УДК 517.9

В. П. Хавин, д-р физ.-мат. наук,
В. А. Барт, асп. (С.-Петербург. ун-т)

ТЕОРЕМЫ СЕГЕ – КОЛМОГОРОВА – КРЕЙНА О ВЕСОВОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ И ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНОВСКОГО ТИПА

In view of the well-known Szegö – Kolmogorov – Krein theorems on weighted approximation by the functions with semibounded spectrum (on a circle or a line), an efficient construction is suggested, which enables one to realize these approximations. It is based on relations similar to the Cárleman formula reconstructing an analytic function in terms its trace on the boundary of the domain of definition.

У світлі відомих теорем Г. Сеге, А. М. Колмогорова та М. Г. Крейна про вагове наближення функціями з напівобмеженим спектром (на колі та прямій) запропонована ефективна конструкція, що реалізує такі наближення. Вона заснована на формулах типу формули Карлемана, що відновлює аналітичну функцію за її слідом на границі області задання.

Первая часть заглавия относится к задаче весового приближения функциями с полуограниченным спектром (на единичной окружности $\mathbb{T}$ и прямой $\mathbb{R}$). Решение этой задачи (для среднеквадратичных весовых приближений на прямой) определяет следующая теорема М. Г. Крейна [1, 2].

Пусть Δ — *неотрицательная функция, заданная и суммируемая на* $\mathbb{R}$. *Следующие утверждения равносильны:*

1) $$\mathfrak{L}(\Delta) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log \Delta(x)}{1+x^2}\,dx = -\infty;$$

2) *для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\sigma > 0$ *найдется тригонометрическая сумма* S *вида*

$$S(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\sigma_k x}, \quad \sigma_k \geq \sigma, \quad k = 1, \dots, N,$$

удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |1 - S(x)|^2 \Delta(x)\,dx < +\infty.$$

Аналогичные результаты, касающиеся весовых приближений на окружности, принадлежат Сеге [3, 4] и А. Н. Колмогорову [5]. Приближения тригонометрическими суммами в весовых L^p-пространствах изучали Н. И. Ахиезер [6] и Г. Ц. Тумаркин [7]; поточечную весовую аппроксимацию в $L^\infty(\mathbb{T})$ изучал Н. К. Никольский [8].

Известные к настоящему времени доказательства теоремы Крейна и ее аналогов основаны в большинстве на соображениях двойственности и не дают явного выражения аппроксимирующих тригонометрических сумм. В связи с этим (а также в связи с вероятностными задачами прогноза) в статье [8] была поставлена задача построения эффективных формул, определяющих суммы S, о которых идет речь в теореме Крейна.

Нужно сказать, однако, что для весовых приближений на окружности $\mathbb{T}$ такие формулы содержались уже в работах Сеге. С помощью замены переменной их нетрудно преобразовать в аналогичные формулы для $\mathbb{R}$ (см. ниже обсуждение в п. 1.7). В п. 3 настоящей работы мы предлагаем иную конструкцию.

Она близка по духу к замечательной формуле Карлемана, восстанавливающей аналитическую функцию f класса Харди по ее граничным значениям на множестве положительной длины (см. [12–14]; эта формула и имеется в виду во второй части заглавия). В п. 2 дано обобщение формулы Карлемана, позволяющее восстановить аналитическую функцию f, если известна некоторая функция ψ, достаточно тесно примыкающая к f вдоль границы ее области задания. Аппроксимационные формулы п. 3 не только по структуре, но и количественно близки к формулам карлемановского типа.

Мы ограничиваемся среднеквадратическими приближениями, хотя формулы пп. 2, 3, можно, по-видимому, использовать для других метрик (в том числе для равномерной; см. в этой связи замечание 2.1E)). В п. 1 мы обсуждаем формулу Карлемана и ее обобщения; стремясь к замкнутости изложения, приводим довольно подробную сводку классических результатов Сеге – Колмогорова – Крейна (причем мы используем также работы Н. И. Ахиезера и Г. Ц. Тумаркина). По вопросам весовой аппроксимации, затронутым в настоящей статье, мы отсылаем читателя к книгам Кусиса [10], Н. К. Никольского [8, 9], В. И. Смирнова и Н. А. Лебедева [11]. Формуле Карлемана, ее обобщениям и приложениям посвящена книга Л. А. Айзенберга [14].

Мы признательны С. А. Виноградову за полезное обсуждение формул п. 3.

