УДК 517.972.5

В. Б. Соколовский

Бесконечномерные уравнения с лапласианом Леви и некоторые вариационные задачи

Устанавлюется связь задачи Дирихле для уравнений, разрешенных относительно лапласиана Леви, в счетномерном вещественном гильбертовом пространстве с задачей о минимизации функционала некоторого вида.

Встановлюється зв'язок задачі Діріхле для рівнянь, розв'язувальних відносно лапласіана Леві, в лічильномірному дійсному гільбертовому просторі з задачею про мінімізацію функціоналу деякого виду.

Хорошо известна связь классических краевых задач математической физики в пространстве R^n с вариационными задачами. В настоящей работе устанавливается аналогичная связь задачи Дирихле для уравнений, разрешенных относительно лапласиана Леви*.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство с фиксированным счетным ортобазисом, G — некоторая область в H, $\Omega_{a,R}$ — открытый шар радиуса R с центром в точке $a \in H$, $\sigma[x] = R^2 - \|x - a\|^2$ — фундаментальная функция этого шара, $S_{a,R}$ — сфера, ограничивающая его, ν — единичный вектор внутренней нормали к $S_{a,R}$. Предположим, что в H введена операция усреднения функционала по сфере в смысле Гато — Леви; среднее значение функционала U по сфере $S_{a,R}$ будем обозначать ниже через $M(U; a; R)$. Лапласиан Леви L определяется по формуле $LU[x] = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{M(U; x; r) - U[x]}{r^2}$.

Обозначим через $\mathcal{M}(\Omega_{a,R})$ класс равномерно непрерывных в $\overline{\Omega}_{a,R} = \Omega_{a,R} \cup S_{a,R}$ функционалов, для которых существуют средние, обладаю-

* Лапласиан Леви (оператор Лапласа — Леви) введен Р. Гато и П. Леви в начале XX века как бесконечномерный аналог классического лапласиана [1]. Уравнения с таким оператором в различных функциональных классах рассматривали Е. М. Полищук, М. Н. Феллер, Г. Е. Шилов, И. Я. Дорфман, А. С. Немировский и другие. Библиографию по этому вопросу можно найти в [2].

щие полугрупповым свойством, по всем допустимым **геометрией** шара $\Omega_{a,R}$ сферам [3].

Примером таких функционалов являются рассмотренные Е. М. Полищуком в [4] функционалы интегрального типа в $L_2(0, 1)$, если операцию усреднения в $L_2(0, 1)$ ввести по Гато с помощью ступенчатых функций. В случае абстрактного гильбертова пространства со средним по Леви такими функционалами являются, например, регулярные функции Г. Е. Шилова [5].

Если $U \in \mathcal{M}(\Omega_{a,R})$ таков, что $\tilde{U}[x; r] = M(U; x; \sqrt{r})$ имеет в области $\Omega^*_{a,R} = \{(x, r)\colon x \in \Omega_{a,R},\ 0 < r < \sigma[x]\} \subset H \times R^1$ частные производные $\tilde{U}'_x[x; r]$ $\tilde{U}'_r[x; r]$ соответственно по x (по Фреше) и по r, равномерно непрерывные по (x, r) в $\Omega^*_{a,R}$, то, следуя [3], будем говорить, что $U \in \mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$. Так как эти частные производные допускают равномерно непрерывные расширения на замыкание области $\Omega^*_{a,R}$, будем считать их определенными в этом замыкании. Нетрудно показать, что для таких функционалов $\tilde{U}'_x[x; 0]$ — производная Фреше $U'(x)$, $\tilde{U}'_r[x; 0] = LU[x]$ в $\Omega_{a,R}$; $U'(x)$ и $LU[x]$ можно также считать определенными в $\overline{\Omega}_{a,R}$. По лемме 1 из [3] для функционалов $U \in \mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$ на $S_{a,R}$ существуют нормальная производная U'_ν и $L_S U[x]$ (L_S — сферический лапласиан Леви*); с помощью той же леммы можно установить, что для таких функционалов существуют средние по $S_{a,R}$ от LU и $L_S U$, причем $M(L_S U; a; R) = 0$; для них имеет место формула П. Леви, связывающая на $S_{a,R}$ нормальную производную U'_ν, LU и $L_S U$:

$$L_S U = \frac{1}{2R} U'_\nu + LU \text{ на } S_{a,R}. \tag{1}$$

Отсюда следует, в частности, существование для функционалов $U \in \mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$ среднего по $S_{a,R}$ от U'_ν.

