УДК 517.9

**Ю. О. МИТРОПОЛЬСЬКИЙ**, акад. (Ін-т математики АН УРСР. Київ),
**А. К. ПРИКАРПАТСЬКИЙ**, д-р фіз.-мат. наук,
**Б. М. ФІЛЬ**, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН УРСР, Львів)

# Деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму в теорії інтегрованості нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри

Рассмотрены некоторые аспекты градиентно-голономного алгоритма в теории интегрируемости нелинейных динамических систем. Градиентно-голономным методом получены рекурсионные операторы, явно содержащие пространственную и временную переменные. Приведен алгоритм, который дает возможность интегрировать компьютерными методами выражения, содержащие производные от неизвестной функции.

Розглянуто деякі аспекти градієнтно-голономного алгоритму в теорії інтегрованості нелінійних динамічних систем. Градієнтно-голономним методом знайдено рекурсійні оператори, що містять в явному вигляді просторову та часову змінні. Приведено алгоритм, який дозволяє інтегрувати комп'ютерними методами вирази, що містять похідні від невідомої функції.

1. Гамільтонові динамічні системи. Нехай задана нелінійна динамічна система $u_t = K[u]$ на функціонально-операторному джет-многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{\text{top}}(Q; \mathcal{B}^m)$, де $K: M \to T(M)$ — гладке по Фреше векторне поле на $M$, $Q$ — гладкий скінченномірний многовид з мірою об'єму $d\mu$, $\mathcal{B}$ — деяка асоціативна операторна алгебра trace-класу, $t \in \mathbb{R}$ — еволюційний параметр. Якщо векторне поле $K: M \to T(M)$ однорідне і допускає невироджену імплектичну структуру $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$, що задовольняє умові Картана — Нетер [1, 2] $L_K\mathcal{L} = 0$ ($L_K$ — похідна Лі вздовж векторного поля $K: M \to T(M)$), то породжувана ним динамічна система $u_t = K[u]$ буде гамільтоновою системою на фазовому просторі $M$. Нехай тепер $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ — гладкий по Фреше функціонал на многовиді $M$. Якщо $\varphi = \operatorname{grad} \gamma \in T^*(M)$ задовольняє рівнянню типу Лакса $L_K\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi_t + K'^* \cdot \varphi = 0$, де $K'^*$ — спряження похідної Фреше $K': T(M) \to T(M)$ відносно стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$, то функціонал $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ — закон збереження для динамічної системи $u_t = K[u]$, тобто $d\gamma/dt = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Навпаки, якщо однорідний локальний функціонал $\varphi[u] \in T^*(M)$ задовольняє рівнянню Лакса $L_K\varphi = 0$, а також виконується умова градієнтності Вольтерри: $\varphi' = \varphi'^*$ для всіх $u \in M$, то необхідно існує такий гладкий функціонал $\gamma \in \mathcal{D}(M)$, що $\varphi[u] = \operatorname{grad}\gamma[u]$ ($\operatorname{grad}\gamma[u] = \delta\gamma[u]/\delta u$ — варіаційна похідна Ейлера, $\gamma = \int\limits_Q d\mu\gamma[u]$ — функціональне представлення) і $d\gamma/dt = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Таким чином, функціонал $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ — закон збереження для нелінійної динамічної системи $u_t = K[u]$, що легко визначається в явній формі по формулі гомотопії Вольтерри [1 — 3]:

$$\gamma = \int\limits_0^1 d\lambda\,(\operatorname{grad}\gamma[u\lambda], u) \equiv \int\limits_0^1 d\lambda\,(\varphi[u\lambda], u). \tag{1}$$

Нехай тепер $\alpha = \mathcal{L}\operatorname{grad}\gamma \in T(M)$. Тоді легко бачити, що $L_K\alpha = [K, \alpha] = 0$, тобто $\alpha: M \to T(M)$ — векторне поле на $M$, яке комутує з вихідною динамічною системою. За побудовою воно, очевидно, гамільтонове. Навпаки, якщо однорідне векторне поле $\alpha: M \to T(M)$ задовольняє умові $L_\alpha\mathcal{L} = 0$, то воно необхідно буде гамільтоновим.

Зауваження 1. Критерій гамільтоновості $L_\alpha\mathcal{L} = 0$ для довільного однорідного векторного поля $\alpha: M \to T(M)$ називається критерієм Картана — Нетер.

Це твердження випливає з того, що для любого елемента $\varphi \in T^*(M)$ справедлива рівність $L_{\mathcal{L}\varphi}\mathcal{L} = -\mathcal{L}(\varphi' - \varphi'^*)\mathcal{L}$, якщо $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ — імплектичний оператор, тобто

$$\sum_{\text{цикл}(a,b,c)} (a, (\mathcal{L}' \cdot \mathcal{L}b)\,c) = 0$$

для всіх $a, b, c \in T^*(M)$. Щодо пошуку в явному вигляді імплектичної структури $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ для вихідної динамічної системи $u_t = K[u]$, то операторне рівняння $L_K\mathcal{L} = 0$ служить основою її визначення за допомогою асимптотичного $\varepsilon$-методу [3, 4]. З другого боку, якщо динамічна система $u_t = K[u]$ допускає закон збереження $H \in \mathcal{D}(M)$ у формі $H = (\varphi, K)$, то легко переконатись, що вона гамільтонова, тобто $K = -\mathcal{L}\operatorname{grad} H$, де $\mathcal{L}^{(-1)} = \varphi' - \varphi'^*$. Ця властивість на практиці використовується в наступній, дещо розширеній інтерпретації. А саме, нехай $\gamma \in \mathcal{D}(M)$ — закон збереження динамічної системи $u_t = K[u]$, що відповідає інваріантному векторному полю $u_\tau = \alpha[u]$, тобто $L_K\alpha = [K, \alpha] = 0$, $\alpha = -\mathcal{L}\operatorname{grad}\gamma$. Звідси виходить, що $\mathcal{L}^{(-1)} = \theta' - \theta'^*$, де $\gamma = (\theta, u_\tau)$. Знайдений $\mathcal{L}^{(-1)}$-оператор необхідно перевірити на критерій Картана —Нетер, тобто чи $L_K\mathcal{L}^{(-1)} = 0$, так як представлення функціонала $\gamma = (\theta, u_\tau)$ є неоднозначним: $\theta \to \theta + \xi$, де $(\xi, u_\tau) = 0$ і $\xi' \neq \xi'^*$. Зауважимо при цьому, що елемент $\varphi \in T^*(M)$ в формулі $\mathcal{L}^{(-1)} = \varphi' - \varphi'^*$ задовольняє рівнянню Лакса $L_K\varphi = 0$. Звідси выходить, що всі однорідні розв'язки рівняння Лакса $L_K\varphi = 0$, як локальні функціонали на многоводі $M$, породжують або закони збереження динамічної системи $u_t = K[u]$, якщо $\varphi' = \varphi'^*$, або симплектичні структури $\mathcal{L}^{(-1)} = \varphi' - \varphi'^*$, якщо $\varphi' \neq \varphi'^*$. (Зазначимо, що в силу співвідношення $L_K\mathcal{L}^{(-1)} = 0$ гамільтонова система $u_t = K[u]$ необхідно володіє хоч би одним законом збереження $H \in \mathcal{D}(M)$.) Нехай $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ — пара незалежних імплектичних структур на многовиді $M$, що задовольняють рівності Картана — Нетер $L_K\mathcal{L} = 0 = L_K\mathcal{M}$. Накладемо на $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пару ще додаткове обмеження — сума $(\mathcal{L} + \lambda\mathcal{M})$ для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ також імплектична на $M$. Необхідною і достатньою умовою цього є імплектичність оператора $\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}$ або $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ на многовиді $M$. У цьому випадку імплектична $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пара називається узгодженою, а так званий рекурсійний оператор $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}: T^*(M) \to T^*(M)$ — наслідково-рекурсійним. Динамічна система $u_t = K[u]$ в результаті буде бі-гамільтоновою, володіючи апріорі нескінченною ієрархією функціонально незалежних законів збереження $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, де $\operatorname{grad}\gamma_{j+1} = \Lambda\operatorname{grad}\gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Ця ієрархія є комутативною відносно всіх дужок

Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathscr{L}_{(n)}}$, де $\mathscr{L}_{(n)} = \mathscr{L}(\mathscr{L}^{-1}\mathscr{M})^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $\alpha_j = \mathscr{L}\,\mathrm{grad}\,\gamma_j$, $j \in \mathbb{Z}$, то $\Lambda^*\alpha_j = \alpha_{j+1}$, причому умова узгодженості $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-пари еквівалентна рівності нулю [5] білінійного оператора Нійєнхейса $\mathscr{N}: T(M) \times T(M) \to T(M)$, де для всяких $\alpha, \beta \in T(M)$ $\mathscr{N}(\alpha, \beta) = [\Lambda^*\alpha, \Lambda^*\beta] + \Lambda^*[\alpha, \beta] - \Lambda^*([\Lambda^*\alpha, \beta] + [\alpha, \Lambda^*\beta])$. Легко переконатись, що умова $\mathscr{N}(\alpha, \beta) = 0$ для всіх $\alpha, \beta \in T(M)$ еквівалентна тому, що білінійний оператор $[\Lambda^{*\prime}, \Lambda^*]: T(M) \times T(M) \to T(M)$ є симетричним, що є більш зручним для практичних розрахунків.

