УДК 517.5, 519.65

Н. П. КОРНЕЙЧУК, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О поведении производных погрешности сплайн-интерполирования

Доказываются утверждения, выясняющие характер поведения производных погрешности интерполирования дифференцируемых периодических функций сплайнами по отношению к соответствующим производным стандартного совершенного сплайна, определяющего погрешность на всем классе функций.

Доводяться твердження, які висвітлюють характер поведінки похідних похибки інтерполяції диференційовних періодичних функцій сплайнами у відношенні до відповідних похідних стандартного ідеального сплайну, що визначає похибку на усьому класі функцій.

1. Преимущества интерполяционных сплайнов (по сравнению с интерполяционными полиномами) связаны, в конечном итоге, с наличием в подпространстве сплайнов, построенных на фиксированной сетке, базиса с конечными носителями. Этим, в частности, обусловлена меньшая зависимость интерполяционных сплайнов от неточности в исходных данных, а также тот факт, что эти сплайны хорошо приближают не только интерполируемую функцию, но и ее производные. Наилучший порядок этого приближения для обычно рассматриваемых классов функций был установлен сравнительно давно (см., например, [1, 2]). В последнее время выяснилось, что первую производную интерполируемой функции производная интерполируемого сплайна в ряде ситуаций приближает наилучшим образом в смысле точной константы и даже в смысле поперечника.

Первый результат с точной константой в равномерной метрике для приближения производной в случае кубического сплайн-интерполирования получен в работе [3] с помощью промежуточного приближения эрмитовыми сплайнами. В общем случае задача оказалась очень трудной, и подход, использованный в [3], для сплайнов любого порядка, по-видимому, не может привести к успеху. Автор, используя аппарат перестановок, получил точные результаты как в пространстве C, так и в L_p для одновременного приближения производной при интерполировании сплайнами порядка m функций с ограниченной $(m+1)$-й производной [4, 5]. Ход технически весьма сложного доказательства был проиллюстрирован на более простых случаях $m = 2, 3$ [5—7].

В настоящей статье доказываются новые результаты о поведении производных интерполяционных сплайнов относительно соответствующих производных интерполируемой функции. Эти результаты позволяют дать более простое и естественное доказательство точных оценок для погрешности первой производной в метриках пространств C и L_p. Ограничимся при этом рассмотрением периодического случая. Хорошо известным способом результаты переносятся на случай интерполирования на конечном отрезке при краевых условиях Лидстона [5, с. 204].

2. В дальнейшем C будет обозначать пространство непрерывных на всей оси 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\| = \|f\|_C = \max_t |f(t)|,$$

C^r, $r = 1, 2, \ldots$, — множество r раз непрерывно дифференцируемых функций из C, W^r_∞ — класс функций $f(t) \in C^{r-1}$, у которых производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна и $\sup\limits_t \operatorname{vrai} |f(t)| \leqslant 1$.

Периодическим сплайном порядка $m = 1, 2, \ldots$ (дефекта 1) по разбиению (сетке)

$$\Delta_N : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = 2\pi \qquad (1)$$

называют кусочно-полиномиальную функцию $s(t) \in C^{m-1}$, у которой производная $s^{(m-1)}(t)$ кусочно-линейна и

$$s^{(m)}(t) = c_k,\ t_{k-1} < t < t_k,\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

При фиксированном разбиении (1) множество таких функций образует линейное многообразие, которое обозначим через $S_m(\Delta_N)$. Под $S_0(\Delta_N)$ понимаем множество 2π-периодических кусочно-постоянных функций с возможными разрывами в точках разбиения (1). Сплайн $s(t)$ из $S_m(\Delta_N)$, у которого $c_k = \pm(-1)^k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, называют совершенным. Ясно, что совершенный сплайн порядка m принадлежит классу W^m_∞. Легко понять также, что любой сплайн из $S_m(\Delta_N)$ может иметь на периоде не более N нулей с учетом их кратности, — в этом легко убедиться с помощью теоремы Ролля.