Рассмотрим задачу Дирихле

$$LU = f[x; U] \text{ в } G, \ U = F \text{ на } \partial G. \tag{2}$$

Предположим, что зависящий от параметра $\tau \in (\alpha, \beta) \subseteq (-\infty, +\infty)$ функционал $f[x; \tau]$ удовлетворяет в шаре $\overline{\Omega}_{a,R}$ условию: для любого функционала $U \in \mathcal{M}(\Omega_{a,R})$ множество значений которого $\mathfrak{A}(U) \subseteq (\alpha, \beta)$, $f[x; U]$ непрерывен в $\overline{\Omega}_{a,R}$ и обладает средним по $S_{a,R}$.

Функционал U, принадлежащий классу $\mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$ вместе с LU условимся называть допустимым для выражения

$$E[U] = M(\|U'\|^2 + 4Rf[x; U]\, U'_\nu; a; R), \tag{3}$$

если $\overline{\mathfrak{A}(U)} \subseteq (\alpha, \beta)$ и существует среднее по $S_{a,R}$ от $\|U'\|^2$.

Л е м м а. *Функционал V доставляет минимум выражению* (3), *рассматриваемому на допустимых для него функционалах, принимающих на $S_{a,R}$ заданные значения $F[x]$, тогда и только тогда, когда V — решение задачи Дирихле*

$$LU = f[x; U] + \Phi \ \text{в}\ \Omega_{a,R},\ U = F \ \text{на}\ S_{a,R}, \tag{4}$$

где Φ — непрерывный в $\overline{\Omega}_{a,R}$ функционал, среднее которого по $S_{a,R}$ равно 0.

---

* Сферический лапласиан Леви [3] вводится подобно оператору Лапласа — Леви с помощью операции усреднения и предельного перехода по формуле

$$L_S U[x] = \lim_{r \to R-0} \frac{M\left(U; a + \frac{r}{R}(x - a); \sqrt{(R^2 - r^2)}\right) - U[x]}{2R(R - r)},$$

с точностью до множителя 1/2 оператор L_S совпадает с введенным П. Леви [1, с. 322] оператором Δ_S.

Доказательство. 1. Пусть допустимый для $E[U]$ функционал V — решение задачи (4), и пусть принимающий на $S_{a,R}$ нулевые значения функционал W таков, что $V+W$ — допустимый для $E[U]$ функционал; очевидно, $W,\ LW\in\mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$. Заметим, что

$$W'(x)=2LW[x](x-a)\ \text{на}\ S_{a,R}. \tag{5}$$

Это следует из того, что W можно рассматривать как решение задачи Пуассона $LU=LW$ в $\Omega_{a,R}$, $U=0$ на $S_{a,R}$, и для получения (5) достаточно применить формулу (4) из [3] для производной Фреше решения этой задачи. Пользуясь (5), на $S_{a,R}$ получаем

$$\|V'+W'\|^2+4Rf[x;V+W](V'_\nu+W'_\nu)=\|V'\|^2-$$
$$-4RLW\cdot V'_\nu+\|W'\|^2+4Rf[x;V]V'_\nu-8R^2f[x;V]LW. \tag{6}$$

Применив к V'_ν формулу (1), приведем правую часть этого равенства к виду

$$\|V'\|^2-8R^2LW\cdot L_SV+8R^2LW\cdot LV+\|W'\|^2+$$
$$+4Rf[x;V]V'_\nu-8R^2f[x;V]LW.$$

Подставляя в это выражение $f[x;V]+\Phi$ вместо LV (равенство $LV=f[x;V]+\Phi$ имеет место и на $S_{a,R}$ в силу непрерывности LV, $f[x;V]$ и Φ в $\overline{\Omega}_{a,R}$), находим, что на $S_{a,R}$ левая часть (6) совпадает с

$$\|V'\|^2-8R^2LW\cdot L_SV+8R^2LW\cdot\Phi+\|W'\|^2+4Rf[x;V]\cdot V'_\nu.$$

Усредняя по $S_{a,R}$ это выражение (с учетом того, что $M(\Phi;a;R)=0$ и, как отмечалось выше, $M(L_SV;a;R)=0$), устанавливаем, что

$$E[V+W]=E[V]+M(\|W'\|^2;a;R)\geqslant E[V],$$

т. е. V доставляет минимум выражению $E[U]$.