1. Введение. 1.1. *Одна задача восстановления функции по неполным данным.* Предположим, что функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению

$$f\chi_s = \psi\chi_s, \tag{1}$$

где $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ — „известная" функция, а χ_s обозначает характеристическую функцию множества $S \subset \mathbb{R}$*. Если $m(S') > 0$**, где m — мера Лебега, то мы знаем, тем самым, лишь „кусок" функции f — ее след на множестве S. Добавим к (1) следующую „спектральную" информацию:

$$\hat{f}\chi_\Sigma = \theta\chi_\Sigma, \tag{2}$$

где $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ — еще одна „известная" функция, а $\Sigma \subset \mathbb{R}$. Если оба множества S и Σ достаточно массивны, то решение f системы уравнений (1), (2) может оказаться единственным. Например, если S' и Σ' — ограниченные промежутки, и

$$g \in L^2(\mathbb{R}), \quad g\chi_S = \psi\chi_S, \quad \hat{g}\chi_\Sigma = \theta\chi_S,$$

то $F := f - g$ совпадает m-п. в. на $\mathbb{R}$ с целой функцией (поскольку функция $\hat{F}$ сосредоточена на ограниченном множестве Σ'); будучи тождественным нулем на S, функция F равна нулю m-п. в. на $\mathbb{R}$. Таким образом, условия (1) и (2) *полностью* определяют функцию f.

Это заключение сохраняет силу всегда, когда верна следующая теорема единственности:

$$F \in L^2(\mathbb{R}), \quad F|S = 0, \quad F|\Sigma = 0 \Rightarrow F = 0. \tag{3}$$

Утверждения такого типа верны для широкого класса „массивных" пар (S, Σ) (см., например, [15]). Их можно рассматривать как варианты „принципа неопре-

* Все рассматриваемые ниже подмножества прямой и функции вещественной переменной считаются измеримыми по Лебегу.

** Здесь $M' := \mathbb{R} \setminus M \quad (M \subset \mathbb{R})$.

деленности", запрещающего чрезмерную и одновременную малость носителя и спектра ненулевой функции.

Возможность восстановить функцию f по уравнениям (1) и (2), вытекающая из импликации (3), остается чисто теоретической, пока мы не располагаем алгоритмом, позволяющим фактически вычислить f по данным ψ и θ.

Рассмотрим пример такого алгоритма, предполагая, что

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ — множество положительной лебеговой меры,} \\ \Sigma = (-\infty, 0). \end{array}\right\} \qquad (4)$$

При условии (4) утверждение (3) превращается в следующую классическую теорему:

$$F \in H^2(\mathbb{R}), \quad F|S = 0, \quad m(S) > 0 \Rightarrow F = 0. \qquad (5)$$

(Символом $H^2(\mathbb{R})$ обозначен класс Харди $\{F \in L^2(\mathbb{R}) \colon \hat{F}\,|\,(-\infty, 0) = 0\}$.) Эффективный алгоритм решения системы (1), (2), соответствующий теореме (5), фактически содержится в замечательной интерполяционной формуле Карлемана (см. [14], где можно найти сведения по истории вопроса и ссылки на работу Карлемана, Г. М. Голузина и Н. М. Крылова, Патила). Формулу Карлемана можно записать так:

$$F = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{Q_\sigma} T_{Q_\sigma}(F\chi_S) \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}) \quad (F \in H^2(\mathbb{R})). \qquad (6)$$

Обозначим символом T_λ теплицев оператор с символом $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$:

$$T_\lambda(H) := P_+(\lambda H) \quad (H \in L^2(\mathbb{R})),$$

где P_+ — ортогональный проектор, отображающий $L^2(\mathbb{R})$ на подпространство $H^2(\mathbb{R})$ („проектор М. Риса"). Иными словами, при m–п. в. $x \in \mathbb{R}$

$$P_+(H)(x) = \lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} H(t)(t-z)^{-1}\,dt = \frac{1}{2} H(x) + \frac{1}{2\pi i}\,\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} H(t)(t-x)^{-1}\,dt$$

($z = x + iy,\ y > 0$). Функции Q_σ, содержащиеся в (6), определяются явным образом*:

$$Q_\sigma := \exp[2\sigma^{-1} P_+(\chi_S)].$$

Заметим, что оператор $Q_\sigma^{-1} T_{Q_\sigma}$ есть (неортогональный) проектор пространства $L^2(\mathbb{R})$ на $H^2(\mathbb{R})$.

Вернемся к уравнениям (1) и (2) и применим (6) к $F := f - \theta$ (очевидно, $F \in H^2(\mathbb{R})$). В результате получим эффективный способ приближенного вычисления функции f по данным ψ и θ:

$$f = \theta + \lim_{\sigma \downarrow 0} \frac{1}{Q_\sigma} T_{Q_\sigma}((\psi - \theta)\chi_S).$$

1.2. *Аппроксимационный эквивалент теоремы* (5) *и формула Карлемана.* Положим

* Эта компактная запись предполагает, что $m(S) < +\infty$. В общем случае Q_σ определяется более громоздкой формулой.

$$H_-^2(\mathbb{R}) := L^2(\mathbb{R}) \ominus H^2(\mathbb{R}) = \{F \in L^2(\mathbb{R}) \colon \hat{F} \,|\, (0, +\infty) = \overline{H^2(\mathbb{R})}\}.$$

Теорема (5) равносильна следующему утверждению:

$$m(S) > 0 \;\Rightarrow\; \text{множество } \chi_{S'} H_-^2(\mathbb{R}) \text{ плотно в } \chi_{S'} L^2(\mathbb{R}). \tag{7}$$

В самом деле, (5) означает, что каждый элемент пространства $L^2(\mathbb{R})$, ортогональный подпространству $\chi_{S'} H_-^2(\mathbb{R})$, ортогонален $\chi_{S'} L^2(\mathbb{R})$.

