УДК 517.983+517.93

С. Г. Крейн, Е. О. Уточкина

Неявное каноническое уравнение в гильбертовом пространстве

Рассматривается дифференциальное уравнение $\mathcal{E}\dot{x}=G(t)x$, $0\leqslant t\leqslant T$, где $\mathcal{E}$ и $G(t)$ — линейные ограниченные операторы, в комплексном гильбертовом пространстве. Найдены условия, при которых это уравнение заменой сводится к каноническому.

Розглядається диференціальне рівняння $\mathcal{E}\dot{x}=G(t)x$, $0\leqslant t\leqslant T$, де $\mathcal{E}$ и $G(t)$ — лінійні обмежені оператори, в комплексному гільбертовому просторі. Знайдені умови, при яких це рівняння заміною зводиться до канонічного.

Линейное дифференциальное уравнение в комплексном гильбертовом пространстве H имеет каноническую структуру, если оно представимо в виде

$$J\dot{x} = B(t)x, \qquad 0\leqslant t\leqslant T,$$

где $B(t)$ — линейный ограниченный эрмитов оператор; J — линейный ограниченный косоэрмитов оператор ($J^* = -J$), обладающий тем свойством, что $J^2 = -I$; точка означает производную от функции $x(t)$ со значениями в H по t (см., например, [1]).

Будем рассматривать уравнение более общего вида

$$\mathcal{E}\dot{x} = G(t)x, \tag{1}$$

где $G(t)$ обладает теми же свойствами, что и $B(t)$, $\mathcal{E}$ — ограниченный линейный оператор в H.

Предположим, что $\mathcal{E}$ имеет ограниченный обратный оператор. Тогда $\dot{x} = \mathcal{E}^{-1}G(t)x$. Сделаем обратимую замену искомой функции $x = D^{-1}y$. Уравнение примет вид

$$\dot{y} = D\mathcal{E}^{-1}G(t)D^{-1}y. \tag{2}$$

Поставим следующую задачу: каким должен быть оператор $\mathcal{E}$, чтобы для него существовал оператор D такой, что уравнение (2) будет иметь каноническую структуру при всяком эрмитовом операторе $G(t)$.

Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Лемма. *Для того чтобы оператор ABC был эрмитовым при любом эрмитовом операторе B, достаточно, а если* $\operatorname{Ker} C^* = 0$ *или* $\operatorname{Ker} A = 0$, *то и необходимо, чтобы выполнялось равенство $A = \alpha C^*$, где α — вещественное число.*

Достаточность условия $A = \alpha C^*$ проверяется непосредственно.

Необходимость. Пусть

$$(ABC)^* = ABC \tag{3}$$

при любом эрмитовом операторе B и $\operatorname{Ker} C^* = 0$. Выберем в качестве B одномерный эрмитов оператор $Bx = (x, e)e$, где e — произвольный ненулевой элемент. Тогда $(Cx, e)Ae = (A^*x, e)C^*e$ при любом $x \in H$. Положим $x = C^*e$. Тогда получим $Ae = k(e)C^*e$, где $k(e) = (C^*e, Ae)[(C^*e, C^*e)]^{-1}$.

Заметим, что $k(e) = k(\lambda e)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Далее пусть элементы f и e линейно независимы. В силу условия $\operatorname{Ker} C^* = 0$ элементы C^*f и C^*e линейно независимы. Рассмотрим

$$Af = A(f-e) + Ae = k(f-e)C^*(f-e) + k(e)C^*e =$$
$$= [k(e) - k(f-e)]C^*e + k(f-e)C^*f.$$

С другой стороны, $Af = k(f)C^*f$. В силу линейной независимости C^*e и C^*f получим $k(e) - k(f-e) = 0$ и $k(f-e) = k(f)$. Таким образом, $k(e) = k(f)$ и, следовательно, $k(e)$ — константа, $k(f) = \alpha$. Тогда $A = \alpha C^*$. Подставляя в исходное равенство (3) вместо оператора C^* оператор $\frac{1}{\alpha} A$, вместо оператора A^* оператор $\bar{\alpha} C$, получаем $\bar{\alpha} = \alpha$, т. е. α — вещественное число.

Если выполнено условие $\operatorname{Ker} A = 0$, то аналогичные рассуждения проводятся для величины $l(e) = (Ae, C^*e)[(Ae, Ae)]^{-1}$. Лемма доказана.

Возвратимся теперь к поставленной задаче. Уравнение (2) имеет каноническую структуру только тогда, когда существует такой оператор J, что оператор $JD\mathcal{E}^{-1}G(t)D^{-1}$ эрмитов при любом эрмитовом операторе $G(t)$. В силу леммы это свойство будет иметь место при условии, что существует такая вещественная константа α, что $JD\mathcal{E}^{-1} = \alpha(D^{-1})^*$, или

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\alpha} D^*JD. \tag{4}$$

Из этого представления и свойств оператора J следует, что оператор $\mathcal{E}$ косоэрмитов.

