УДК 517.938

Ю. В. Теплинский, П. И. Авдеюк

Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрены условия, при которых любая траектория из малой окрестности тора нелинейной счетной системы дифференциальных уравнений притягивается к соответствующей траектории на торе по экспоненциальному закону.

Розглянуті умови, при яких будь-яка траєкторія із малого околу тора нелінійної зчисленної системи диференціальних рівнянь притягується до відповідної траєкторії на торі по експоненціальному закону.

В настоящее время методы теории инвариантных тороидальных многообразий широко используются для исследования решений систем дифференциальных уравнений. Один из подходов к теории возмущения инвариантных тороидальных многообразий динамических систем, связанный с использованием функции Грина для линеаризованной задачи, предложен А. М. Самойленко [1, 2]. Этот метод успешно применяется для определения существования инвариантных торов, структур траекторий на торах и в их окрестностях [3, 4].

© Ю. В. ТЕПЛИНСКИЙ, П. И. АВДЕЮК, 1990

В настоящей работе рассмотрены условия, при которых любая траектория из малой окрестности тора $\mathcal{T}_m$ притягивается к соответствующей траектории на торе по экспоненциальному закону.

Рассмотрим нелинейную счетную систему дифференциальных уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi, h), \quad dh/dt = P(\varphi, h)h + c(\varphi), \tag{1}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$, $h = (h_1, h_2, \ldots)$, $a(\varphi, h)$, $c(\varphi)$ — непрерывные, 2π-периодические по φ_i, $i = \overline{1, m}$, вектор-функции, $P(\varphi, h) = [p_{ij}(\varphi, h)]_{i,j=1}^{\infty}$ — 2π-периодическая по φ_i бесконечная матрица.

Будем использовать следующие согласованные нормы матрицы $P(t) = [p_{ij}]_1^{\infty}$ и вектора $h = (h_1, h_2, \ldots)$:

$$\|P(t)\| = \sup \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(t)|, \quad \|h\| = \sup\{|h_1|, |h_2|, \ldots\}.$$

Множество ограниченных, 2π-периодических по φ_i, $i = \overline{1, m}$, функций и матриц, имеющих непрерывные частные производные по φ первого порядка, удовлетворяющие условию Липшица по φ в области $D: \|h\| \leqslant d$, обозначим $C^1_{\mathrm{Lip}}(D)$.

Непрерывное отображение $h = u(\varphi)$ некоторой области $\Phi \subset E^m$ в пространство m, имеющее вид $h_j = u_j(\varphi)$, $j = 1, 2, \ldots$, 2π-периодическое по φ_i, $i = \overline{1, m}$, ограниченное $\|u(\varphi)\| < \infty$, назовем инвариантным тороидальным многообразием системы уравнений (1), если справедливы равенства

$$d\varphi/dt = a(\varphi, u(\varphi)), \quad du(\varphi)/dt = P(\varphi, u(\varphi))u(\varphi) + c(\varphi),$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $u(\varphi) \in D$.

При исследовании инвариантного тора на устойчивость используем следующее утверждение.

Л е м м а . *Предположим, что в системе уравнений*

$$dx/dt = P(t)x + P_1(t)x, \tag{2}$$

матрицы $P(t)$ и $P_1(t)$ непрерывны при $t \geqslant \tau$.

Матрицант $\Omega^t_\tau(P)$ линейной системы уравнений $dx/dt = P(t)x$, удовлетворяет оценке

$$\|\Omega^t_\tau(P)x_0\| \leqslant L \exp\left\{\int_\tau^t \beta(s)\,ds\right\} \|x_0\|,$$

для всех $t \geqslant \tau$, где L — положительная постоянная, $\beta(t)$ — функция, определенная и интегрируемая при $t \geqslant \tau$, x_0 — произвольная постоянная.

Тогда матрицант $\Omega^t_\tau(P + P_1)$ системы уравнений (2) удовлетворяет оценке

$$\|\Omega^t_\tau(P + P_1)x_0\| \leqslant L \exp\left\{\int_\tau^t \beta(s)\,ds + L\int_\tau^t \|P_1(s)\|\,ds\right\} \|x_0\|.$$

при всех $t \geqslant \tau$.

Поведение решений системы уравнений (1) в окрестности инвариантного тора описывает следующая теорема.