Формула Карлемана (6) замечательна тем, что она дает *конструктивное* доказательство *обеих* теорем (5) и (7). Чтобы это увидеть, заметим, что Q_σ совпадает m–п. в. на $\mathbb{R}$ с граничным значением функции

$$Q_\sigma^+ \colon z \mapsto \exp\left[(\sigma\pi i)^{-1} \int_S (t-z)^{-1}\, dt\right],$$

аналитической в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$:

$$Q_\sigma(x) = \lim_{y \downarrow 0} Q_\sigma^+(x+iy) \quad \text{при} \quad m\text{-п. в.} \quad x \in \mathbb{R}.$$

В то же время m-п. в. на S' она совпадает с граничным значением функции

$$Q_\sigma^- \colon z \mapsto \exp\left[(\sigma\pi i)^{-1} \int_S (t-z)^{-1}\, dt\right],$$

аналитической в нижней полуплоскости $\mathbb{C}_- := -\mathbb{C}_+$. Действительно, в силу формулы Сохоцкого – Привалова

$$\lim_{y \downarrow 0} Q_\sigma^-(x-iy) = \exp\left[-\sigma^{-1}\chi_S(x) + (\sigma\pi i)^{-1}\, \text{v. p.} \int_S (t-x)^{-1}\, dt\right] = \left(\overline{Q_\sigma(x)}\right)^{-1},$$

так что

$$|Q_\sigma(x)| = 1, \; \lim_{y \downarrow 0} Q_\sigma(x \pm iy) = Q_\sigma(x)$$

при m-п. в. $x \in S'$. Обозначив через P_- ортогональный проектор, отображающий $L^2(\mathbb{R})$ на $H_-^2(\mathbb{R})$, и использовав (6), получим

$$T_{Q_\sigma}(F\chi_S)(x) = F(x)\chi_S(x) - P_-(FQ_\sigma\chi_S)(x) = -P_-(FQ_\sigma\chi_S)(x)$$

при m-п. в. $x \in S'$. Значит, функция, стоящая под знаком предела в (6), m-п. в. на S' совпадает с функцией $-\overline{Q}_\sigma P_-(Q_\sigma F\chi_S)$, которая, очевидно, принадлежит $H_-^2(\mathbb{R})$. Таким образом, равенство (6) автоматически доставляет явную формулу для функции класса $H_-^2(\mathbb{R})$, сколь угодно близкой к наперед заданной функции $F \in H^2(\mathbb{R})$ на S' (по норме пространства $L^2(S')$, и доказывает оба утверждения (4) и (7).

Это рассуждение позволяет придать „теплицевому" выражению

$$Q_\sigma^{-1} T_{Q_\sigma}(F\chi_S)$$

„ганкелев" вид на множестве S'. А именно, m-п. в. на S' оно совпадает с $\overline{Q}_\sigma \mathcal{H}_{1/\overline{Q}_\sigma}(F\chi_{S'})$; $\mathcal{H}_\lambda$ обозначает ганкелев оператор с символом $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R})$

$\mathcal{H}_\lambda(F) := P_-(\lambda F)$, $\mathcal{H}_\lambda$ действует из $H^2(\mathbb{R})$ и $H^2_-(\mathbb{R})$. В самом деле,

$$Q_\sigma^{-1}|S' = \overline{Q}_\sigma|S',$$

и, как мы видели выше,

$$T_{Q_\sigma}(F\chi_S)|S' = -P_-(FQ_\sigma\chi_S)|S' = -[P_-(FQ_\sigma) - P_-(FQ_\sigma\chi_{S'})]|S' =$$

$$= P_-(F\chi_{S'}(\overline{Q}_\sigma)^{-1})|S' = \mathcal{H}_{1/\overline{Q}_\sigma}(F\chi_{S'})|S'$$

(мы воспользовались тем, что $FQ_\sigma \in H^2(\mathbb{R})$), и $P_-(FQ_\sigma) = 0$. Итак,

$$\lim_{\sigma\to 0}\|F - \overline{Q}_\sigma\mathcal{H}_{1/\overline{Q}_\sigma}(F\chi_{S'})\|_{L^2(S')} = 0 \quad (F \in H^2(\mathbb{R})). \tag{8}$$

Эти свойства формулы Карлемана были отмечены в работе [16]. В настоящей статье они будут существенно дополнены. Обобщив в п. 4 постановку „задачи восстановления по неполным данным" и двойственную ей задачу аппроксимации, построим формулу типа (6), которая решает „задачу восстановления"; она же (точнее, небольшое ее возмущение) решает и соответствующую задачу аппроксимации.

