенство (5) имеет место $\forall k \geqslant 1$. Рассмотрим функцию непрерывного аргумента $k: z(k) = k\pi(x)/\pi(kx) \sim k \operatorname{li} x/\operatorname{li}(kx)$. Она возрастающая, так как

$$dz/dk = \operatorname{li} x/\operatorname{li}^2(kx)(\operatorname{li}(kx) - kx/\ln kx) > 0,$$

и поскольку $z(1) = 1$, то $z(k) \geqslant 1$ $\forall k \geqslant 1$, т. е. верно (5).

Теперь имеем при $y \geqslant 1$

$$\pi(x) = \pi\left(y\frac{x}{y}\right) \leqslant y\pi\left(\frac{x}{y}\right),$$

откуда следует неравенство (4). Знак равенства в (4) имеет место при $y = 1$. Теорема доказана.

Оценка функции $\pi_2(x)$ дается следующей теоремой.

Теорема 2. *При значениях* $x \geqslant 1000$ *выполняются неравенства*

$$\frac{C_{21}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}<\pi_2(x)<\frac{1,159\,C_{22}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)},$$

где C_{21}, $C_{22}(C_{21}\leqslant 1\leqslant C_{22})$ — *коэффициенты Чебышева.*

Доказательство. Существует число α, $0<\alpha<1$, такое, что выполняются неравенства

$$\frac{\pi(x)}{1+\alpha}<\frac{x}{\ln x}<\pi(x),$$

откуда

$$\pi\left(\frac{\pi(x)}{1+\alpha}\right)\leqslant\pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)\leqslant\pi(\pi(x)).$$

На основании теоремы 1 (неравенство (4)) далее имеем

$$\frac{\pi_2(x)}{1+\alpha}\leqslant\pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)\leqslant\pi_2(x). \tag{6}$$

По теореме Чебышева

$$C_{21}x/\ln x<\pi(x)<C_{22}x/\ln x.$$

Заменив здесь x на $x/\ln x$, получим

$$\frac{C_{21}\,x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}<\pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)<\frac{C_{22}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}. \tag{7}$$

Из левого неравенства в (6) с учетом правого в (7) находим

$$\frac{\pi_2(x)}{1+\alpha}\leqslant\pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)<\frac{C_{22}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)},$$

откуда

$$\pi_2(x)<\frac{(1+\alpha)\,C_{22}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}.$$

Из правого неравенства в (6) с учетом левого в (7) имеем

$$\frac{C_{21}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}<\pi\left(\frac{x}{\ln x}\right)\leqslant\pi_2(x),$$

т. е.

$$\frac{C_{21}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}<\pi_2(x)<\frac{(1+\alpha)\,C_{22}x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}. \tag{8}$$

При $x\geqslant 1000$ [5] $\pi(x)/x:\ln x<1,159$, или $\pi(x)/1,159<x/\ln x$, т. е. $\alpha=0,159$, и из неравенств (8) следует утверждение теоремы.

Из [5] для $x>1$ имеем $C_{21}=2/3$, $C_{22}=8/5$, так что $A<\pi_2(x)<B$, где

$$A=\frac{0,(6)\,x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)},\quad B=\frac{1,8544\,x}{\ln x(\ln x-\ln\ln x)}.$$

В табл. 2 приведены значения A, B и $\pi_2(x)$ для некоторых значений x. Отметим, что порядок верхней оценки совпадает с порядком аналогичной оценки функции $\pi(x)$ [5].

Таблица 2

x	A	$\pi_2(x)$	B	x	A	$\pi_2(x)$	B
1000	19	35	54	50000	365	697	1016
5000	61	123	171	100000	638	1224	1776
10000	104	201	288	500000	2408	4494	6699
25000	211	403	586	1000000	4313	8164	11996

Рассмотрим вопрос о плотности числа пар простых близнецов в множестве простых чисел.

Теорема 3. *Почти все простые числа не являются простыми близнецами, т. е.*

$$\pi_2(x) = o(\pi(x)). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть верна гипотеза (3), тогда, обозначив $\pi(x) = y$, имеем

$$0 \leqslant \pi_2(x)/\pi(x) = \pi(\pi(x))/\pi(x) = \pi(y)/y.$$

Оценим сверху отношение $\pi(y)/y$ с помощью метода решета, не рассматривая в множестве $\{y\}$ повторяющиеся значения.