Особую роль в экстремальных задачах теории приближения играют $2\pi/n$-периодические совершенные сплайны $\varphi_{n,m}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, \ldots$, по равномерному разбиению $t_k = k\pi/n$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, определяемые следующим образом:

$$\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sgn} \sin nt, \qquad \varphi_{n,m}(t) = \int\limits_{\gamma_m}^{t} \varphi_{n,m-1}(u)\, du,$$

где $\gamma_m = 0$ при m четном и $\gamma_m = \pi/2n$ при m нечетном. (Этот сплайн называют совершенным сплайном Эйлера). Заметим, что $\varphi_{n,m}(t)$ имеет простые нули в точках $k\pi/n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, при m четном и в точках $(2k - 1)\pi/2n$ при m нечетном. В этих нулях сплайн $\varphi_{n,m}(t)$ меняет знак и других нулей на периоде не имеет. Будем также иметь в виду, что $\varphi^{(\nu)}_{n,m}(t) = \varphi_{n,m-\nu}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть совершенный периодический сплайн $\varphi(t)$ порядка $m \geqslant 1$ по разбиению (1) имеет на периоде N различных нулей $\tau_i : \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N = \tau_1 + 2\pi$. Тогда (см., например, [5, с. 39]) линейное многообразие $S_{m-1}(\Delta_N)$ интерполирует в точках τ_i, т. е. для любой функции $f(t) \in C$ существует, и притом единственный, сплайн $s(f, t) \in S_{m-1}(\Delta_N)$ такой, что $s(f, \tau_i) = f(\tau_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Считая m и разбиение Δ_N, а также совершенный сплайн $\varphi(t)$ фиксированными, введем обозначения

$$\delta(f, t) = f(t) - s(f, t),$$
$$\eta_\lambda(f, t) = \varphi(t) - \lambda\delta(f, t), \quad 0 < \lambda \leqslant 1.$$

Ясно, что

$$\delta(f, \tau_i) = \eta_\lambda(f, \tau_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Обозначим через $\nu(g)$ число нулей, а через $\mu(g)$ — число существенных перемен знака [5, с. 18] на периоде кусочно-непрерывной 2π-периодической функции $g(t)$. Наши рассуждения будут опираться на следующий почти очевидный факт.

Л е м м а. *Пусть $g(t)$ — 2π-периодическая локально-суммируемая и кусочно-непрерывная функция с нулевым средним значением на периоде. Если числа $\nu(g)$ и $\mu(g)$ конечны, то для интеграла*

$$g_1(t) = \int_0^t g(u)\,du + c$$

выполняются неравенства $\mu(g_1) \leqslant \nu(g_1) \leqslant \mu(g)$; при этом из равенства $\nu(g_1) = \mu(g)$ обязательно следует, что и $\mu(g_1) = \mu(g)$, т. е. в этом случае в каждом из своих нулей функция $g_1(t)$ меняет знак.

Действительно, если x_1 и x_2 — две соседние точки перемены знака $g(t)$, то на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $g_1(t)$ строго монотонна и может обратиться в нуль лишь в одной его точке. Если это внутренняя точка отрезка, то в ней $g_1(t)$ меняет знак.

Теперь докажем несколько утверждений, выясняющих поведение функции $\eta_\lambda(f, t)$ и ее производных.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если $f(t) \in W_\infty^m$, то при любом $\lambda \in (0, 1)$ функция $\eta_\lambda(f, t)$ не имеет на периоде $[\tau_1, \tau_1 + 2\pi)$ других нулей, кроме точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, которые являются простыми нулями и в каждой из которых $\eta_\lambda(f, t)$ меняет знак.*

Д о к а з а т е л ь с т в о можно провести традиционным путем, используя теорему Ролля, но мы здесь будем опираться на сформулированную выше лемму. Рассмотрим производную

$$\eta_\lambda^{(m-1)}(f, t) = \varphi^{(m-1)}(t) - \lambda\delta^{(m-1)}(f, t) = \varphi^{(m-1)}(t) - \lambda\,[f^{(m-1)}(t) - s^{(m-1)}(f, t)]$$