1.3. *Обозначения.* А. Будем рассматривать функции, заданные на $\mathbb{R}$ или на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. Обозначим через X одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{T}$, через m лебегову меру на $\mathbb{R}$ или нормированную лебегову меру на $\mathbb{T}$ $(m(\mathbb{T}) = 1)$; $L^p(X) := L^p(X, m)$. Буква ζ будет обозначать функцию на X следующим образом:

$$\zeta(x) \equiv x, \quad \text{если} \quad X = \mathbb{T}; \quad \zeta(x) \equiv \exp(ix), \quad \text{если} \quad X = \mathbb{R}.$$

Через Ξ обозначим $\mathbb{Z}$, если $X = \mathbb{T}$, и $\mathbb{R}$, если $X = \mathbb{R}$. Преобразование Фурье $\hat{f}$ функции $f \in L^2(X)$ есть, по определению, функция класса $L^2(\Xi)$, заданная формулой

$$\hat{f}(\xi) = c\int_X f\overline{\zeta}^{\xi}\,dm \quad (\xi \in \Xi); \quad c = 1, \text{ если } X = \mathbb{T}, \quad c = 2\pi, \text{ если } X = \mathbb{R}.$$

Б. Пусть $p \in [1, +\infty]$. Классы Харди $H^p_\pm(X)$ (или, короче, $H^p_\pm$) определяются следующим образом*:

$$H^p_+ := \{f \in L^p(X): \hat{f}(\xi) = 0 \quad \text{при п. в.} \quad \xi < 0\},$$

$$H^p_- := \{f \in L^p(X): \hat{f}(\xi) = 0 \quad \text{при п. в.} \quad \xi \ge 0\}.$$

(Если $X = \mathbb{R}$, то $\hat{f}$ можно понимать как распределение. Впрочем, нам не понадобятся (в случае $X = \mathbb{R}$) значения p, отличные от 1 и 2, так что функция $\hat{f}$ будет определена либо абсолютно сходящимся интегралом, либо в соответствии с теоремой Планшереля.)

Очевидно, $\overline{H^p_+(\mathbb{R})} = H^p_-(\mathbb{R})$ (черта обозначает комплексное сопряжение). В этом равенстве $\mathbb{R}$ нельзя заменить на $\mathbb{T}$; однако,

$$f \in H^p_-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \bar{f} \in H^p_+(\mathbb{R}), \quad \hat{f}(0) = 0.$$

* О классах Харди см., например, [9, 13, 17].

Проекторы Риса P_+ и P_- суть, по определению, ортогональные проекторы, отображающие $L^2(X)$ на H_+^2 и H_-^2 соответственно.

С каждым из подпространств $H_\pm^2$ можно связать пространство, состоящее из аналитических функций комплексного переменного. Положим

$$\mathbb{D}(=\mathbb{D}_+) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}, \quad \mathbb{D}_- := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\},$$

$$\mathbb{C}_+ := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta > 0\}, \quad \mathbb{C}_- := \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \zeta < 0\}; \quad \mathbb{O}_\pm = \mathbb{D}_\pm,$$

если $X = \mathbb{T}$; $\mathbb{O}_\pm = \mathbb{C}_\pm$, если $X = \mathbb{R}$. Условимся обозначать символом $\mathcal{O}(G)$ множество всех комплексно аналитических функций, заданных в области $G \subset \mathbb{C}$. Положим

$$H^p(\mathbb{D}) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \|f\|^p_{H^p(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^p \, dm(z) < +\infty\},$$

$$H^p(\mathbb{D}_-) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_-) : f(\infty) = 0, \ \|f\|^p_{H^p(\mathbb{D}_-)} = \sup_{r>1} \int_{\mathbb{T}} |f(rz)|^p \, dm(z) < +\infty\},$$

$$H^p(\mathbb{C}_\pm) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}_\pm) : \|f\|^p_{H^p(\mathbb{C}_\pm)} = \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dm(x) < +\infty\}.$$

Здесь $p \in [1, +\infty)$; $H^\infty(\mathbb{O}_\pm)$ есть, по определению, множество всех ограниченных функций класса $\mathcal{O}(\mathbb{O}_\pm)$. Наделив множество $H^2(\mathbb{O}_\pm)$ нормой $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{O}_\pm)}$, мы превратим его в гильбертово пространство. Любая функция $f \in H^2(\mathbb{O}_+)$ при m–п. в. $\zeta \in X$ имеет граничное значение $f^*(\zeta)$:

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \uparrow 1} f(r\zeta), \quad \text{если} \quad X = \mathbb{T}, \quad f^*(\zeta) = \lim_{y \downarrow 0} f(\zeta + iy), \quad \text{если } X = \mathbb{R}.$$

Отображение $f \mapsto f^*$ есть изометрический изоморфизм гильбертова пространства $H^2(\mathbb{O}_+)$ на $H^2(X)$. Точно так же можно определить изоморфизм гильбертовых пространств $H^2(\mathbb{O}_-)$ и $H_-^2(X)$.