Оскільки рекурсійний оператор $\Lambda: T^*(M) \to T^*(M)$ задовольняє рівнянню Лакса $L_K\Lambda = 0 \Leftrightarrow d\Lambda/dt = [\Lambda, K'^*]$, то його можна представити як умову сумісності двох лінійних диференціальних співвідношень $d\varphi/dt + K'^* \cdot \varphi = 0$ і $\Lambda\varphi = \lambda\varphi$, що є наслідками рекурсійності $\lambda\mathscr{L}\varphi(\lambda) = \mathscr{M}\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda) = \mathrm{grad}\,\gamma(\lambda)$, де $\gamma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j \lambda^{-j}$ — «породжуючий» функціонал законів збереження вихідної динамічної системи $u_t = K[u]$. На цьому етапі ми підійшли до основної проблеми, що розв'язується градієнтно-голономним алгоритмом, а саме — віднайти для вихідної динамічної системи $u_t = K[u]$, що володіє узгодженою $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-парою імплектичних операторів, таку асоційовану лінійну узагальнену диференціальну спектральну задачу типу Лакса $L[u; \lambda] f = 0$, задану в деякому функціональному просторі $H(Q, \mathscr{B}^n)$, «спектр» $\sigma(L)$ якої деформується в силу вихідної динамічної системи ізоспектрально, тобто $d\sigma(L)/dt = 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

При цьому вимагається також, щоб функціонал $\mathrm{grad}\,\sigma(L) \simeq \varphi(\lambda) \in T^*(M)$ був «власною» функцією рекурсійного оператора $\Lambda = \mathscr{L}^{-1}\mathscr{M}$, тобто $\Lambda\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Нелінійні динамічні системи $u_t = K[u]$, що володіють описаними вище властивостями, називатимемо інтегрованими по Лаксу.

**2.** Градієнтно-голономний алгоритм. Нехай однорідна нелінійна динамічна система $u_t = K[u]$ задана на періодичному функціональному многовиді $M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m)$ і володіє узгодженою $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-парою імплектичних операторів на $M$. Якщо $L[u; \lambda] f = 0$, $H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n) = \{f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f\| < \infty\}$, — асоційована по Лаксу «узагальнена» спектральна задача, яку потрібно віднайти, то в загальному випадку її можна, очевидно, представити у вигляді векторного лінійного диференціального рівняння першого порядку $df/dx = A[u; \lambda] f$, $x \in \mathbb{R}$. При цьому спектр $\sigma(L)$ повністю характеризується [1, 6] слідом степенів матриці монодромії на період $2\pi$ цієї диференціальної операції. Якщо $F(x, x_0; \lambda)$ — фундаментальна матриця рівняння $L[u; \lambda] f = 0$, де $F(x_0, x_0; \lambda) = \mathbf{1}$, $x \in \mathbb{R}$, то за означенням матриця монодромії $S(x; \lambda) = F(x + 2\pi, x; \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$.

Нехай тепер функціонал $\Delta(\lambda) = \mathrm{tr}\, S(x; \lambda)$; очевидно, що $d\Delta(\lambda)/dx = 0$, а також в силу ізоспектральності спектра $\sigma(L)$ знаходимо $d\Delta(\lambda)/dt = 0$. Такі ж властивості вірні для всіх функціоналів $\Delta_j(\lambda) = \mathrm{tr}\, S^j(x; \lambda)$, $j \in \mathbb{Z}$, причому, очевидно, не всі функціонали $\Delta_j(\lambda) \in \mathscr{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, є незалежні. А саме, якщо $f \in H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n)$, то незалежними будуть лише функціонали $\Delta_j(\lambda) \in \mathscr{D}(M)$, $j = \overline{1, n-1}$, так як $\det S(x; \lambda) \in \mathscr{D}(M)$ — теж інваріант динамічної системи $u_t = K[u]$, що слідує із характеристичного рівняння для матриці монодромії $S(x; \lambda): dS(x; \lambda)/dx = [A[u; \lambda], S(x; \lambda)]$, де $[\cdot, \cdot]$ — звичайний матричний комутатор в просторі $\mathbb{C}^n$.

Нехай тепер $\varphi(\lambda) = \mathrm{grad}\,\Delta(\lambda) \in T^*(M)$. Тоді в силу узгодженої бігамільтоновості динамічної системи $u_t = K[u]$ отримуємо співвідношення $\lambda\mathscr{L}\varphi(\lambda) = \mathscr{M}\varphi(\lambda)$, де $\varphi(\lambda) \in T^*(M)$ — аналітична функція параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ із суттєвими і алгебраїчними особливими точками на спеціальній рімановій поверхні $\Gamma$ спектра $\sigma(L)$ диференціальної операції $L[u; \lambda]$. Так як $\{\Delta(\lambda), \Delta(\mu)\}_{\mathscr{L}} = 0 = \{\Delta(\lambda), \Delta(\mu)\}_{\mathscr{M}}$ для всіх значень $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то можна визначити на $M$ породжуючу динамічну систему

$$u_\tau = -\mathscr{M}\tilde{\varphi}(\lambda) + \lambda\mathscr{L}\tilde{\varphi}(\lambda) + \tilde{\alpha}[u; \lambda], \tag{2}$$

де $\tilde{\alpha}[u; \lambda]$ — «компенсуюче» векторне поле на $M$, $\tilde{\varphi}(\lambda) = \mathrm{reg}\,\varphi(\lambda)$ — деяка скінченна регуляризація локального функціоналу $\varphi(\lambda) = \mathrm{grad}\,\Delta(\lambda)$, $\tau \in \mathbb{R}$ —

еволюційний параметр. Зокрема, при підстановці в (2) $\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} \widetilde{\varphi}_j [u] \lambda^{N-j}$ отримуємо для всіх $N \in \mathbb{Z}$ нелінійні динамічні системи $\alpha_N = -\mathcal{M}\widetilde{\varphi}_N = -\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\gamma_{N+1}$, що відповідають всім законам збереження $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, вихідної динамічної системи $u_t = K[u]$ на $M$.

Зауваження 2. Ці ж динамічні системи одержуються також з формул $\alpha_j = (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1})^j u_x$, $j \in \mathbb{Z}$, так як внаслідок однорідності векторне поле $u_\tau = u_x$ на $M$ завжди комутує з вихідною динамічною системою $u_t = K[u]$. Аналогічно, так як векторне поле $u_\tau = K[u]$ комутує апріорі з векторним полем $u_t = K[u]$, то в силу рекурсійності динамічні системи $\beta_j = (\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1})^j K[u]$, $j \in \mathbb{Z}$, або будуть породжувати нову ієрархію комутативних векторних полів і відповідних законів збереження, або ієрархія співпадатиме з попередньою. В загальному випадку число функціонально-незалежних комутативних ієрархій співпадає або менше числа суттєво особливих точок на рімановій поверхні $\Gamma$ спектра $\sigma(L)$ вихідної спектральної задачі типу Лакса для динамічної системи $u_t = K[u]$. При цьому, очевидно, у випадку раціональної залежності від спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ оператора $L[u; \lambda]$ число суттєво особливих точок на поверхні $\Gamma$ буде завжди скінченним.

Використаємо тепер основну формулу в схемі градієнтного алгоритму [1, 7]

$$\mathrm{grad}\,\Delta(\lambda) = \mathrm{tr}\,(A'^*[u; \lambda] \cdot S) \tag{3}$$

для визначення явної матричної форми спектральної задачі типу Лакса динамічної системи $u_t = K[u]$. А саме, так як $\lambda\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,\Delta(\lambda) = \mathcal{M}\,\mathrm{grad}\Delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, із (3) знаходимо основне диференціально-алгебраїчне співвідношення $\mathrm{tr}\,(\mathcal{M}A'^* \cdot S - \lambda\mathcal{L}A'^* \cdot S) = 0$. Враховуючи тепер рівняння $dS/dx = [A, S]$, зводимо попередній вираз до вигляду $\mathrm{tr}\,(\mathcal{B}[u, A; \lambda]\, S) = 0$, або, враховуючи довільність матриці монодромії при $x = x_0 \in \mathbb{R}$, — до вигляду $\mathcal{B}[u, A; \lambda] = 0$, де функціональна матриця $\mathcal{B}[u, A; \lambda]$ однозначно визначається лише імплектичною $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-парою і мінімальним порядком джет-многовиду $J^{(r)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m) \subset_{\to} M$, на якому визначене відображення $A[\cdot; \lambda] : J^{(r)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m) \to \mathrm{End}\,\mathbb{C}^n$. Враховуючи той факт, що матриця $A[u; \lambda]$ в диференціальній операції $L[u; \lambda]$ визначена неоднозначно, а з точністю до калібрувальних перетворень $A \to \widetilde{A} = UAU^{-1} + U_x U^{-1}$, де $U \in GL(n; \mathbb{C})$, можна для зручності вважати, що в «первісному» представленні матриця $A[u; \lambda]$ задовольняє умові $\mathrm{tr}\,A[u; \lambda] = 0$. При цьому група калібрувальних перетворень звужується до групи $SL(n; \mathbb{C})$, що в багатьох випадках є достатньо, щоб забезпечити нульовий порядок $(r = 0)$ мінімального джет-многовиду $J^{(r)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m)$, на якому визначена матриця $A[u; \lambda] \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^n$.