и заметим, что $\varphi^{(m-1)}(t)$ — непрерывная ломаная с вершинами в точках t_k разбиения (1), причем

$$\varphi^{(m)}(t) = \pm(-1)^k, \quad t_{k-1} < t < t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Так как $f(t) \in W_\infty^m$, то

$$|f^{(m-1)}(t') - f^{(m-1)}(t'')| \leqslant |t' - t''|,$$

а учитывая тот факт, что $s^{(m-1)}(f, t) = \text{const}$ при $t \in (t_{k-1}, t_k)$, заключаем, что $\lambda\delta^{(m-1)}(f, t)$ есть кусочно-непрерывная функция с возможными разрывами в точках t_k, причем

$$|\lambda\delta^{(m-1)}(f, t') - \lambda\delta^{(m-1)}(f, t'')| \leqslant \lambda\,|t' - t''|, \quad t', t'' \in (t_{k-1}, t_k). \tag{4}$$

В силу (3), (4) и того, что $0 < \lambda < 1$, функция $\eta_\lambda^{(m-1)}(f, t)$ может обратиться в нуль и поменять знак на интервале (t_{k-1}, t_k) не более одного раза. Легко понять, сделав чертеж, что если $\eta_\lambda^{(m-1)}(f, t)$ меняет знак в точке разбиения t_k, то по крайней мере на одном из интервалов (t_{k-1}, t_k) и (t_k, t_{k+1}) функция $\eta_\lambda^{(m-1)}(f, t)$ знак сохраняет. Таким образом, $\mu(\eta_\lambda^{(m-1)}(f)) \leqslant N$, и мы находимся в условиях леммы, в силу которой $\mu(\eta_\lambda^{(m-2)}(f)) \leqslant \nu(\eta_\lambda^{(m-2)}(f)) \leqslant N$, причем знаки равенства здесь могут появиться, если $\mu(\eta_\lambda^{(m-1)}(f)) = N$, а из равенства $\nu(\eta_\lambda^{(m-2)}(f)) = N$ следует, что все нули функции $\eta_\lambda^{(m-2)}(f, t)$ являются точками перемены знака В свою очередь, функция $\eta_\lambda^{(m-2)}(f, t)$ также удовлетворяет условиям леммы, что позволяет сделать соответствующие заключения относительно $\eta_\lambda^{(m-3)}(f, t)$ и т. д. В конце концов получим неравенства

$$\mu(\eta_\lambda(f)) \leqslant \nu(\eta_\lambda(f)) \leqslant \mu(\eta_\lambda'(f)) \leqslant N.$$

Но в силу (2) $\nu(\eta_\lambda(f)) = N$, а потому $\mu(\eta_\lambda(f)) = N$, и в каждой точке τ_i функция $\eta_\lambda(f, t)$ меняет знак.

Следствие 1. *Производная $\eta'_\lambda(f, t)$ имеет ровно по одному простому нулю на каждом интервале (t_{k-1}, t_k), $k = 1, 2, \ldots, N$, и других нулей не имеет.*

Следствие 2. *Каждая из ν-х производных $\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$, имеет на периоде ровно N простых нулей, в каждом из которых $\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t)$ меняет знак; функция $\eta_\lambda^{(m-1)}(f, t)$ (вообще говоря, разрывная) имеет на периоде ровно N перемен знака.*

Следствие 3. *Кратных нулей функция $\eta_\lambda(f, t)$ и ее производные $\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$, не имеют.*

Заметим, что сформулированные следствия 1—3 справедливы при любом λ, $0 < \lambda < 1$.

Предложение 2. *Если α, β — соседние нули функции $\varphi^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$, и на интервале (α, β) $\delta(f, t)$ не обращается в нуль, то $\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ дважды меняет знак.*

Действительно, в противном случае

$$\operatorname{sgn} \eta_\lambda^{(\nu)}(f, t) = \operatorname{sgn} \varphi^{(\nu)}(t), \quad \alpha < t < \beta,$$

и при некотором λ_1, $0 < \lambda_1 < \lambda$, функция $\eta_{\lambda_1}^{(\nu)}(f, t)$ будет иметь на (α, β) кратный нуль, что в силу следствия 3 невозможно.