Т е о р е м а . *Пусть система уравнений* (1) *такова, что в области D:*

1) $a(\varphi, h)$, $P(\varphi, h)$, $c(\varphi) \in C^1_{\mathrm{Lip}}(D)$;

2) $p_s = \sum_{j=1}^{\infty} \max_{\varphi} |p_{sj}(\varphi, h)| \leqslant p < \infty$, $s = 1, 2, \ldots$;

3) *существует инвариантный тор $\mathcal{T}_m: h = u(\varphi)$* [3], *принадлежащий области D вместе с некоторой своей ρ-окрестностью;*

4) *поток траекторий $\psi = \psi(t, \psi_0)$ $(\psi(0, \psi_0) = \psi_0$, ψ_0 — произвольная*

постоянная) на $\mathcal{T}_m$, *определяемый системой уравнений*

$$d\psi/dt = a(\psi, u(\psi)),$$

таков, что фундаментальные матрицы решений систем уравнений

$$d\theta/dt = A_0(\psi)\theta, \quad dh/dt = P_0(\psi)h$$

удовлетворяют неравенствам

$$\|\Omega_t^\tau(A_0)\theta_0\| \leqslant L_1 \exp\left\{\int_\tau^t \alpha(\psi)\,ds\right\}\|\theta_0\|,$$

$$\|\Omega_\tau^t(P_0)h_0\| \leqslant L_2 \exp\left\{-\int_\tau^t \beta(\psi)\,ds\right\}\|h_0\|, \tag{3}$$

для любых $0 \leqslant \tau \leqslant t$, *произвольных* θ_0, h_0, *фиксированных* L_1, L_2, *не зависящих от* τ, θ_0, h_0 *и интегрируемых* $\alpha(\psi)$, $\beta(\psi)$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\min \beta(\psi) \geqslant \beta_0 > 0, \quad \alpha(\psi) \leqslant 0,$$

$$\beta(\psi) + \alpha(\psi) \geqslant \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Тогда можно указать такое $0 < \mu_0 < d$, *что любое решение системы уравнений* (1) $\varphi = \varphi_t(\varphi_0, h_0)$, $h = h_t(\varphi_0, h_0)$, *начинающееся в окрестности тора* $\mathcal{T}_m : \|h_0 - u(\varphi_0)\| \leqslant \mu^2$, $\mu < \mu_0$, *экспоненциально притягивается к некоторой траектории* $\psi(t, \psi_0(\varphi_0, h_0))$, $h = u(\psi(t, \psi_0(\varphi_0, h_0)))$ *на торе по закону*

$$\|\varphi_t(\varphi_0, h_0) - \psi(t, \psi_0(\varphi_0, h_0))\| \leqslant \mu \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon)t\},$$

$$\|h_t(\varphi_0, h_0) - u(\psi(t, \psi_0(\varphi_0, h_0)))\| \leqslant \mu C \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon)t\},$$

где $t \geqslant 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\mu_0)$, $\varepsilon(\mu_0) \to 0$, *при* $\mu_0 \to 0$, C — *положительная постоянная, не зависящая от* μ.

Доказательство. Введем замену переменных, положив

$$\varphi = \psi(t) + \mu\theta, \quad h = u(\varphi) + \mu^2 h_1, \tag{5}$$

где $\psi(t)$ — решение системы уравнений, определяющих поток траекторий на торе $\mathcal{T}_m$: $d\psi/dt = a(\psi, 0) \equiv a_0(\psi)$.

После преобразований исходная система примет вид

$$d\theta/dt = A^1(\psi, \theta, \mu)\theta + \mu A^2(\psi, \theta, h_1, \mu)h_1,$$

$$dh_1/dt = P^1(\psi, \theta, h_1, \mu)h_1, \tag{6}$$

где

$$A^1(\psi, \theta, \mu) = \frac{1}{\mu\theta}[a_0(\psi + \mu\theta - a_0(\psi)],$$

$$A^2(\psi, \theta, h_1, \mu) = \frac{1}{\mu^2 h_1}[a_1(\psi + \mu\theta, \mu^2 h_1) - a_1(\psi + \mu\theta, 0)],$$

$$P^1(\psi, \theta, h_1, \mu) = P(\psi + \mu\theta, u(\varphi) + \mu^2 h_1) + [P(\psi + \mu\theta, u(\varphi) + \mu^2 h_1) - \tag{7}$$

$$- P(\psi + \mu\theta, u(\varphi))]\frac{u(\varphi)}{\mu^2 h_1} - \frac{\partial u}{\partial\varphi}[a(\psi) + \mu\theta, u(\varphi) + \mu^2 h_1) -$$

$$- a(\psi + \mu\theta, u(\varphi))]\frac{1}{\mu^2 h_1},$$

определенные в области $\|\mu^2 h_1\| \leqslant d$.