Зауваження 3. Так як вибрана вище умова нормування $\mathrm{tr}\,A[u; \lambda] = 0$ приводить до того, що матриця $A[u; \lambda] \in \mathrm{sl}\,(n; \mathbb{C})$, тобто алгебрі Лі $\mathrm{sl}(n; \mathbb{C})$, маємо пряму можливість розкласти її по матричному базису $\{L_j \in \mathrm{sl}\,(n; \mathbb{C}) : j = n^2 - 1\}$ алгебри Лі $\mathrm{sl}\,(n; \mathbb{C})$, причому комутаційні співвідношення $[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^{n^2-1} c_{ij}^k L_K$ є апріорі заданими для всіх нелінійних динамічних систем $u_t = K[u]$, які є інтегрованими по Лаксу. Тим самим побудоване вище функціональне матричне рівняння $\mathcal{B}[u, A; \lambda] = 0$ може бути завжди зведене до скінченної системи незалежних скалярних функціональних рівнянь, розв'язок яких — шукані компоненти невідомої матриці в диференціальній операції типу Лакса $L[u; \lambda]$.

Описана вище схема градієнтно-голономного алгоритму пошуку спектральної задачі $L[u; \lambda] f = 0$ для інтегрованої по Лаксу нелінійної динамічної системи $u_t = K[u]$ суттєво доповнюється диференціально-геометричним аналізом [3] структур, що характеризують цю систему однозначно. А саме, розглянемо породжуючу нелінійну динамічну систему (2) при відсутності регуляризації, тобто при $\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(\lambda)$ і $\tilde{\alpha}[u;\lambda] = 0$. Записуючи далі динамічну систему (2) у вигляді диференціального ідеалу $\mathcal{I}[u, \varphi; \lambda]$ в алгебрі Грасмана диференціальних форм на джет-многовиді $\tilde{M} \simeq \simeq J^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \times J^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m) \times J^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^\nu)$, де $\nu \in \mathbb{Z}_+$ — число додаткових змінних, що локалізують динамічну систему (2), будуємо таке асоційоване з ідеалом $\mathcal{I}[u, \varphi; \lambda]$ головне розшарування $P(\tilde{M}; SL(n; \mathbb{C}))$ із зв'язністю $\Gamma_\lambda$ [8 — 11], що її кривизна $\Omega_\lambda$ анулюється на інтегральному многовиді $\tilde{M}(\mathcal{I})$ ідеалу $\mathcal{I}[u, \varphi; \lambda]$, який є інтегрованим ідеалом по Картану, тобто $d\mathcal{I} \subset \mathcal{I}$. Вважаючи, що базис ідеалу $\mathcal{I}[u, \varphi; \lambda]$ належить $\Lambda^2(\tilde{M})$, тобто породжений диференціальними 2-формами, умова $\Omega_\lambda \subset \subset \mathcal{I}[u, \varphi; \lambda] \otimes \mathrm{sl}(n; \mathbb{C})$, а також $\mathcal{I}[u, \varphi; \lambda]|_{\tilde{M}(\mathcal{I})} = 0$, приводять до ефективного алгоритму [3, 10] визначення невідомої зв'язності $\Gamma_\lambda$ на головному розшаруванні $P(\tilde{M}; SL(n; \mathbb{C}))$. Сама ж зв'язність $\Gamma_\lambda$ на інтегральному многовиді $\tilde{M}(\mathcal{I})$ задає тоді паралельне перенесення векторів в асоційованому просторі $\mathbb{C}^n$ по змінних $x, t \in \mathbb{R}$, причому операція $d/dx - A[u; \lambda]$ коваріантної похідної по змінній $x \in \mathbb{R}$ задає шукану диференціальну операцію типу Лакса для вихідної нелінійної динамічної системи $u_t = K[u]$. Необхідно лише відмітити, що описана вище диференціально-геометрична схема знаходження представлення типу Лакса для вихідної інтегрованої по Лаксу нелінійної динамічної системи $u_t = K[u]$ є ефективною [3, 10] лише у випадку, коли $u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R}^m)$ або $u \in M \simeq \mathcal{G}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, тобто функціональний многовид $M$ суттєво «одноміризований». Якщо $u \in M \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathcal{B}^m)$ — гладкий функціонально-операторний многовид, то, як показано в роботі [12], структура градієнтно-голономного алгоритму залишається в основі незмінною, хоч в технічному відношенні суттєво ускладненою.

Суттєвою характеристикою інтегрованих по Лаксу нелінійних динамічних систем є наявність у них спеціальної підалгебри Лі симетрій $\mathfrak{G}\{\alpha, \tau\} = \mathfrak{G}\{\alpha\} \otimes \mathfrak{G}\{\tau\} \in \mathcal{T}(M)$, ізоморфної алгебрі Лі «струмів» на колі $S^1$, тобто $\exp(\mathfrak{G}\{\alpha, \tau\}) \simeq \mathcal{G} \otimes \mathrm{Diff}\, S^1$, де $\mathcal{G} \simeq C^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R})$. При цьому якщо $\mathfrak{G}\{\alpha\} = \{\alpha_j \in \mathcal{T}(M) : j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathfrak{G}\{\tau\} = \{\tau_j \in \mathcal{T}(M) : j \in \mathbb{Z}\}$, то справедливі канонічні співвідношення

$$\begin{gathered}[\alpha_j, \alpha_k] = 0, \quad [\tau_j, \alpha_k] = (k + \varepsilon)\,\alpha_{j+k}, \\ [\tau_j, \tau_k] = (k - j)\,\tau_{j+k}, \quad j, k \in \mathbb{Z},\end{gathered} \tag{4}$$

де $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — числовий параметр, що характеризує «неунітарність» представлення (4) алгебри Лі $\mathfrak{G}\{\alpha, \tau\}$. Якщо $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ — імплектична узгоджена пара операторів на $M$, то справедливі [13] характеристичні співвідношення

$$\begin{gathered}L_{\alpha_j}\mathcal{L} = 0, \quad L_{\alpha_j}\mathcal{M} = 0, \quad L_{\alpha_j}\Lambda = 0, \\ L_{\tau_j}\mathcal{L} = (\xi - j - 1/2)\,\mathcal{L}\Lambda^j, \quad L_{\tau_j}\Lambda = \Lambda^{j+1}, \\ L_{\tau_j}\mathcal{M} = (\xi - j + 1/2)\,\mathcal{M}\Lambda^j,\end{gathered} \tag{5}$$

де $j, k \in \mathbb{Z}$ і $\xi \in \mathbb{R}$ — деякий числовий параметр. Якщо ввести підалгебру $\mathfrak{G}_0\{\alpha, \tau\} = \mathfrak{G}\{\alpha\} \otimes \{\tau_-, \tau_0, \tau_+\}$, де $\{\tau_-, \tau_0, \tau_+\} \simeq \mathrm{sl}(2; \mathbb{C})$, то з (4) і (5) випливає її характеристичність для всієї алгебри $\mathfrak{G}\{\alpha, \tau\}$ динамічної системи $u_t = K[u]$:

$$\begin{gathered}[\tau_0, \alpha_0] = \varepsilon\alpha_0, \quad L_{\alpha_0}\mathcal{L} = 0, \quad L_{\alpha_0}\mathcal{M} = 0, \\ L_{\tau_0}\mathcal{L} = (\xi - 1/2)\,\mathcal{L}, \quad L_{\tau_0}\mathcal{M} = (\xi + 1/2)\,\mathcal{M}, \\ L_{\tau_0}\Lambda = \Lambda, \quad L_{\tau_-}\mathcal{L} = (\xi + 1/2)\,\mathcal{L}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}, \\ L_{\tau_+}\mathcal{L} = (\xi - 3/2)\,\mathcal{M}, \quad L_{\tau_\pm}\Lambda = \Lambda^{1\pm 1},\end{gathered} \tag{6}$$