Отождествляя функции $f \in H^2(\mathbb{O}_\pm)$ и $f^* \in H_\pm^2(X)$, мы можем записать проекторы Риса $P_\pm$ как интегралы типа Коши. А именно, если $g \in L^2(X)$, то функциям $P_+(g)$ и $P_-(g)$ (принадлежащим соответственно $H_+^2(X)$ и $H_-^2(X)$) отвечают аналитические функции

$$C_\pm(g)(\zeta) := \pm \frac{1}{2\pi i} \int_X g(x)(x-\zeta)^{-1} \, dx, \qquad \zeta \in \mathbb{O}_\pm,$$

где dx обозначает дифференциал комплексной переменной x (так что $dx = 2\pi i x \, dm$, если $x = \mathbb{T}$, и $dx = dm$, если $X = \mathbb{R}$). Формулы Сохоцкого – Привалова для функций $(C_\pm(g))^*$ позволяют записать проекторы $P_\pm$:

$$P_\pm(g)(x_0) = \frac{1}{2} g(x_0) \pm \frac{1}{2\pi i} \, \text{v.p.} \int g(x)(x - x_0)^{-1} \, dx \tag{9}$$

при m–п. в. $x_0 \in X$.

В. Каждая функция $\lambda \in L^\infty(X)(=L^\infty(X, m))$ порождает оператор Теплица $T_\lambda : H^2_+(X) \to H^2_+(X)$ и оператор Ганкеля $\mathcal{H}_\lambda : H^2_+(X) \to H^2_-(X)$ с символом λ:

$$T_\lambda(f) = P_+(\lambda f), \quad \mathcal{H}_\lambda(f) = P_-(\lambda f), \quad f \in H^2_+(X).$$

С помощью формул (9) можно представить T_λ и $\mathcal{H}_\lambda$ как сингулярные интегральные операторы.

1.4. *Весовой вариант задачи восстановления по неполным данным.*

А. Пусть Δ — неотрицательная функция, заданная на X („вес")*. Введем в $L^2(X)$ отношение эквивалентности $f_1 \overset{\Delta}{\sim} f_2$, означающее, по определению, что

$$\int_X \frac{|f_1 - f_2|^2}{\Delta^2}\, dm < +\infty.$$

Класс эквивалентности, который содержит функцию $\psi \in L^2(X)$, будем обозначать через $\dot\psi$ (не упоминая вес Δ) и называть Δ–ростком функции ψ.

Если $\Delta = \chi_{S'}$, где $S \subset X$, то принадлежность функции $f \in L^2(X)$ ростку $\dot\psi$ означает то же, что равенство (1). Другой важный частный случай отвечает весу Δ, непрерывному и положительному на $X \setminus \{a\}$, где $a \in X$ (в случае $X = \mathbb{R}$ можно положить $a = \infty$ или $a = +\infty$), причем $\lim_a \Delta = 0$. Тогда включение $f \in \dot\psi$ выражает определенную близость функций f и ψ („взаимное касание") в точке a.

Допустим, что мы располагаем следующей информацией о функции $f \in L^2(X)$:

$$\text{a)}\ \ f \in \dot\psi; \qquad \text{b)}\ \ \hat f = \theta\chi_\Sigma, \tag{10}$$

где θ и ψ — „известные" элементы пространства $L^2(X)$ и $L^2(\Xi)$ (соответственно), $\Sigma \subset \Xi$. Достаточны ли эти данные (Δ-росток функции f и след $\hat f$ на множестве Σ) для того, чтобы восстановить функцию? Если ответ утвердителен, то как это сделать фактически?

Как и в п. 1.1, ограничимся следующим частным случаем: $\Sigma = \{\xi \in \Xi : \xi < 0\}$. Первый из поставленных выше вопросов равносилен вопросу о справедливости следующей теоремы единственности:

$$f \in H^2(X), \quad \int_X (|f|\Delta^{-1})^2\, dm < +\infty \Rightarrow f = 0. \tag{11}$$

Если вес Δ имеет это свойство, то любая функция $f \in H^2(X)$ полностью определяется своим Δ-ростком, и тогда естественно обратиться ко второму вопросу.