Из обозначений (7) видно, что

$$A^1(\psi, \theta, 0) = A^1(\psi, 0, \mu) = A^1(\psi, 0) \equiv A_0(\psi),$$

$$P^1(\psi, \theta, h, 0) = P^1(\psi, 0, 0, \mu) \equiv P_0(\psi).$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$d\theta^n/dt = A^1(\psi, \theta^{n-1}, \mu) + \mu A^2(\psi, \theta^{n-1}, h^n, \mu) h^n,$$
$$dh^n/dt = P^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu) h^n, \tag{8}$$

считая $\theta^0 = 0$, $h^\circ = 0$. Покажем, что система уравнений (6) имеет экспоненциально затухающее при $t \to +\infty$ решение.

Определим θ^n, h^n при $n \geqslant 1$ формулами

$$\theta^n = -\mu \int_t^\infty \Omega_s^t(A_{n-1}) A^2(\psi, \theta^{n-1}, h^n, \mu) h^n ds,$$
$$h^n = \Omega_0^t(P_{n-1}) h_0, \tag{9}$$

считая A_{n-1}, P_{n-1} матрицами вида $A_{n-1} = A^1(\psi, \theta_\mu^{n-1})$, $P_{n-1} = P^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu)$.

Предположим, что при $n = 1, 2, \ldots, k-1$, $k \geqslant 2$, формулы (9) определяют функции θ^n, n^n для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$, $\| h_0 \| < 1$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| \theta^n \| \leqslant L_1 \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon) t\} \| h_0 \|,$$
$$\| h^n \| \leqslant L_2 \exp\left\{-\int_0^t \beta(\psi) d\tau + \varepsilon t\right\} \| h_0 \|, \quad t \geqslant 0. \tag{10}$$

При $n = 1$ можно указать такое $\mu_0 > 0$, чтобы для всех $\mu < \mu_0$ имела место оценка (10). Для проведения индукции достаточно установить оценку (10) при $n = k$.

Из оценок (6), (7) согласно лемме для функций $\Omega_t^s(P_{k-1}) h_0$ и $\Omega_s^t(A_{k-1}) \theta_0$ получаем оценки

$$\| \Omega_t^s(P_{k-1}) h_0 \| \leqslant L_2 \exp\left\{\int_t^s \beta(\psi) d\tau + L_2 \varepsilon (s - t)\right\} \| h_0 \|,$$

$$\| \Omega_s^t(A_k) \theta_0 \| \leqslant L_1 \exp\left\{\int_s^t \alpha(\psi) d\tau + L_1 \varepsilon (s - t)\right\} \| \theta_0 \|,$$

при $0 \leqslant t \leqslant s$. Но тогда определена функция $h^n = \Omega_0^t(P_{k-1}) h_0$ для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$, $\| h_0 \| \leqslant 1$ и эта функция удовлетворяет неравенству

$$\| h^k \| \leqslant L_2 \exp\left\{\int_0^t \beta(\psi) d\tau + \varepsilon t\right\} \| h_0 \|, \ t \geqslant 0.$$

Более того,

$$\| \theta^k \| \leqslant L_1 \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon) t\} \| h_0 \|.$$

Это означает, что при $n = k$ функции θ^n и h^n определены для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$, $\| h_0 \| < 1$ и удовлетворяют неравенствам (10).

Из оценки (3) следует [2] непрерывность по t, ψ_0 при $t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$ функций $\theta^n(t)$, $h^n(t)$ при $n \geqslant 1$.

Из соотношений (9), (10) следует равномерная относительно t, ψ_0, h_0, μ сходимость в области $t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$, $\| h_0 \| \leqslant 1$, $\mu \leqslant \mu_0$ последовательностей $\theta^n(t), h^n(t)$.