причому $\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0$, $\tau_k = \Lambda^{*k}\tau_0$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Так як векторне поле $u_t = K[u] \in \mathfrak{G}\{\alpha\}$, то підалгебра $\mathfrak{G}\{\alpha\}$ складається з однорідних комутативних симетрій, а $\mathfrak{G}\{\tau\}$ — з неоднорідних, тобто $L_K\alpha_j = 0$, $\partial\tau_i/\partial t + L_K\tau_i = 0$ для всіх $i, j \in \mathbb{Z}$. Виходячи з формул (6), бачимо, що по знайденій одній з симетрій $\tau_-$ або $\tau_+$ можна вирахувати другу імплектичну структуру $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$, якщо задана перша. Оскільки в силу (4) при умові $K = \alpha_1 \in \mathfrak{G}\{\alpha\}$ вірне представлення $\tau_j = (1+\varepsilon)\alpha_{j+1} + c_j x\alpha_j + a_j[u]$, де $a_j[u] \in T_u(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, — однорідні компоненти неоднорідних симетрій і $c_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, — деякі нормуючі числа, то використовуючи асимптотичний $\varepsilon$-метод для рівняння $(1+\varepsilon)\alpha_{j+1} = [x\alpha_j, K]$ при $j = \pm 1$ знаходимо симетрії $\tau_\pm \in \mathfrak{G}\{\tau\}$. Тим самим на алгоритмічному рівні необхідні умови інтегровaності по Лаксу для вихідної нелінійної однорідної динамічної системи $u_t = K[u]$ повністю встановлені. Необхідні для цього перші члени підалгебри однорідних симетрій $\mathfrak{G}\{\alpha\}$ визначаються алгоритмічним шляхом на основі асимптотичного аналізу розв'язків рівняння Лакса $\varphi_t + K'^* \cdot \varphi = 0$, де при $|\lambda| \to \infty$ $\varphi[u; \lambda] = \operatorname{grad}\Delta(\lambda)[u] \simeq (1, b(x; \lambda))^\tau \exp[\omega(x, t; \lambda) + \partial^{-1}\sigma(x; \lambda)]$, вектор $b(x; \lambda) \simeq \sum_{s+j \in \mathbb{Z}_+} b_j[u]\lambda^{-j}$, $\sigma(x; \lambda) \simeq \sum_{p+j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u]\lambda^{-j}$, $s, p \in \mathbb{Z}_+$ — деякі скінченні числа і $\omega(x, t; \lambda)$ — «дисперсійна» функція спеціалізованої задачі $\varphi_t + K'^* \cdot \varphi = 0$ при $u = u_0 \in M$ і $\sigma_j[u_0] = 0$, $j + p \in \mathbb{Z}_+$, $b_j[u_0] = \bar{b}_j(t) \in \mathbb{C}^{m-1}$, $j + s \in \mathbb{Z}_+$ (символ «$\tau$» означає стандартне транспонування вектора в просторі $\mathbb{C}^m$). Відмітимо тут, що у випадку невироджених динамічних систем $u_t = K[u]$ в ролі елемента спеціалізації $u_0 \in M$ в описаному вище асимптотичному аналізі зручно вибирати значення $u_0 = 0 \in M$ або $u_0 = \bar{u}_0(t) \in M$, незалежні від функціональної змінної $x \in \mathbb{R}$.

Описаний вище алгоритм дослідження інтегрованості по Лаксу розвинутий для однорідних нелінійних динамічних систем, що володіють нескінченною комутативною однорідною підалгеброю симетрій $\mathfrak{G}\{\alpha\} \in \mathcal{I}(M)$. У випадках, коли ця умова порушується, необхідно дещо видозмінити процедуру градієнтно-голономного алгоритму, в основному в структурі його технічної реалізації на «формульному» рівні. Ця ж видозміна підходить також і до вивчення інтегрованості по Лаксу неоднорідних нелінійних динамічних систем, заданих на функціональному джет-многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$. Розглянемо деякі типові приклади таких нелінійних динамічних систем, які теж є інтегрованими по Лаксу.

3. Приклади. а). Нехай на функціональному джет-многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R})$ задана неоднорідна по еволюційному параметру $t \in \mathbb{R}$ нелінійна динамічна система [14]

$$u_t = -6uu_x - u_{3x} - u/2t = K[u; t]. \tag{7}$$

Щоб дослідити її інтегрованість по Лаксу в рамках описаного раніше градієнтно-голономного алгоритму, вивчимо спочатку наявність для (7) ієрархії законів збереження $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$. Для цього розглянемо асимптотичні по $\lambda \to \infty$ розв'язки рівняння Лакса $L_K\varphi + \partial\varphi/\partial t = 0$:

$$\varphi_t + 6u\varphi_x + \varphi_{3x} - \varphi/2t = 0, \tag{8}$$

де $\varphi = \exp[\omega(x, t; \lambda) + \partial^{-1}\sigma(x; \lambda)]$, $\sigma(x; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u]\lambda^{-j}$.

Вибираючи на місце спеціалізованої точки $u_0 \in M$ значення $u_0 = 0$, знаходимо $\omega(x, t; \lambda) = \lambda^3 t - \lambda x + \ln t^{1/2}$, тобто елемент $\varphi[u; \lambda] \in T^*(M)$ допускає асимптотичне представлення при $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\varphi[u; \lambda] \simeq t^{1/2}\exp[\lambda^3 t - \lambda x + \partial^{-1}\sigma(x; \lambda)]. \tag{9}$$

Розглянемо тепер величину $\operatorname{grad}\bar{\Delta}(\lambda) = \varphi[u_0; \lambda] = t^{1/2}\exp(\lambda^3 t - \lambda x)$, що є пропорційною до величини $\sim \operatorname{grad}\bar{\lambda}[u_0]$, де $\bar{\lambda} \in \mathcal{D}(M)$ — точка спектру $\sigma(L[u_0; \lambda])$ асоційованої операції типу Лакса $L[u_0; \lambda]f = 0$, $f \in H(\mathbb{R}/2\pi;$

$\mathbb{C}^n$), існування якої апріорі допускається. Це означає, що при $u_0 = 0 \in M$ спектральна задача $L[u_0; \lambda] f = 0$, $f \in H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n)$ явно залежить від еволюційного параметра $t \in \mathbb{R}_+$, а саме, $L[u_0; \lambda] = \widetilde{L}[u_0; \widetilde{\lambda}(t; \lambda)]$, де $\widetilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda t^{-1/2}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тобто, в процесі еволюції ця залежність спектра $\sigma(L)$ від параметра $t \in R_+$, що складається неявним чином із «набутою» залежністю спектрального параметра від еволюційного параметра динамічної системи (7), буде зберігатись. Для зручності, щоб розділити ефективно ці два комутативні і незалежні вклади в еволюцію спектра $\sigma(L[u; \lambda])$, перепишемо символічно динамічну систему (7) в наступному еквівалентному вигляді:

$$u_\tau = -6uu_x - u_{3x} - u/2\tau = K[u; \tau], \tag{10}$$

де $\tau \in (0, t] \in \mathbb{R}_+$, і задамо її дані Коші: $u|_{\tau=1} = u_0 \in M$, вважаючи, що $1 \in (0, t) \in \mathbb{R}_+$. Якщо при $\tau = 1$ спектральний параметр $\widetilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda t^{-1/2} \in \mathbb{C}$, то в процесі еволюції динамічної системи (10) по параметру $\tau \in (0, t]$ спектральний параметр $\lambda \to \lambda(t, \tau; \lambda)$, де за визначенням $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=1} = \lambda$ — незалежне від параметрів $\tau, t \in \mathbb{R}_+$ комплексне число, що визначається з умови $f(t, \tau; \lambda) \in H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n)$. Вважаючи еволюційну змінну $t \in \mathbb{R}_+$ параметром, знаходимо, що величина $\widetilde{\varphi}[u; \lambda] = \operatorname{grad} \Delta(\lambda(t, \tau; \lambda)) \in T^*(M)$ має в силу (9) вигляд

$$\widetilde{\varphi}[u; \lambda] = \tau^{1/2} \exp[\widetilde{\lambda}(t; \lambda)(\tau - 3t) - \widetilde{\lambda}(t; \lambda) x + \partial^{-1}\widetilde{\sigma}(x, \tau; \widetilde{\lambda}(t; \lambda)], \tag{11}$$

так як $d\widetilde{\varphi}/d\tau + K'^* \cdot \widetilde{\varphi} = 0$, $\tau \in (0, t) \in \mathbb{R}_+$ і $u|_{\tau=1} = u_0 \in M$. Враховуючи, що $\widetilde{\varphi}[u; \lambda]|_{\tau=t} = \varphi[u; \lambda]$, а також що $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=t} = \lambda \in \mathbb{C}$, з (11) знаходимо

$$\varphi[u; \lambda] = t^{1/2} \exp[-2\lambda^3 t^{-1/2} - \lambda x t^{-1/2} + g(x, t; \lambda) + \partial^{-1}\sigma(x, t; \lambda)], \tag{12}$$

де при $|\lambda| \to \infty$, $\sigma(x, t; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[u; t] \lambda^{-j}$ і $g(x, t; \lambda) = 2\lambda^3 t^{-1/2} + \lambda x t^{1/2} + \ln(t^{-1/2} \varphi[u_0; \lambda])$ — вклад в (12) від значення $u_0 = 0 \in M$. Таким чином, звідси виходить, що функціонали $\gamma_j = \int_x^{x+2\pi} dx \sigma_j[u; t] \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — закони збереження для вихідної динамічної системи (7). Підставивши (12) в (8), знаходимо рекурсійну ієрархію для визначення локальних функціоналів $\sigma_j[u; t]$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\partial^{-1}\sigma_{j,t} + xt^{-1/2}\delta_{j,-1} + 6u\sigma_j - 6ut^{-1/2}\delta_{j,-1} + 3\sigma_{j-k}\sigma_{k,x} - 3\sigma_{j+1,x}t^{-1/2} + \\ + \sigma_{j,xx} + \sigma_{j-k}\sigma_{k-s}\sigma_s - 3\sigma_{j-k+1}\sigma_k t^{-1/2} + 3\sigma_{j+2}t^{-1} = 0, \tag{13}$$

звідки

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 2ut^{1/2}, \quad \sigma_2 = 2u_x t/3,$$

$$\sigma_3 = t^{3/2}(2u^2 - xu/3t), \quad \sigma_4 = t^2(u_{3x}/3 + 8uu_x/3 + 2u/9t), \quad \sigma_5 = t^{5/2}(4u^3 + \\ + 2u_{xx}u + ux^2/12t^2 - xu^2/t) \tag{14}$$

і т. д.