Пусть $\varphi(y, r)$ — количество натуральных чисел, не превышающих y и не делящихся ни на одно из r первых простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Тогда

$$\varphi(y, r) = \sum_{d \mid p_1 p_2 \ldots p_{\pi(\sqrt{y})}} \mu(d)[y/d], \tag{10}$$

где $\mu(d)$ — сумматорная функция Мебиуса. Очевидно

$$\pi(y) \leqslant \varphi(y, r) + r. \tag{11}$$

Опустим в равенстве (10) квадратные скобки, количество которых 2^r. Тогда ошибка не превысит число 2^r, и по (11) последовательно получим

$$\pi(y) \leqslant \sum_{d \mid p_1 p_2 \ldots p_{\pi(\sqrt{y})}} \mu(d)[y/d] + r \leqslant y \sum_{d \mid p_1 p_2 \ldots p_{\pi(\sqrt{y})}} \mu(d)/d +$$

$$+ r + 2^r = y \prod_{p \leqslant p_r} (1 - p^{-1}) + r + 2^r < y \prod_{p \leqslant p_r} (1 - p^{-1}) + 2^{r+1},$$

так как $r < p_r < 2^r$. Далее на основании неравенства

$$\prod_{p \leqslant x} (1 - p^{-1})^{-1} > \ln x$$

находим

$$\pi(y) < y/\ln p_r + 2^{r+1} < y/\ln r + 2^{r+1}.$$

Выберем $r = c \ln y$, $c < 1/\ln 2$. Тогда $2^r < y$ и

$$\pi(y) < y/\ln(c \ln y) + 2y^{c \ln 2} = y/(\ln c + \ln \ln y) + 2y^{c \ln 2},$$

где $c \ln 2 < 1$. Разделив обе части на y, получим

$$0 \leqslant \frac{\pi(y)}{y} < \frac{1}{\ln c + \ln \ln y} + \frac{2}{y^{1 - c \ln 2}}.$$

Так как при $y \to \infty$ правая часть неравенства стремится к нулю, то равенство (9) верно и теорема доказана.

Следствие. *Поскольку* $\pi(x) = o(x)$, *то из теоремы 3 следует* $\pi_2(x) = o(x)$.

Действительно, имеем

$$\lim_{x \to \infty} \pi_2(x)/x = \lim_{x \to \infty} \pi_2(x)/\pi(x) \lim_{x \to \infty} \pi(x)/x = 0.$$

Обозначим через η_p и η_{pp} соответственно плотности распределения простых чисел $p_i \leqslant x$ в множестве действительных чисел и числа пар простых близнецов в множестве $\{p_i\}$, т. е. $\eta_p = \pi(x)/x$, $\eta_{pp} = \pi_2(x)/\pi(x)$. На основании равенства $\pi(x) = o(x)$ и теоремы 3 плотности η_p и η_{pp} с ростом x убывают к нулю, но отношение

$$h = \eta_{pp}/\eta_p \tag{12}$$

остается в определенных и постоянных пределах (табл. 3). Грубая оценка с помощью неравенств $\pi(x) > x/\ln x$, $\pi(x) < x/(\ln x - 4)$ (Россер, [5]) и неравенств теоремы 2 при $C_{21} = 0$, (6) и $C_{22} = 1{,}6$ дает $0 < h < 3$. Этот факт позволяет построить эмпирическую функцию $\pi_2^*(x)$ числа простых близнецов, лежащих в интервале $[2;\ x]$, имеющую высокую степень ности. Получаем $\pi_2^*(x)/\pi(x) = h_c\pi(x)/x$, откуда

$$\pi_2^*(x) = \frac{h_c\pi^2(x)}{x},$$

где $h_c = 1{,}325067\ldots$ — среднее значение отношения (12) для x а правая часть последнего равенства округляется до целых.

Табл

x	h	$\pi_2(x)$	$\pi_2^*(x)$	$\lvert\Delta\rvert$
50	1,333333	6	6	0
150	1,346938	11	11	0
500	1,329639	24	24	0
1500	1,286742	49	50	1
2000	1,307061	60	61	1
3000	1,314223	81	82	1
4000	1,348760	102	100	2
5000	1,374114	123	119	4
10000	1,330737	201	200	1
15000	1,306672	268	274	4
20000	1,321178	338	339	1
25000	1,320680	403	404	1
30000	1,316236	462	465	3
40000	1,324637	585	585	0
50000	1,322696	697	698	1
100000	1,330341	1224	1219	5
200000	1,335088	2159	2143	16
500000	1,302302	4494	4573	79
1000000	1,342908	8164	8165	1

В табл. 3 приведены данные о функции $\pi_2^*(x)$ и степени ее точ $x = 50 \div 1\,000\,000$. Однако формула (13) применима и для 000 000. Например, для $x = 37\cdot10^6$ простых близнецов 183 72 (13) $\pi_2^*(x) = 183\,463$, что дает относительную погрешность $\delta = 0$.