Б. Для ответа на первый вопрос нам понадобится пуассонова мера Π на X: $\Pi = m$, если $X = \mathbb{T}$; $\Pi = (\pi(1 + x^2))^{-1} m$, если $X = \mathbb{R}$ (так что

* Соглашение об измеримости множеств и функций, принятое в начале статьи, остается в силе и для пространства X.

$$\Pi(A) = \pi^{-1}\int_A (1+x^2)^{-1}\,dx, \quad A \subset \mathbb{R}).$$

За свойство (11) отвечает интеграл

$$\mathfrak{L}_-(\Delta) := \int_X \log\Delta_1\,d\Pi,$$

где $\Delta_1 := \min(\Delta, 1)$. А именно,

$$(11) \Leftrightarrow \mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty. \tag{12}$$

(Если

$$\mathfrak{L}_+(\Delta) = \int_X \log^+\Delta\; d\Pi < +\infty,$$

то условие $\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty$ равносильно конечности интеграла

$$\mathfrak{L}(\Delta) = \int_X \log\Delta\; d\Pi;$$

именно так обстоит дело, если при некотором $p > 0$ $\Delta\in L^p(m)$ или хотя бы $\Delta\in L^p(\Pi)$.)

B. Доказательство утверждения (12) (части $\Leftarrow$) опирается на следующий факт [10, 13, 17]:

$$f\in H^1(X)\cup H^2(X), \quad \mathfrak{L}(|f|) = -\infty \Rightarrow f = 0. \tag{13}$$

Из (13) немедленно следует, что *если* $f\in H^1(X)\cup H^2(X)$, $\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty$, *и при некотором* $p > 0$

$$\int_X \left(\frac{|f|}{\Delta}\right)^p dm < +\infty, \tag{14}$$

то $f = 0$. Докажем это. Если $m(\{\Delta = 0\}) > 0$, то согласно (14) $m(\{f = 0\}) > 0$, а тогда в силу (13) $f = 0$. Поэтому можно считать, что $\Delta(x) > 0$ $(x\in X)$, и

$$\log|f| = \frac{1}{p}\log\left(\frac{|f|}{\Delta_1}\right)^p + \log\Delta_1,$$

так что

$$\mathfrak{L}(|f|) = \frac{1}{p}\mathfrak{L}\left(\left(\frac{|f|}{\Delta_1}\right)^p\right) + \mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty,$$

поскольку $\log y \le y \quad (y>0)$, и $\mathfrak{L}((|f|/\Delta_1)^p) < +\infty$ в силу (14).

Положив в этом утверждении $p = 2$, получим (12) в части $\Leftarrow$. К противоположной импликации мы вернемся после некоторой технической подготовки, которой посвящен следующий пункт.

1.5. *Внешние функции.* A. Символом $\mathrm{Log}\,(=\mathrm{Log}(X))$ будем обозначать множество всех функций h, неотрицательных на X и таких, что интеграл $\mathfrak{L}(h)$ конечен. В этом пункте мы определим отображение $\mathrm{Ext}:\mathrm{Log}\to O(\mathbb{O}_+)$, имеющее следующее свойство:

$$|(\operatorname{Ext} h)^*| = h \quad m\text{-п. в.} \quad \text{на} \quad X, \tag{15}$$

какова бы ни была функция $h \in \operatorname{Log}$. Для этого нам понадобится ядро Пуассона $\mathcal{P}_p(x)\colon X \to [0, +\infty)$ с полюсом $p \in \mathbb{O}_+$:

$$\mathcal{P}_p(x) := \frac{1 - |p|^2}{|p - x|^2} \quad (X = \mathbb{T}), \qquad \mathcal{P}_p(x) := \frac{\operatorname{Im} p}{\pi |p - x|^2} \quad (X = \mathbb{R}),$$

где $x \in X$. Если $\lambda \in L^1(\Pi)$, то функция $\mathcal{P}(\lambda)\colon p \mapsto \int_X \mathcal{P}_p(\lambda)\, dm$ гармонична в $\mathbb{O}_+$, и $(\mathcal{P}(\lambda))^* = \lambda$ m-п. в.

Б. Если $h \in \operatorname{Log}$, то любая функция $\varphi \in O(\mathbb{O}_+)$, для которой $\operatorname{Re} \varphi = \mathcal{P}(\log h)$, удовлетворяет краевому условию $|\exp \varphi|^* = h$. Отметим в $\mathbb{O}_+$ точку c_X, полагая $c_{\mathbb{T}} = 0$, $c_{\mathbb{R}} = i$, и потребуем, чтобы $\operatorname{Im} \varphi(c_X) = 0$. Соответствие $h \mapsto \varphi$ и есть, по определению, отображение $\operatorname{Ext} h$. Функцию $\operatorname{Ext} h$ называют внешней (соответствующей функции h). Эта классическая конструкция будет главным ингредиентом формул пп. 2 – 3. Поэтому мы разберем ее здесь подробнее, чем это требуется для доказательства утверждения (12).