Предложение 3. *Пусть α, β — соседние нули функции $\varphi^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$; $\alpha < t' < t'' < \beta$, и*

$$\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t') = \eta_\lambda^{(\nu)}(f, t'') = 0; \quad |\eta_\lambda^{(\nu)}(f, t)| > 0, \quad t' < t < t''.$$

Тогда

$$\operatorname{sgn} \eta_\lambda^{(\nu)}(f, t) = \operatorname{sgn} \varphi^{(\nu)}(t), \quad t' < t < t''.$$

В самом деле, если на интервале (t', t'') $\operatorname{sgn} \eta_\lambda^{(\nu)}(f, t) = -\operatorname{sgn} \varphi^{(\nu)}(t)$, то при некотором $\lambda_1 \in (0, \lambda)$ у функции $\eta_{\lambda_1}^{(\nu)}(f, t)$ появится на (t', t'') кратный нуль, что исключено.

Следствие 4. *Если α, β — соседние нули функции $\varphi^{(\nu)}(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, m-2$, а t' и t'' — соседние нули функции $\delta^{(\nu)}(f, t)$, причем $t' < \alpha < c < t'' < \beta$, $c = (\alpha + \beta)/2$ и $|\delta^{(\nu)}(f, c)| > |\varphi^{(\nu)}(c)|$, то*

$$|\delta^{(\nu)}(f, c-u)| > |\delta^{(\nu)}(f, c+u)|, \quad 0 < u < t'' - c.$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, надо, выбрав $\lambda \in (0, 1)$ из условия $\eta_\lambda^{(\nu)}(f, c) = 0$, воспользоваться предложением 3.

3. Перейдем к равномерному разбиению $t_k = k\pi/n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, и будем в этом случае вместо $S_m(\Delta_{2n})$ писать $S_{2n,m}$. Подпространство $S_{2n,m}$ интерполирует в нулях совершенного сплайна $\varphi_{n,m+1}(t)$, т. е. в точках

$$\tau_k = \tau_{m,k} = \begin{cases} k\pi/n, & \text{если } m \text{ нечетно;} \\ (2k-1)\pi/n, & \text{если } m \text{ четно.} \end{cases}$$

Считая m фиксированным, при каждом $j = 1, 2, \ldots, m$ отметим точки экстремума производной $\varphi_{n,m+1}^{(j)}(t) = \varphi_{n,m-j+1}(t)$, т. е. нули $\varphi_{n,m-j}(t)$:

$$\theta_k = \theta_{m,k} = \begin{cases} k\pi/n, & \text{если } m-j \text{ четно,} \\ (2k-1)\pi/n, & \text{если } m-j \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Теорема. *Пусть $f(t) \in W_\infty^{m+1}$, $s(f, t)$ — сплайн из $S_{2n,m}$, определяемый равенствами $s(f, \tau_k) = f(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Тогда*

$$|f^{(j)}(\theta_k) - s^{(j)}(f, \theta_k)| \leqslant |\varphi_{n,m-j+1}(\theta_k)| = \|\varphi_{n,m-j+1}\|, \tag{5}$$
$$k = 1, 2, \ldots, 2n; \quad j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Неравенства точные.

Доказательство. Пусть сначала $m - j$ четно, так что $\theta_k = k\pi/n$. Справедливость неравенства (5) достаточно доказать для любой функции $f(t) \in W_\infty^{m+1}$ при $k = 0$, т. е. в точке $\theta_0 = 0$, ибо сдвиг по аргументу на $k\pi/n$ не выводит нас за пределы рассматриваемой ситуации.

Рассуждаем от противного. Пусть $\delta(f, t) = f(t) - s(f, t)$ и для некоторой функции $f \in W_\infty^{m+1}$

$$|\delta^{(j)}(f, 0)| > |\varphi_{n,m-j+1}(0)| = \|\varphi_{n,m-j+1}\|,$$

причем без потери общности можно считать, что $\delta^{(j)}(f, 0) > |\varphi_{n,m-j+1}(0)|$. Положим $f_1(t) = (-1)^j f(-t)$ и $f_*(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f_1(t)]$. Ясно, что $f_*(t) \in W_\infty^{m+1}$, $f_*^{(j)}(t) = \frac{1}{2}[f^{(j)}(t) + f^{(j)}(-t)]$, и, следовательно, $f_*^{(j)}(-t) = f_*^{(j)}(t)$. Аналогичным образом сплайну $s(f, t)$ сопоставляем функцию

$$s_*(f, t) = \frac{1}{2}[s(f, t) + s_1(f, t)], \quad s_1(f, t) = (-1)^j s(f, -t),$$