Справедливо и обратное утверждение: если оператор косоэрмитов, то он представим в виде (4). Действительно, оператор $i\mathcal{E}$ эрмитов, и, следовательно, допускает спектральное представление $i\mathcal{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$.

Оператор $i\mathcal{E}$ по предположению обратим, поэтому нуль является его регулярной точкой и спектр оператора разбивается на два замкнутых непересекающихся множества σ_+ и σ_-, лежащих на полуосях $(0; +\infty)$ и $(-\infty; 0)$ соответственно. Введем в рассмотрение операторы

$$J = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi(\lambda)\, dE_\lambda \ \text{ и } \ D = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda)\, dE_\lambda,$$

где

$$\chi(\lambda) = \operatorname{sign}\lambda, \qquad \psi(\lambda) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}, & \text{при } \lambda > 0, \\ i\sqrt{|\lambda|}, & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

Тогда $J^* = -J$ и $J^2 = -I$. Далее, $D^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda)\, dE_\lambda$, где $\psi_1(\lambda) = \overline{\psi(\lambda)}$. Вычислим

$$D^*JD = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda) \operatorname{sign}\lambda\, \psi(\lambda)\, dE_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{0} -i\sqrt{|\lambda|}\, i^2 \sqrt{|\lambda|}\, dE_\lambda +$$
$$+ \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\lambda}(-i)\sqrt{\lambda} dE_\lambda = -i\int\limits_{-\infty}^{0} -|\lambda|\, dE_\lambda - i\int\limits_{0}^{\infty} \lambda dE_\lambda = \mathcal{E}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *стандартным преобразованием* $x = D^{-1}y$ *при любом эрмитовом операторе* $G(t)$ *приводилось к уравнению* (2), *имеющему каноническую структуру, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $\mathcal{E}$ *был косоэрмитов.*

Уравнение вида (1), где $\mathcal{E}$ — косоэрмитов, а $G(t)$ — эрмитов оператор, назовем неявным каноническим уравнением.

Рассмотрим теперь случай, когда в неявном каноническом уравнении оператор $\mathcal{E}$ имеет ненулевое ядро $N = \operatorname{Ker} \mathcal{E}$ и замкнутую область значений. Так как $i\mathcal{E}$ — эрмитов оператор, то все пространство разбивается в ортогональную сумму подпространств $H = N \oplus N_1$, где N_1 — область значений оператора $i\mathcal{E}$. Обозначим через P ортогональный проектор на подпространство N. Подставим в уравнение (1) значение $x = Px + (I - P)x$:

$$\mathcal{E}(I - P)\dot{x} = G(t)Px + G(t)(I - P)x. \tag{5}$$

Применим к обеим частям оператор P, коммутирующий с $\mathcal{E}$. Тогда $PG(t)Px + PG(t)(I - P)x = 0$.

Предположим, что эрмитов оператор $F(t) = PG(t)P$, действующий в подпространстве N, ограниченно обратим. Из последнего уравнения находим $Px = -F^{-1}(t)PG(t)(I - P)x$. Подставив это выражение в уравнение (5), получим $\mathcal{E}(I - P)\dot{x} = -G(t)F^{-1}(t)PG(t)(I - P)x + G(t)(I - P)x$. Применив к обеим частям оператор $I - P$, учтя, что $(I - P)\mathcal{E} = \mathcal{E}(I - P)$, будем иметь

$$\mathcal{E}(I - P)\dot{x} = -(I - P)G(t)F^{-1}(t)PG(t)(I - P)x + (I - P)G(t)(I - P)x.$$

Если обозначить $(I - P)x = y$, то придем к уравнению

$$\mathcal{E}\dot{y} = C(t)y \tag{6}$$

в подпространстве N_1. В этом подпространстве косоэрмитов оператор $\mathcal{E}$ обратим, а оператор $C(t) = -(I - P)G(t)F^{-1}(t)PG(t)(I - P) + (I - P)G(t)(I - P)$ — эрмитов. Действительно, $C^*(t) = -(I - P) \times G(t)PF^{-1}(t)G(t)(I - P) + (I - P)G(t)(I - P)$. Заметим, что $C^*(t) = C(t)$, если выполнено условие $F^{-1}(t)P = PF^{-1}(t)$. Нетрудно показать, что это условие эквивалентно следующему: $F(t)P = PF(t)$. Проверим выполнение последнего равенства

$$F(t)P = PG(t)P^2 = PG(t)P,$$

$$PF(t) = P^2G(t)P = PG(t)P.$$

Тем самым установлено, что $C(t)$ — эрмитов оператор. В силу теоремы 1 уравнение (6) заменой приводится к каноническому. Из теоремы 1 следует, что многие результаты теории канонических уравнений перенесятся на случай неявных канонических уравнений.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.

Воронеж. лесотехн. ин-т

Получено 24.06.87