Выпишем явные формулы (считая, что $p \in \mathbb{O}_+$):

$$\operatorname{Ext} h(p) = \exp \int_{\mathbb{T}} \log h(x) \frac{x + p}{x - p}\, dm(x), \quad X = \mathbb{T}, \quad p \in D,$$

$$\operatorname{Ext} h(p) = \exp \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}} \log h(x) \frac{1 + xp}{x - p}\, d\Pi(x) =$$

$$= \exp \left[\frac{1}{\pi i} \int_R \log h(x) \left[\frac{1}{x - p} - \frac{x}{1 + x^2} \right] dx \right], \quad X = \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{C}_+.$$

Если $X = \mathbb{R}$, а $\log h \in L^1(dm/(1 + |x|))$, то последнюю формулу можно записать так:

$$\operatorname{Ext} h(p) = \theta \exp \left[\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \log h(x) \frac{dx}{x - p} \right],$$

где

$$|\theta| = 1 \quad \left(\theta = -i \int_{\mathbb{R}} x \log h(x)\, d\Pi(x)\right).$$

В. Из неравенства Иенсена (для среднего арифметического и среднего геометрического) легко вывести, что если $h \in L^r(m) \cap \operatorname{Log}$, то $\operatorname{Ext} h \in H^r(\mathbb{O}_+)$, $r = 1, 2$.

Г. В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство: *если интеграл* $\mathfrak{L}(h)$ *существует и конечен, то*

$$|(\operatorname{Ext} h)(p)| \le \exp[\mathfrak{L}_+(h) K_1(p)] \exp[\mathfrak{L}_-(h) K_2(p)],$$

где $p \in \mathbb{O}_+$, $K_1(p)$ и $K_2(p)$ *— положительные числа, зависящие только от* p.

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\log |(\operatorname{Ext} h)(p)| = \mathcal{P}(\log h)(p) = \mathcal{P}((\log h)^+)(p) - \mathcal{P}((\log h)^-)(p).$$

Кроме того,

$$\mathcal{P}_p(x)\,dm(x) = K(p,x)\,d\Pi(x),$$

причем

$$K_1(p) := \sup_{x\in X} K(p,x) < +\infty, \quad K_2(p) := \inf_{x\in X} K(p,x) > 0.$$

Действительно, при $x \in \mathbb{T}$

$$\frac{1-|p|}{1+|p|} \le K(p,x) = \frac{1-|p|^2}{|p-x|^2} \le \frac{1+|p|}{1-|p|}, \quad x\in\mathbb{T},$$

если же $X = \mathbb{R}$, то $K(p,x) = \pi(1+x^2)\operatorname{Im} p/(|x-p|^2)$; конечность и положительность величин $K_1(p)$ и $K_2(p)$ очевидны. Остается заметить, что

$$\mathcal{P}((\log h)^+)(p) \le K_1(p)\mathfrak{L}_+(h), \quad \mathcal{P}((\log h)^-)(p) \ge K_2(p)(-\mathfrak{L}_-(h)).$$

Из полученной нами оценки следует, что любое семейство внешних функций $(\operatorname{Ext} h)$ равномерно ограничено на любом компактном подмножестве множества $\mathbb{O}_+$, если $\sup_h \mathfrak{L}^+(h) < +\infty$ (легко видеть, что $\sup\{K_1(p) : p\in F\} < +\infty$ для любого ограниченного множества $F \subset \mathbb{O}_+$). Поэтому $\lim_{s\to\infty} \operatorname{Ext} h_s = 0$ *равномерно на каждом компактном* $F \subset \mathbb{O}_+$, *если*

$$\text{а) } \sup_s \mathfrak{L}^+(h_s) < +\infty \quad \textit{и} \quad \text{б) } \lim_{s\to\infty} \mathfrak{L}^-(h_s) = -\infty.$$

Условие а) выполнено, если функции h_s равномерно ограничены на X или если $\sup_s \int_X h_s^2\,d\Pi < +\infty$. В самом деле, полагая $A := \{h > 1\}$, согласно неравенству Иенсена для средних имеем

$$\exp \mathfrak{L}_+(h) = \exp\int_A \log h\,d\Pi = \left(\exp\frac{1}{\Pi(A)}\int_A \log h^2\,d\Pi\right)^{\frac{\Pi(A)}{2}} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\Pi(A)}\int_A h^2\,d\Pi\right)^{\frac{\Pi(A)}{2}} \le \frac{1}{\Pi(A)^{\Pi(A)}}\left(\int_X h^2\,d\Pi\right)^{\frac{\Pi(A)}{2}}.$$

Д. Иногда мы будем рассматривать отображение $\operatorname{ext}: h \mapsto (\operatorname{Ext} h)^*$ (его значения находятся в множестве всех комплекснозначных функций, измеримых по Лебегу на X). Это отображение можно определить, оставаясь в X и не переходя в $\mathbb{O}$:

если $X = \mathbb{T}$, то при m-п. в. $X \in \mathbb{T}$

$$(\operatorname{ext} h)(x) = h(x)\exp\left(\text{v. p.}\int_{\mathbb{T}} \log h(z)\frac{z+x}{z-x}\,dm(z)\right) =$$

$$= h(x)\exp\left(i\ \text{v. p.}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log h(e^{i\tau})\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,d\tau\right), \quad x = e^{it};$$

если $X \in \mathbb{R}$, то при m-п. в. $x \in \mathbb{R}$

$$(\operatorname{ext} h)(x) = h(x)\exp\left[\frac{1}{\pi i}\ \text{v. p.}\int_{\mathbb{R}} \log h(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{z}{1+z^2}\right]dz\right]. \tag{16}$$

Функцию $\operatorname{ext} h$ мы, по-прежнему, будем называть „внешней". Если $h \in H^r \cap \mathrm{Log}$, то $\operatorname{ext} h \in H^r(X)$, $r = 1, 2$.