2. Пусть теперь $V[x]$ доставляет минимум выражению $E[U]$ в классе допустимых для $E[U]$ функционалов, принимающих на $S_{a,R}$ заданные значения $F[x]$, и пусть $W\in\mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$ — произвольный, принимающий нулевые значения на $S_{a,R}$ функционал, для которого $LW\in\mathcal{M}^{(1,1)}(\Omega_{a,R})$. При всех достаточно малых $|\lambda|$ функционал $V+\lambda W$ допустим для $E[U]$, так как $\|V'+\lambda W'\|^2=\|V'\|^2-4\lambda RLW\cdot V'_\nu+4R^2\lambda^2(LW)^2$ на $S_{a,R}$ и, следовательно, $\|V'+\lambda W'\|^2$ усредняется по $S_{a,R}$. Поэтому $E[V+\lambda W]\geqslant E[V]$, откуда

$$-4\lambda RM(LW\cdot V'_\nu-f[x;V]W'_\nu;a;R)+4R^2\lambda^2M((LW)^2;a;R)\geqslant 0. \tag{7}$$

Это возможно лишь тогда, когда выражение

$$M(LW\cdot V'_\nu-f[x;V]W'_\nu;a;R)$$

равно 0: если оно больше 0, то (7) не выполняется при достаточно близких к 0 положительных λ, если же оно меньше 0, то при достаточно близких к 0 отрицательных λ. Преобразуя это выражение с использованием (5) для $W'(x)$ и (1) для V'_ν, а также учитывая, что $M(L_SV;a;R)=0$, приходим к равенству

$$2RM(LW\{-LV+f[x;V]\};a;R)=0.$$

В силу мультипликативности операции усреднения и произвольности W отсюда следует $M(LV-f[x;V];a;R)=0$. Полагая теперь $\Phi=LV-f[x;V]$ в $\overline{\Omega}_{a,R}$, получаем, что V — решение задачи (4) с непрерывным в $\overline{\Omega}_{a,R}$ функционалом Φ, среднее по $S_{a,R}$ которого равно 0. Лемма доказана.

Пусть определенный в области G при каждом $\tau\in(\alpha,\beta)\subseteq(-\infty,+\infty)$ функционал $f[x;\tau]$ удовлетворяет приведенному выше условию в каждом шаре $\overline{\Omega}_{a,R}\subset G$. Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. *Определенный в G, принимающий на ∂G заданные значения $F[x]$ функционал $V[x]$, допустимый для $E[U]$ в каждом шаре $\Omega_{a,R} \subset G$, при любых a, R (для которых $\overline{\Omega}_{a,R} \subset G$) доставляет минимум выражению $E[U]$ в классе допустимых для $E[U]$ функционалов, совпадающих на S_{aR} с V, тогда и только тогда, когда V — решение задачи Дирихле* (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть V — решение задачи Дирихле (2), удовлетворяющее условиям теоремы, и пусть $\overline{\Omega}_{a,R} \subset G$ — произвольный шар. Тогда тем более V — решение задачи Дирихле $LU = f[x; U]$ в $\Omega_{a,R}$, $U = V$ на $S_{a,R}$. В таком случае по лемме V доставляет минимум выражению $E[U]$ в классе допустимых для $E[U]$ функционалов, совпадающих на $S_{a,R}$ с V.

2. Пусть теперь принимающий на ∂G заданные значения $F[x]$ функционал $V[x]$ при всяком $\overline{\Omega}_{a,R} \subset G$ доставляет минимум выражению $E[U]$ в классе допустимых для $E[U]$ функционалов, совпадающих на $S_{a,R}$ с V. Тогда по лемме для каждого шара $\overline{\Omega}_{a,R} \subset G$ V — решение задачи Дирихле $LU = f[x; U] + \Phi$ в $\Omega_{a,R}$, $U = V$ на $S_{a,R}$, где $M(\Phi; a; R) = 0$. Поэтому для каждого шара $\overline{\Omega}_{a,R} \subset G$ $M(LV - f[x; V]; a; R) = 0$, что возможно лишь тогда, когда $LV - f[x; V] \equiv 0$ в G. Таким образом, V — решение задачи (2).

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. — М. : Наука, 1967.— 512 с.
2. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, № 4.— С. 97—140.
3. *Соколовский В. Б.* Вторая и третья краевые задачи в гильбертовом шаре для уравнений эллиптического типа, разрешенных относительно функционального лапласиана // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 3.— С. 111—114.
4. *Полищук Е. М.* Об уравнениях типа Лапласа и Пуассона в функциональном пространстве // Мат. сб.— 1967.— **72**, № 2.— С. 261—292.
5. *Шилов Г. Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функцион. анализ и его прил.— 1967.— **1**, № 2.— С. 81—90.

Куйбышев. ун-т

Получено 14.10.87