Положим

$$\theta(t) = \lim_{n \to \infty} \theta^n(t), \quad h_1(t) = \lim_{n \to \infty} h^n(t). \tag{11}$$

Последовательности $\theta^n(t)$, $h^n(t)$ удовлетворяют системе уравнений (8), поэтому предельные функции $\theta(t)$, $h_1(t)$ являются решениями системы уравнений (6). Эти функции будучи равномерным пределом функций, непрерывных по ψ_0, сами непрерывны по ψ_0 при $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$. Из (10) следуют аналогичные неравенства для предельных функций

$$\| \theta(t) \| \leqslant L_1 \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon) t\} \| \theta_0 \|,$$
$$\| h_1(t) \| \leqslant L_2 \exp\left\{-\int_0^t \beta(\psi)\, d\tau + \varepsilon t\right\} \| h_0 \|. \tag{12}$$

Таким образом, для каждого фиксированного ψ_0 и достаточно малого μ существует решение

$$\varphi_t = \psi(t) + \mu\theta(t),$$
$$h_t = u(\varphi_t) + \mu^2 h_1(t), \tag{13}$$

системы уравнений (1), удовлетворяющее неравенству

$$\| \varphi_t - \psi(t) \| \leqslant \mu \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon) t\},$$
$$\| h_t - u(\psi(t)) \| \leqslant \mu C \exp\{-(\gamma - 2\varepsilon) t\}, \tag{14}$$

где C — постоянная.

Покажем, что решение (13) проходит через каждую точку φ_0, h_0, лежащую в малой окрестности тора $\mathcal{T}_m : h = u(\varphi)$.

Так как функция $h_1(t)$ при $t = 0$ принимает произвольные значения из области $\| h_1 \| \leqslant 1$, то через любую точку φ_0, h_0 области $\| h - u(\varphi) \| \leqslant \mu^2$ проходит решение (13), если только φ_0 пробегает все точки $\mathcal{T}_m$, когда ψ пробегает $\mathcal{T}_m$. Из первого равенства (13) следует

$$\varphi_0 = \psi_0 + \mu B(\psi_0, \mu), \tag{15}$$

где $B(\psi_0, \mu) = \theta(0)$ — непрерывная функция ψ_0, удовлетворяющая неравенству $\| B(\psi_0, \mu) \| \leqslant 1$ при любых $\psi_0 \in \mathcal{T}_m$, $\mu \leqslant \mu_0$.

Уравнение (15) задает отображение тора в тор. Докажем, что это есть отображение $\mathcal{T}_m$ на $\mathcal{T}_m$.

Предположим, что при некотором $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$ не существует $\psi_0(\varphi_0)$, превращающее (15) в тождество. Это значит, что для заданного φ_0 уравнение (15) не имеет решения. Введем новую переменную θ_0, положив $\psi_0 = \varphi_0 - \theta_0$. Получим новое уравнение относительно θ_0 $\theta_0 = \mu B(\varphi_0 - \theta_0, \mu) \equiv B_0(\theta_0, \mu)$. Функция $B_0(\theta_0, \mu)$ будучи непрерывной по θ_0 при $\theta_0 \in \Gamma_m$ — кубу периодов, задает непрерывное отображение $B_0 : \theta_0 \to \theta_0$ Γ_m в себя: $\| B_0 \theta_0 \| \leqslant \mu$. По теореме Брауэра такое отображение всегда имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Следовательно, найдется точка $\tilde{\theta}_0$ такая, что $\tilde{\theta} = \mu B(\varphi_0 - \tilde{\theta}_0, \mu)$. Но тогда равенство (15) превращается в тождество значением $\psi_0 = \varphi_0 - \tilde{\theta}_0$. Последнее противоречит предположению. Этим мы доказываем, что через любую точку φ_0, h_0 области $\| h - u(\varphi) \| \leqslant \mu^2$ проходит решение (13). Т. е. мы установили неравенство (14) для любого решения из малой окрестности тора $\mathcal{T}_m$.

1. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1970.— **34**, № 6.— С. 1219—1240.
2. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 5.— С. 820—834.
3. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В., Цыгановский Н. С.* Об инвариантных торах счетных систем дифференциальных уравнений.— Киев; 1983.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.30).
4. *Авдеюк П. И.* О поведении решений квазилинейной счетной системы дифференциальных уравнений в окрестности инвариантного тора // Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 3—8.

Каменец-Подол. пед. ин-т

Получено 08.12.87