Цей же результат можна отримати із виразу (11), підставляючи його в рівняння (8) при $t = \tau$, поклавши при цьому $\widetilde{\sigma}(x, \tau; \widetilde{\lambda}(t; \lambda)) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \widetilde{\sigma}_j[u; \tau] \times \widetilde{\lambda}^{-j}(t; \lambda)$, $|\lambda| \to \infty$:

$$\partial^{-1}\widetilde{\sigma}_{j,t} - 6u\delta_{j-1} + 6u\widetilde{\sigma}_j + \widetilde{\sigma}_{j,xx} - 3\widetilde{\sigma}_{j+1,x} + 3\widetilde{\sigma}_{j-k,x}\widetilde{\sigma}_k + \widetilde{\sigma}_{j+2} - 3\widetilde{\sigma}_{j+1-k}\widetilde{\sigma}_k + \\ + \widetilde{\sigma}_{j-k}\widetilde{\sigma}_{k-s}\widetilde{\sigma}_s = 0. \tag{15}$$

Розв'язуючи (15), знаходимо

$$\tilde{\sigma}_0 = 0, \quad \tilde{\sigma}_1 = 2u, \quad \tilde{\sigma}_2 = 2u_x, \quad \tilde{\sigma}_3 = 2u^2 + 2u_{xx} + \partial^{-1}u/3\tau,$$

$$\tilde{\sigma}_4 = 2u_{3x} + 8uu_x + 2u/3\tau, \tag{16}$$

$$\tilde{\sigma}_5 = \partial^{-1}(2u^2 + \partial^{-1}u/3\tau)/2\tau + 2u\partial^{-1}u/3\tau + u_x/\tau + 10u_x^2 + 12uu_{xx} + 2u_{4x} + 4u^3$$

і т. д.

Так як при $\tau = t \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{\sigma}(x; \lambda(t, \tau; \lambda))|_{\tau=t} = \sigma(x, t; \lambda) + dg(x, t; \lambda)/dx$, одержуємо $\sigma_{2j+1}[u; t] = t^{(j+1/2)}\tilde{\sigma}_{2j+1}[u; t]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, тобто величини $\gamma_{2j+1} = t^{(j+1/2)}\int_x^{x+2\pi} dx\tilde{\sigma}_{2j+1}[u; t] \in \mathcal{D}(M)$ — закони збереження для динамічної системи (7).

Вище ми переконались, що динамічна система (7) має нескінченну ієрархію неоднорідних законів збереження $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, що є необхідною умовою її інтегрованості по Лаксу. В силу еволюційної неоднорідності динамічної системи (7) імплектичний $\mathcal{L}$-оператор задовольняє нестаціонарному рівнянню Картана—Нетер $L_K\mathcal{L} + \partial\mathcal{L}/\partial t = 0$, тобто

$$\partial\mathcal{L}/\partial t + \mathcal{L}' \cdot K - \mathcal{L}K'^* - K' \cdot \mathcal{L} = 0. \tag{17}$$

Відповідно рекурсійний оператор $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, де $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$ — другий розв'язок рівняння (17), задовольняє рівнянню типу Лакса $L_K\Lambda + \partial\Lambda/\partial t = 0$, тобто

$$\partial\Lambda/\partial t + \Lambda' \cdot K = [\Lambda, K'^*]. \tag{18}$$

Причому $\Lambda\varphi_{2j+1} = \varphi_{2j+3}$, де $\varphi_{2j+1} = \operatorname{grad}\gamma_{2j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, що випливає із співвідношень (14). Щоб розв'язати рівняння (18), застосуємо асиптотичний ε-метод [3, 4]. Покладемо $u = \varepsilon u^{(1)}$, $\varepsilon \to 0$ і розкладемо рівність (18) в ε-ряд. Тоді отримаємо

$$d\Lambda_0/dt_0 = [\Lambda_0, K_0'^*], \quad d\Lambda_1/dt_0 = [\Lambda_1, K_0'^*] + [\Lambda_0, K_1'^*],$$
$$d\Lambda_2/dt_0 = [\Lambda_2, K_0'^*] + [\Lambda_1, K_1'^*] + [\Lambda_0, K_2'^*] - \Lambda_1' \cdot K^{(2)}, \tag{19}$$

де

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \varepsilon\frac{d}{dt_1} + \varepsilon^2\frac{d}{dt_2} + \ldots, \quad K = \varepsilon K^{(1)} + \varepsilon^2 K^{(2)} + \ldots,$$
$$\Lambda = \Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + \varepsilon^2\Lambda_2 + \ldots, \quad K'^* = K_0'^* + \varepsilon K_1'^* + \ldots, \tag{20}$$

причому в силу (7)

$$K^{(1)} = -u_{3x}^{(1)} - u^{(1)}/2t_0, \quad K^{(2)} = -6u^{(1)}u^{(1)}x,$$
$$K_0'^* = \partial^3 - 1/2t_0, \quad K_1'^* = 6u^{(1)}\partial. \tag{21}$$

Елементи $u^{(1)} \in T(M)$ і $\varphi^{(0)} \in T^*(M)$ в силу (8) задовольняють рівнянню

$$du^{(1)}/dt_0 = K_0'[0; t_0] \cdot u^{(1)}, \quad d\varphi^{(0)}/dt_0 = -K_0'^*[0; t_0] \cdot \varphi^{(0)}, \tag{22}$$

звідки

$$u^{(1)} = t_0^{-1/2}\sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{u}_k^{(1)} \exp(k^3 t_0 - kx),$$
$$\varphi^{(0)} = t_0^{1/2}\sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \exp(k^3 t_0 - kx). \tag{23}$$

З рівняння (19) випливає, що рекурсійний $\Lambda$-оператор визначається рекурентним чином, якщо заданий елемент $\Lambda_0 : T^*(M) \to T^*(M)$, який згідно (19) і (22) задовольняє співвідношенню

$$d(\Lambda_0\varphi^{(0)})/dt_0 = -K_0'^{*} \cdot (\Lambda_0\varphi^{(0)}). \tag{24}$$

Загальний розв'язок (24) можна отримати, розглянувши символічний вираз:

$$\Lambda_0\varphi^{(0)} = t_0^{1/2} \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \sum_{(n,m)} a_{n,m} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n \partial k^m} \exp(k^3 t_0 - kx), \tag{25}$$

де $a_{n,m} \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, — деякі постійні числа. Так як в силу формул (19) і (21) оператор $\Lambda_0$ залежить явно від змінних $x, t \in \mathbb{R}$, розглянемо частковий випадок оператора $\Lambda_0$:

$$\Lambda_0 = a_{0,1}(3\partial^2 t_0 - x) + \sum_{(n)} a_{n,0}\partial^n. \tag{26}$$

Підставляючи вираз (26) в співвідношення $\Lambda_0 \operatorname{grad} \gamma_{2j+1}[u_0] = \operatorname{grad} \gamma_{2j+3}[u_0]$, $j = \overline{0, 3}$, знаходимо $\Lambda_0 = t_0\partial^2 - x/3 + \partial^{-1}/6$, тобто $a_{0,1} = 1/3$, $a_{n,0} = 0$ при $n \neq -1$, $a_{-1,0} = 1/6$. Аналогічно, з рівняння (19) одержуємо

$$d(\Lambda_1\varphi^{(0)})/dt_0 = -K_0'^{*} \cdot (\Lambda_1\varphi^{(0)}) + [\Lambda_0, K_1'^{*}] \cdot \varphi^{(0)}. \tag{27}$$

Розв'язуючи на основі (23) методом Фур'є рівняння (27), знаходимо

$$\Lambda_1\varphi^{(0)} = t_0 \sum_{(k,s)} \bar{\varphi}_k^{(1)} \bar{u}_s^{(1)} (4 - 2s/(s+k)) \exp[(k^3 + s^3) t_0 - (k+s) x],$$

тобто $\Lambda_1 = 2t_0(2u^{(1)} - \partial^{-1}u_x^{(1)})$. Решта рівнянь (19) показують, що $\Lambda_n = 0$, $n \geqslant 2$. Враховуючи, що $\varepsilon u^{(1)} = u \in M$, $t_0 \to t \in \mathbb{R}$, для рекурсійного $\Lambda$-оператора отримуємо остаточний вираз

$$\Lambda = t(\partial^2 + 4u - 2\partial^{-1}u_x) - x/3 + \partial^{-1}/6. \tag{28}$$