являющуюся, очевидно, также сплайном из $S_{2n,m}$, совпадающим с $f_*(t)$ в точках τ_k, так что $s_*(f, t) = s(f_*, t)$. j-я производная погрешности интерполирования $\delta(f_*, t) = f_*(t) - s(f_*, t)$ есть четная функция: $\delta^{(j)}(f_*, -t) = \delta^{(j)}(f_*, t)$. Кроме того,

$$\delta_*^{(j)}(f, 0) = f_*^{(j)}(0) - s_*^{(j)}(f, 0) = \frac{1}{2}[f^{(j)}(0) - s^{(j)}(f, 0)] + $$
$$+ \frac{1}{2}[f_1^{(j)}(0) - s_1^{(j)}(f, 0)] = \delta^{(j)}(f, 0).$$

Таким образом, из предположения $\delta^{(j)}(f, 0) > |\varphi_{n,m-j+1}(0)|$ следует, что для функции $f_*(t) \in W_\infty^{m+1}$ имеет место аналогичное неравенство

$$\delta^{(j)}(f_*, 0) > |\varphi_{n,m-j+1}(0)|, \tag{6}$$

причем идеальный сплайн $\varphi_{n,m-j+1}(t)$ также является четным.

Пусть $\varphi(t)$ — тот из сплайнов $\pm\varphi_{n,m+1}(t)$, значение j-й производной которого в нуле положительно. Если положить

$$\eta_\lambda(f_*, t) = \varphi(t) - \lambda\delta(f_*, t), \quad 0 < \lambda \leqslant 1,$$

то в силу (6) $\eta_1^{(j)}(f_*, 0) < 0$. Существует $\lambda_0 \in (0, 1)$, при котором $\eta_{\lambda_0}^{(j)}(f_*, 0) = 0$, а так как функция $\eta_\lambda^{(j)}(f_*, t)$ является четной, то $\eta_{\lambda_0}^{(j+1)}(f_*, 0) = 0$, а это противоречит следствию 3.

В случае, когда $m - j$ нечетно и $\theta_k = (2k - 1)\pi/2n$, доказательство аналогично. И здесь достаточно установить справедливость неравенства (5) для всех $f(t) \in W_\infty^{m+1}$ в одной из точек θ_k, например, в точке $\theta_1 = \pi/2n$. Предположив противное, от функции $f(t)$ переходим к симметризованной функции $f_*(t) \in W_\infty^{m+1}$, удовлетворяющей условию $f_*^{(j)}\left(\frac{\pi}{2n} + t\right) = f_*^{(j)}\left(\frac{\pi}{2n} - t\right)$. Аналогичное преобразование, примененное к сплайну $s(f, t)$, не выводит из множества $S_{2n,m}$ и сохраняет условия интерполирования.

Точность неравенств (5) следует из того, что $\varphi_{n,m+1}(t) \in W_\infty^{m+1}$ и $s(\varphi_{n,m+1}, t) \equiv 0$.

Замечание 1. Можно показать, что для $f(t) \not\equiv \varphi_{n,m+1}(t)$ в (5) имеет место знак строгого неравенства.

Замечание 2. Соотношения (5) останутся справедливыми и при $j = m$, если считать $s^{(m)}(f, \theta_k) = \frac{1}{2}[s^{(m)}(f, \theta_k - 0) + s^{(m)}(f, \theta_k + 0)]$.

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения.— М. : Мир, 1972.— 316 с.
2. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М. : Наука, 1976.— 248 с.
3. *Hall Ch. A., Meyer W. W.* Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approxim. Theory.— 1976.— **16**.— P. 105—122.
4. *Корнейчук Н. П.* О приближении интерполяционными сплайнами функций и их производных // Докл. АН СССР.— 1982.— **264**, № 5.— С. 1063—1066.
5. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
6. *Корнейчук Н. П.* О приближении параболическими сплайнами дифференцируемых функций и их производных // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 6.— С. 702—710.
7. *Корнейчук Н. П.* Некоторые точные неравенства для дифференцируемых функций и оценка приближения функций и их производных интерполяционными кубическими сплайнами // Сиб. мат. журн.— 1983.— **34**, № 5.— С. 94—108.

Получено 12.07.90