До сих пор остается открытым вопрос о том, конечно или бескон число пар простых близнецов. Если предположить гипотезу (3) вер для любого x, то нетрудно доказать, что число пар простых близнец бесконечно.

Рассмотрим неравенство Ишикава

$$\pi(xy) > \pi(x) + \pi(y),$$

которое доказано в [6] для $y \geqslant 2$, $x \geqslant 57$, $x \geqslant y$; для значений $6 \leqslant x <$ предлагается его непосредственная проверка. В [4] неравенство (14) рассматривается в виде

$$\pi(xy) \geqslant \pi(x) + \pi(y), \tag{15}$$

и оно справедливо при $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, $x \geqslant y$. Для целых x и y знак равенства в (15) будет, например, при $x = y = 2$, $x = y = 3$, $x = 3$ и $y = 2$, $x = 5$ и $y = 2$.

В работе [4] доказана (на основании неравенства (15)) следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $y \geqslant 2$, $x \geqslant 4$, $x \geqslant y$, *тогда справедливо неравенство*

$$\pi(x/y) \leqslant \pi(x) - \pi(y). \tag{16}$$

С помощью теоремы 4 для простых близнецов можно доказать теорему о справедливости неравенства, аналогичного постулату Бертрана.

Теорема 5. *При* $\pi(x) \geqslant 3$ $(x \geqslant 5)$ *в интервале* $]\pi(x); 2\pi(x)[$ *имеется по крайней мере одна пара простых близнецов, т. е.*

$$\pi(2\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant 1.$$

Доказательство. Поскольку на основании гипотезы (3) простые близнецы распределены в множестве простых чисел так же, как простые числа в множестве $\mathbb{N}$, то можно использовать теорему 4 (неравенство (16)). Положим $v = \pi(x)$, $u = 2\pi(x)$, тогда $v \geqslant 3 > 2$, $u \geqslant 6 > > 4$, $u > v$ и

$$\pi(u/v) \leqslant \pi(u) - \pi(v),$$

или

$$\pi(2\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant \pi(2\pi(x)/\pi(x)) = \pi(2) = 1.$$

Замечание. Точно так же доказывается неравенство

$$\pi(3\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant 2.$$

Условия теоремы 4 выполнены, поэтому

$$\pi(3\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant \pi(3\pi(x)/\pi(x)) = \pi(3) = 2.$$

Аналогично

$$\pi(5\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant 3,$$

т. е. между числами $\pi(x)$ и $5\pi(x)$ содержится не менее трех пар простых близнецов и т. д. Вообще, если $\pi(m) = k$, то в интервале $]\pi(x); m\pi(x)[$ содержится по крайней мере k пар простых близнецов:

$$\pi(m\pi(x)) - \pi(\pi(x)) \geqslant \pi(m\pi(x)/\pi(x)) = \pi(m) = k.$$

Рассмотрим теперь проблему простых близнецов. Сделаем сечение множества действительных чисел на интервалы, длина которых неограниченно удваивается:

$$\{]2^{n-1}\pi(x); 2^n\pi(x)[\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Каждая пара простых близнецов лежит в одном и только в одном интервале. По теореме 5 в каждом интервале вида (17) содержится по крайней мере одна пара простых близнецов. Поскольку интервалов (17) бесчисленное множество, то число пар близнецов бесконечно.

1. *Hardy G., Littlwood D.* Some problems of «Partitiv numerorum». III.— Acta math., 1923, **44**, p. 1—70.
2. *Лаврик А. Ф.* К теории распределения простых чисел на основе метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1961, **64**, с. 90—125.
3. *Лемер Д. Н.* Таблицы простых чисел от 1 до 10 006 721.— М.: Мир, 1967.— 267 с.
4. *Беньяминов Б. Б.* О некоторых свойствах функции $\pi(x)$.— Харьков, 1983.— 45 с.— Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 415 Ук-Д 83.
5. *Трост Э.* Простые числа.— М.: Физматгиз, 1959.— 135 с.
6. *Ishikawa H.* Über die Verteilung der Primzahlen.— Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku A, 1934, 2, S. 27—40.

Харьк. политехн. ин-т

Получено 04.06.84