Щоб знайти імплектичну $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пару, яка факторизує оператор $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, розв'яжемо асиптотичним $\varepsilon$-методом рівняння Картана — Нетер (17): $\partial\mathcal{L}/\partial t + L_K\mathcal{L} = 0$. Нехай $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \varepsilon\mathcal{L}_1 + \varepsilon^2\mathcal{L}_2 + \ldots$ при $u = \varepsilon u^{(1)} \in M$. Тоді маємо

$$d\mathcal{L}_0/dt_0 = \mathcal{L}_0 K_0'^{*} + K_0' \cdot \mathcal{L}_0, \quad d\mathcal{L}_1/dt_0 = \mathcal{L}_0 K_1'^{*} + \mathcal{L}_1 K_0'^{*} + K_0' \cdot \mathcal{L}_1 + K_1' \cdot \mathcal{L}_0,$$

$$d\mathcal{L}_2/dt_0 = \mathcal{L}_2 K_0'^{*} + \mathcal{L}_1 K_1'^{*} + \mathcal{L}_0 K_2'^{*} + K_0' \cdot \mathcal{L}_2 + K_1' \cdot \mathcal{L}_1 + K_2' \cdot \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_1' \cdot K^{(2)} \ldots . \tag{29}$$

Із формул (22) знаходимо $d(\mathcal{L}_0\varphi^{(0)})/dt_0 = K_0' \cdot (\mathcal{L}_0\varphi^{(0)})$, звідки для $\mathcal{L}_0\varphi^{(0)} \in T(M)$ маємо загальний символічний розв'язок

$$\mathcal{L}_0\varphi^{(0)} = t_0^{1/2} \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} t_0^{-1} \sum_{(m,n)} b_{m,n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial k^n} \exp(k^3 t_0 - kx). \tag{30}$$

В силу кососиметричності $\mathcal{L}$-оператора із (30), зокрема, можна вибрати такий вираз для оператора $\mathcal{L}_0$: $\mathcal{L}_0 = t_0^{-1}\partial$, тобто $b_{m,n} = 0$ при $(m,n) \neq (1, 0)$, $b_{1,0} = 1$. Розв'язуючи рекурентним чином рівняння (29), знаходимо $\mathcal{L} = 0$, $n \geqslant 1$. Таким чином, $\mathcal{L} = t^{-1}\partial$ — імплектичний оператор для динамічної системи (7), відповідно $\mathcal{M} = \mathcal{L}\Lambda$ — другий її імплектичний оператор. В силу імплектичності оператора $\mathcal{L}_{(1)} = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ знайдена $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пара імплектичних операторів є узгодженою. Тим самим, динамічна система (7) допускає представлення Лакса $L[u; \lambda] f = 0$, $f \in H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n)$ із умовою ізоспектральності, тобто $d\sigma(L)/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Для його явного пошуку можна скористатися диференціально-геометричною схемою градієнтно-голономного алгоритму [3], що описаний вище. Результатом нескладних розрахунків буде оператор $L[u;\ \lambda] = \partial^2 + u - x/12t - \lambda^2/4t$, $\lambda \in \mathbb{C}$, з умовою $d\sigma(L)/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Зауваження 4. Із приведеного вище аналізу нелінійної динамічної системи (7) видно, що згідно з виразом (30) ця динамічна система допускає неоднорідну імплектичну $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пару нетерових операторів. Покажемо, що і у випадку однорідних динамічних систем теж існують неоднорідні імплектичні $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пари і рекурсійні оператори. Наприклад, нелінійна динамічна система Бюргерса $u_t = u_{xx} + uu_x = K[u]$, $u \in M \simeq \simeq J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R})$, має [15] два рекурсійні оператори

$$\Lambda^{(1)} = -\partial + u/2 - \partial^{-1}u_x/2,$$
$$\Lambda^{(2)} = -2t\partial + (x + tu) - \partial^{-1}\cdot(1 + tu_x). \tag{31}$$

Ці оператори легко знайти, розв'язуючи асимптотичним ε-методом рівняння (18). Так як у випадку динамічної системи Бюргерса оператори $K_0'^* = \partial^2$, $K_1'^* = -u^{(1)}\partial$, розв'язок рівняння (24) буде мати вигляд

$$\Lambda_0\varphi^{(0)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \sum_{(m,n)} a_{m,n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial k^n} \exp(-kx + k^2 t_0), \tag{32}$$

де ми поклали згідно з (23)

$$u^{(1)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{u}_k^{(1)} \exp(k^2 t_0 + kx),$$
$$\varphi^{(0)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \exp(-k^2 t_0 + kx). \tag{33}$$

Щоб знайти однорідний оператор (31), будемо вважати, що $\Lambda^{(1)*}\alpha_j = \alpha_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, де $\alpha_0 = u_x$, $\alpha_1 = K[u] = u_{2x} + uu_x$. Таким чином, $\Lambda^{(1)} = \Lambda_0^{(1)} + \varepsilon\Lambda_1^{(1)}$, причому $\Lambda_0^{(1)} = -\partial$. Такий розв'язок дійсно існує серед множини розв'язків (32). Розв'язуючи далі рівняння (19), знаходимо $\Lambda_1^{(1)} = u^{(1)}/2 - \partial^{-1}u_x^{(1)}/2$, звідки і отримуємо, поклавши $\varepsilon u^{(1)} = u \in M$, оператор $\Lambda^{(1)}: T^*(M) \to T^*(M)$. Окрім того, так як динамічна система Бюргерса допускає лише один однорідний закон збереження $\gamma_0 = \int_0^{2\pi} dxu$, то із співвідношення $\Lambda^{(1)}\,\mathrm{grad}\,\gamma_0 = 0$ випливає $1 = \mathrm{grad}\,\gamma_0 \in \ker\Lambda^{(1)}$. Прямою перевіркою переконуємось у справедливості цього факту. Щоб знайти другий, неоднорідний рекурсійний оператор $\Lambda^{(2)}$ в (31), згідно з (32) розглянемо слідуючий оператор:

$$\Lambda_0^{(2)} = \sum_{(m)} a_{m,0}\partial^m + a_{0,1}\partial/\partial k \simeq \sum_{(m)} a_{m,0}\partial^m - a_{0,1}(2t_0\partial - x). \tag{34}$$

Оператор (34) повинен мати ядром елемент $1 = \mathrm{grad}\,\gamma_0 \in \ker\Lambda_0^{(2)}$, звідки знаходимо $a_{0,1} = 1$, $a_{-1,0} = -1$, $a_{m,0} = 0$, $m \neq -1$. Отже, $\Lambda_0^{(2)} = -\partial^{-1} - 2t_0\partial + x$, звідки рівняння (19) дають $\Lambda_1^{(2)} = t_0 u^{(1)} - t_0\partial^{-1}u_x^{(1)}$, $\Lambda_k^{(2)} = 0$, $k \geqslant 1$. Таким чином, $\Lambda^{(2)} = -2t\partial + (x + tu) - \partial^{-1}(1 + tu_x)$, де ми зворотно поклали $\varepsilon u^{(1)} = u \in M$, $t_0 \to t \in \mathbb{R}$. Легко також переконатись, що $1 = \mathrm{grad}\,\gamma_0 \in \ker\Lambda^{(2)}$.

Покажемо тепер аналогічним шляхом, що нелінійна однорідна динамічна система Кортевега де Фріза $u_t = u_{3x} + uu_x = K[u]$, $u \in M \simeq \simeq J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R})$, теж має однорідний і неоднорідний рекурсійні оператори

$$\Lambda^{(1)} = \partial^2 + 2u/3 - \partial^{-1}u_x/3,$$
$$\Lambda^{(2)} = -2\partial^{-1} + x + 2\partial^{-2}u\partial^{-1}/3 + \partial^{-2}(\partial^{-1}u)/3 + t\partial^{-1}(3\partial^3 + u\partial - \partial u). \tag{35}$$

Для динамічної системи Кортевега де Фріза оператори $K_0'^* = -\partial^3$, $K_1'^* = -u^{(1)}\partial$, $u = \varepsilon u^{(1)} \in M$, звідки рівняння (24) приводить до розв'язку:

$$\Lambda_0^{(1)}\varphi^{(0)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \sum_{(m,n)} a_{m,n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial k^n} \exp(kx + k^3 t_0), \tag{36}$$

де згідно з (22)

$$u^{(1)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{u}_k^{(1)} \exp(kx + k^3 t_0),$$
$$\varphi^{(0)} = \sum_{k\in 2\pi i\mathbb{Z}} \bar{\varphi}_k^{(0)} \exp(kx + k^3 t_0). \tag{37}$$

Скористаємось тепер фактом, що нелінійна динамічна система Кортевега де Фріза має нескінченну ієрархію однорідних законів збереження [1, 3] $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, причому $\gamma_0 = \int_0^{2\pi} dxu$, $\gamma_1 = \int_0^{2\pi} dxu^2/6$, $\gamma_2 = \int_0^{2\pi} dx(uu_{xx} + 5u_x^2/6 + u^3/18)$ і т. д. Для величин $\operatorname{grad}\gamma_j \in T^*(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, відповідно маємо $\operatorname{grad}\gamma_0 = 1$, $\operatorname{grad}\gamma_2 = u_{xx}/3 + u^2/6$, $\operatorname{grad}\gamma_1 = u/3$ і т. д. Враховуючи, що $\Lambda_0^{(1)} \operatorname{grad}^{(1)}\gamma_1 = \operatorname{grad}^{(1)}\gamma_2$, знаходимо, що $\Lambda_0^{(1)} = \partial^2$ — оператор, який задовольняє рівнянню (24), тобто міститься серед множини його розв'язків (36). Розв'язуючи далі рекурентно рівняння (19), знаходимо $\Lambda_1^{(1)} = 2u^{(1)}/3 - \partial^{-1}u_x^{(1)}/3$, $\Lambda_k^{(1)} = 0$, $k \geqslant 2$. Таким чином, поклавши $\varepsilon u^{(1)} = u \in M$, знаходимо $\Lambda^{(1)} = \partial^2 + 2u/3 - \partial^{-1}u_x/3$, тобто $\Lambda^{(1)}$ — оператор в списку (35).

Щоб знайти неоднорідний рекурсійний оператор $\Lambda^{(2)}: T^*(M) \to T^*(M)$, зауважимо, що серед множини розв'язків (36) є оператор

$$\Lambda_0^{(2)} = \sum_{(m)} a_{m,0}\partial^m + a_{0,1}\partial/\partial k \simeq \sum_{(m)} a_{m,0}\partial^m + a_{0,1}(x + 3\partial^2 t_0). \tag{38}$$

Враховуючи, що динамічна система Кортевега де Фріза має симетрії $\alpha_0 = u_x$, $\tau_1 = 2u + xu_x + 3t(u_{3x} + uu_x)$, покладемо $\Lambda^{(2)*}\alpha_0 = \tau_1$, звідки $\Lambda_0^{(2)} = -2\partial^{-1} + x + 3t_0\partial^2$, тобто, $a_{m,0} = 0$ при $m \neq -1$. Розв'язуючи далі рекурентно рівняння (19) і (27), знаходимо $\Lambda_1^{(2)} = 2\partial^{-2}u^{(1)}\partial^{-1}/3 + \partial^{-2}(\partial^{-1}u^{(1)})/3 + t_0(\partial^{-1}u^{(1)}\partial + u^{(1)})$, $\Lambda_n^{(2)} = 0$, $n \geqslant 2$. Таким чином, покладаючи $\varepsilon u^{(1)} = u \in M$, $t_0 \to t \in \mathbb{R}$, знаходимо, що оператор $\Lambda^{(2)}: T^*(M) \to T^*(M)$ приймає вигляд із списку (35). Є очевидним теж, що описана вище процедура знаходження однорідних і неоднорідних рекурсійних операторів переноситься без суттєвих змін на довільні цілком інтегровані по Лаксу нелінійні динамічні системи, необов'язково скалярного типу.

Зауваження 5. Так як знайдені вище рекурсійні оператори задовольняють рівнянню $\partial\Lambda/\partial t + L_K\Lambda = 0$, то згідно з принципом рекурсії, якщо локальний функціонал $\varphi_0 \in T^*(M)$ задовольняє рівнянню $L_K\varphi_0 + \partial\varphi_0/\partial t = 0$ (наприклад, якщо $\varphi_0 = \operatorname{grad}\gamma_0$, $d\gamma_0/dt = 0$), то величина $\varphi_j = \Lambda^j\varphi_0 \in T^*(M)$, $j \in \mathbb{Z}$, теж задовольняє рівнянню $L_K\varphi_j + \partial\varphi_j/\partial t = 0$, $j \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, якщо система $u_t = K[u]$ є однорідна, то у випадку $(\varphi_j'^* - \varphi_j')|_{j=s} = 0$ при певному $s \in \mathbb{Z}$ існує такий функціонал $\gamma_s \in \mathcal{D}(M)$, що $\varphi_s = \operatorname{grad}\gamma_s$. В противному випадку знаходимо, що оператор $\mathcal{L}_{(j)}^{(-1)} = \varphi_j' - \varphi_j'^*$, $j \in \mathbb{Z}$, — новий коімплектичний оператор вихідної нелінійної динамічної системи $u_t = K[u]$, так як справедлива тотожність $L_{\mathcal{L}\varphi_j}\mathcal{L}^{-1} = \varphi_j - \varphi_j'^*$, $j \in \mathbb{Z}$

Аналогічно, якщо $\alpha_0 \in T(M)$ — симетрія динамічної системи $u_t = K[u]$, то $\alpha_j = \Lambda^{*j}\alpha_0$, $j \in \mathbb{Z}$, — теж є її симетріями. Тим самим, виходячи, наприклад, з рекурсійних операторів (31) чи (35), отримаємо по формулі $(\Lambda^{(1)n}\Lambda^{(2)m})^*\alpha_0 = \alpha_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, неоднорідні симетрії довільної степені неоднорідності по незалежних змінних $x$, $t \in \mathbb{R}$.

б). Розглянемо тепер нелінійну однорідну динамічну систему

$$u_t = u^2 u_{xx} + 2u^2 = K[u] \tag{39}$$

на многовиді $M \simeq J^{(\infty)}_{\text{top}}(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{R})$, що характеризується виродженістю в точці $u = 0 \in M$ оператора $K'^*[u]$. Ця умова приводить до певної модифікації градієнтно-голономного алгоритму, особливості якої опишемо нижче.

Для знаходження законів збереження динамічної системи (39) знайдемо спочатку асимптотичний розв'язок рівняння Лакса $\tilde{\varphi}_t + K'^*[u] \cdot \tilde{\varphi} = 0$ при $|\lambda| \to \infty$ в околі спеціального «нульового» розв'язку $u_0 = -1/2t \in M$, $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Зокрема, при $u = u_0 \in M$ відповідне рівняння Лакса $\bar{\varphi}_t + K'^*[u_0] \cdot \bar{\varphi} = 0$ допускає розв'язок у вигляді $\bar{\varphi} = \exp[\lambda x + \omega(t; \lambda)]$, де $\omega(t; \lambda) = 2 \ln t + \lambda^2/4t$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Тоді при довільних $u \in M$ рівняння Лакса допускає асимптотичний розв'язок при $|\lambda| \to \infty$ у вигляді

$$\tilde{\varphi} = t^2 \exp[\lambda x + \lambda^2/4t + \partial^{-1}\tilde{\sigma}(x; \lambda)], \tag{40}$$

де $\tilde{\sigma}(x; \lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \tilde{\sigma}_j[u; x, t] \lambda^{-j}$. В результаті підстановки (40) в рівняння Лакса знаходимо нескінченну рекурентну послідовність співвідношень виду

$$2\delta_{j,0}/t + \partial^{-1}\tilde{\sigma}_{j,t} - \delta_{j,-2}/4t^2 + (4u + 4uu_{xx} + 2u_x^2)\delta_{j,0} + 4uu_x\delta_{j,-1} +$$

$$+ 4uu_x\tilde{\sigma}_j + u^2\tilde{\sigma}_{j,x} + u^2\delta_{j,-2} + 2u^2\tilde{\sigma}_{j+1} + u^2\tilde{\sigma}_{j-k}\tilde{\sigma}_k = 0, \tag{41}$$

причому $j + 2 \in \mathbb{Z}_+$.

Розв'язуючи послідовно співвідношення (41), знаходимо

$$\tilde{\sigma}_{-1} = -(1 + 1/2ut), \quad \tilde{\sigma}_0 = \partial^{-1}u^{-1}/2t^2 + x/t - u_x/t \tag{42}$$

і т. д., причому, як і у випадку нелінійної динамічної системи (10), функціонали $\tilde{\gamma}_j = \int_x^{x+2\pi} dx \tilde{\sigma}_j[u; x, t]$, $j + 1 \in \mathbb{Z}_+$, не є законами збереження вихідної динамічної системи (39). Цей факт пов'язаний згідно з (39) з тим, що величина $\varphi = \operatorname{grad} \Delta(\lambda)$, де $\Delta(\lambda) = \operatorname{tr} S(x; \lambda)$ — слід матриці монодромії відповідного представлення Лакса, в якому спектральний параметр $\lambda \to \tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda t$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Тобто в процесі еволюції ця залежність від спектрального параметру $\tilde{\lambda}(t; \lambda) \in \mathbb{C}$ буде залишатись незмінною, неявним чином складаючись із «набутою» залежністю від еволюції власне динамічної системи (39). Щоб розділити для зручності аналізу ці два еволюційні вклади, перепишемо динамічну систему (39) у вигляді

$$u_\tau = u^2 u_{xx} + 2u^2 = K[u], \tag{43}$$

де $\tau \in (0, t] \in \mathbb{R}_+$, причому $u|_{\tau=1} = u_0 = -1/2t \in M$, вважаючи, що $1 \in (0, t) \in \mathbb{R}_+$. Так як при $\tau = 1$ спектральний параметр $\tilde{\lambda}(t; \lambda) = \lambda t \in \mathbb{C}$, то в процесі еволюції динамічної системи (43) по параметру $\tau \in (0, t]$ спектральний параметр $\lambda \to \lambda(t, \tau; \lambda)$, де за визначенням $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=1} = \lambda \in \mathbb{C}$ — незалежне від $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ комплексне число, що визначається з умови $f(t, \tau; \lambda) \in H(\mathbb{R}/2\pi; \mathbb{C}^n)$, $L[u; \lambda] f = 0$.

Нехай тепер $\tilde{\varphi}[u; \lambda] \in T^*(M)$ — розв'язок рівняння Лакса $\tilde{\varphi}_\tau + K'^*[u] \cdot \tilde{\varphi} = 0$ для динамічної системи (43), тобто

$$\tilde{\varphi}[u; \lambda] = \tau^2 \exp[\tilde{\lambda}(t; \lambda) x + \tilde{\lambda}^2(t; \lambda)/4\tau + \tilde{g}(t; \lambda) + \partial^{-1}\tilde{\sigma}(x, \tau; \tilde{\lambda}(t; \lambda))], \tag{44}$$

де $\tilde{g}(t; \lambda)$ — деяка нормуюча функція, що буде конкретизована нижче. Враховуючи далі, що $\lambda(t, \tau; \lambda)|_{\tau=t} = \lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{\varphi}[u; \lambda]|_{\tau=t} = \varphi[u; \lambda]$, де $\varphi_t +$

$+ K'^{*}[u]\cdot\varphi = 0,\ t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$, із (43) знаходимо, що при $\tilde{g}(t;\lambda) = -5\lambda^2 t/4$ маємо

$$\varphi[u;\lambda] = t^2\exp[\lambda tx - \lambda^2 t + g(x,t;\lambda) + \partial^{-1}\sigma(x,t;\lambda)], \tag{45}$$

де при $|\lambda|\to\infty$, $\sigma(x,t;\lambda)\simeq \sum_{j+1\in\mathbb{Z}_+}\sigma_j[u;x,t]\lambda^{-j}$, $g(x,t;\lambda) = -\lambda tx + \lambda^2 t + \ln(t^{-2}\varphi[u_0;\lambda])$ — вклад в (45) від значення $u_0 = -1/2t\in M$, при якому локальний функціонал $\sigma(x,t;\lambda)$ анулюється. Підставляючи вираз (45) у відповідне рівняння Лакса, знаходимо: всі функціонали $\gamma_j = \int_x^{x+2\pi} dx\times\sigma_{j-1}[u;x,t]$, $j\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$, є тривіальними законами збереження динамічної системи (39), причому $\sigma_{2j-1}[u;x,t]\cong t^{1-2j}\tilde{\sigma}_{2j-1}[u;x,t]$, $j\in\mathbb{Z}_+$.

Застосовуючи далі до динамічної системи (39) асимптотичний $\varepsilon$-метод [3, 4], знаходимо аналогічно попередньому пункту її однорідні і неоднорідні симетрії, а також рекурсійний оператор. Останній згідно з градієнтно-голономним алгоритмом приводить до побудови в явному вигляді представлення типу Лакса для вихідної динамічної системи (39), на чому ми зупинятись не будемо. Зауважимо лише, що динамічна система (39) допускає перетворення типу Беклунда до динамічної системи Бюргерса.

4. Градієнтно-голономний алгоритм і комп'ютерна алгебра. Описаний вище градієнтно-голономний алгоритм дослідження інтегрованості нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах в багатьох своїх структурних елементах зводиться до задач двох класів: перший клас — задачі з рекурентними арифметичними операціями, другий клас — задачі з функціонально-алгебраїчними операціями (інтегрування, диференціювання, диференціювання Фреше та ін.). При аналізі конкретних динамічних систем степінь громіздкості наростає з ростом порядку операцій степеневим чином, тому доцільно для досліджень використовувати системи аналітичних обрахунків (наприклад, REDUCE або MUMATH). Нижче розглянемо один з алгоритмів, що активно використовується в градієнтно-голономному методі і ефективно піддається автоматизації з використанням систем комп'ютерної алгебри. Зокрема, цей алгоритм виявляється більш ефективним і менш громіздким, ніж безпосереднє інтегрування, крім того, звичайні комп'ютерні методи не дають можливості інтегрувати вирази від невідомих функцій.

Отже, нехай на функціональному многовиді $M\simeq J^{(\infty)}_{\mathrm{top}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$ заданий локальний гладкий по Фреше скалярний функціонал $\gamma[u]\in\Lambda^0(M)$, $u\in M$. Припустимо, що $\delta\gamma[u]/\delta u = 0$ для всіх $u\in M$, тобто $\gamma'^{*}[u]\cdot 1 = 0$ на $M$. Звідси випливає, що існує такий локальний функціонал $\beta[u]\in\Lambda^0(M)$, що справедлива тотожність $\gamma[u] = d\beta[u]/dx$, $x\in\mathbb{R}$. Ставиться задача: алгоритмічним чином, сприйнятним для методів комп'ютерної алгебри, визначити в явному аналітичному виді локальний функціонал $\beta[u]$, $u\in M$. Не вдаючись до доведення, сформулюємо наступне твердження.

Теорема. *Якщо при описаних вище умовах локальний функціонал $\gamma[u]\in\Lambda^0(M)$ задовольняє рівнянню $\gamma'^{*}[u]\cdot 1 = 0$, то існує такий локальний функціонал $\beta[u]\in\Lambda^0(M)$, що $\gamma[u] = d\beta[u]/dx$, $x\in\mathbb{R}$, причому*

$$\frac{d\beta[u]}{dx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 d\lambda\,\mathcal{D}_x^n\langle a_n[u\lambda], v\rangle|_{v=u} = \gamma[u], \tag{46}$$

*де за означенням $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, $\gamma'[u] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n[u]\times\frac{d^n}{dx^n}$, і оператор $\mathcal{D}_x = \frac{d}{dx} - \partial_x$, причому $\partial_x a_n[u\lambda] = \frac{d}{dx}a_n[u\lambda]$, $\partial_x v = 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$.*

Формулу (46) можна привести до більш зручного вигляду, розписавши степінь $\mathcal{D}_x^n$, $n\in\mathbb{Z}$, по формулі бінома Ньютона:

$$\beta[u] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 d\lambda \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_n^k \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} \langle \partial_x^k a_n [u\lambda], u\rangle, \tag{47}$$

де $C_n^k = n!/(n-k)!\,k!$, $k=\overline{0,n}$. Зауважимо також, що у випадку функціонального многовиду $M \simeq J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ при $n>1$, для функціоналу $\gamma[u]\in\in\Lambda^0(M)$ при умові $\gamma'^*[u]\cdot 1 = 0$ існує вектор $\vec{\beta}[u]\in(\Lambda^0(M))^p$, для якого $\operatorname{div}\vec{\beta}[u]=\gamma[u]$, причому

$$\operatorname{div}\vec{\beta}[u] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \int_0^1 d\lambda \mathcal{D}_x^{|n|} \langle a_n[u\lambda], v\rangle |_{v=u} = \gamma[u], \tag{48}$$

де за визначенням $\gamma'[u] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} a_n[u]\frac{d^{|n|}}{dx^n}$, $\mathcal{D}_x^{|n|} = \prod_{i=1}^p \mathcal{D}_{x_i}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^p n_i = |n|$, $\mathcal{D}_{x_i} = \left(\frac{d}{dx_i} - \partial_{x_i}\right)$, причому $\partial_x a_n[u\lambda] = \frac{d}{\partial x} a_n[u\lambda]$, $\partial_x v = 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що формули (47) і (48) є повністю алгоритмізовані і задають собою зручний об'єкт для комп'ютерної автоматизації процесу знаходження представлення (46) в явному аналітичному вигляді. Аналогічне теоремі твердження приведене в роботі [2], але по своїй аналітичній формі воно погано пристосоване до використання комп'ютерних методів, хоч по суті воно є еквівалентним приведеному вище. З використанням цього методу розроблені програми, які реалізують елементи градієнтно-голономного алгоритму.


1. *Интегрируемые* динамические системы / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М. : Мир, 1989.— 678 с.
3. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1990.— 278 с.
4. *Митропольский Ю. А., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Гр.* Асимптотический метод построения имплектических и рекурсионных операторов нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.— **287**, № 6.— С. 1312—1317.
5. *Fucssteiner B., Fokas A. S.* Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries // Physica D.— 1981.— **4**, N 1.— P. 47—66.
6. *Теория* солитонов / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 324 с.
7. *Прикарпатский А. К.* Градиентный алгоритм построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1986.—**287**, № 4.— С. 827—832.
8. *Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К.* Алгебраическая структура градиентного метода построения критериев интегрируемости нелинейных динамических систем.— Киев, 1986.— С. 19—56.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86.53).
9. *Притула Н. Н.* Нелокальные законы сохранения и полная интегрируемость двухкомпонентного нелинейного уравнения Шредингера в рамках градиентно-голономного алгоритма.— Киев, 1988.— 26 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, № 88.30).
10. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Полная интегрируемость нелинейных систем Ито и Бенни —Каупа: градиентный алгоритм и представление Лакса // Теорет. и мат. физика.— 1986.— 67, № 3.— С. 410—425.
11. *Притула М. М., Прикарпатський А. К., Микитюк І. В.* Елементи теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем.— К. : УМКВО, 1988.— 86 с.
12. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Билокальная периодическая задача для дифференциальных операторов Штурма — Лиувилля и Дирака и некоторые приложения в теории нелинейных динамических систем // Докл. АН СССР.— 1990.— 310, № 1.— С. 29—32.
13. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантовая алгебра Ли токов — универсальная алгебраическая структура нелинейных вполне интегрируемых динамических систем математической физики // Теорет. и мат. физика.— 1988.— 75, № 1.— С. 3—18.
14. *Zhu G. C., Chen H. H.* Symmetries and integrability of the cylindrical Korteweg — de Vries equation // J. Math. Phys.— 1986.— 27, N 1.— P. 100—103.
15. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике.— М. : Наука, 1983.— 280 с.


Получено 31.07.90