Е. Правые части формул для $\operatorname{Ext} h$, выписанные в п. Б, имеют смысл не только при $p \in \mathbb{O}_+$, но и при $p \in \mathbb{O}_-$. Иногда удобно рассматривать $\operatorname{Ext} h$ как функцию, аналитическую в открытом (несвязном) множестве $\mathbb{O}_+ \cup \mathbb{O}_- = \mathbb{C}\setminus X$. Прямая проверка показывает, что $\operatorname{Ext} h$ имеет следующее свойство симметрии:

$$\operatorname{Ext} h(p) = 1/\overline{\operatorname{Ext} h(p^0)}, \quad p \in \mathbb{O}_+, \tag{17}$$

где p^0 — точка, симметричная p относительно X:

$$p^0 := 1/\overline{p}\ (X = \mathbb{T}); \quad p^0 := \overline{p}\ (X = \mathbb{R}).$$

Перейдя к пределу в (17) (при стремлении точки $p \in \mathbb{O}_+$ к $x \in X$ вдоль нормали к X), получим

$$(\operatorname{Ext}_+^* h)(x) = 1/\overline{(\operatorname{Ext}_-^* h)}(x) \quad \text{при} \quad m\text{-п. в.} \quad x \in X \tag{18}$$

($f_\pm^*(x)$ обозначает предел функции f вдоль нормали к X в точке x при стремлении из $\mathbb{O}_\pm$).

Если $h \equiv 1$ на множестве $E \subset X$, то m-п. в. на E $|\operatorname{Ext}_+^* h| = 1$, и в следствие (18)

$$\operatorname{Ext}_+^* h = \operatorname{Ext}_-^* h \quad m\text{-п. в. на} \quad E.$$

Если E открыто в X, то этот результат означает, что $\operatorname{Ext} h\,|\,\mathbb{O}_-$ есть аналитическое продолжение функции $\operatorname{Ext} h\,|\,\mathbb{O}_+$ через E.

Пусть $T \in O(\mathbb{C}\setminus X)$, причем $T\,|\,\mathbb{O}_\pm \in H^2(\mathbb{O}_\pm)$. Если h ограничена и отделена от нуля, то в следствие (17) функция $\operatorname{Ext} h$ ограничена в $\mathbb{C}\setminus X$, и потому

$$S := \operatorname{Ext} h\, T\,|\,\mathbb{O}_\pm \in H_\pm^2(\mathbb{O})$$

(заметим, что при $X = \mathbb{T}$ $\lim_\infty S = 0$).

Предположим, что T представима в $\mathbb{C}\setminus X$ интегралом типа Коши, взятым по $X\setminus E$:

$$T(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{X\setminus E} \frac{t(x)\,dx}{x-p}, \quad p \in \mathbb{C}\setminus X, \quad t \in L^2(X).$$

Если при этом $h \equiv 1$ на E, то и функция S представима таким же интегралом. Действительно,

$$S(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{s(x)\,dx}{x-p}, \quad p \in \mathbb{C}\setminus X, \tag{19}$$

где s — „скачок" функции S при переходе из $\mathbb{O}_+$ в $\mathbb{O}_-$ через X: $s(x) = S_+^*(x) - S_-^*(x)$, $s \in L^2(X)$. Но если $h \equiv 1$ на E, то этот скачок равен нулю m-п. в. на E, и интеграл (19) фактически берется по $X\setminus E$. В частности, если E открыто в X, то S аналитически продолжима из $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ в область $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \cup E$.

Ж. Для дальнейшего особый интерес представляет внешняя функция, отвечающая функции h, тождественно равной единице на некотором множестве $G \subset X$ и весьма малой на $G' = X \setminus G$. В таком случае $\operatorname{ext} h \mid G$ унимодулярна и сильно колеблется. Типичный пример таков: $X = \mathbb{R}$, $G = (-c, c)$, $h \equiv 1$ на G, $h \equiv \varepsilon$ на G'; тогда

$$\operatorname{ext} h(x) = \exp\left[\frac{1}{\pi i} \log\varepsilon \log\frac{c+x}{c-x}\right], \qquad x \in (-c, c),$$

и $\operatorname{ext} h(x)$ при малых x почти совпадает с гармоникой $\exp\left[\frac{2}{\pi} i \mid \log \varepsilon \mid \frac{x}{c}\right]$, частота колебаний которой весьма велика при малых $\varepsilon > 0$. Именно на этом эффекте и основаны формулы карлемановского типа, о которых говорилось в п. 1.1, и о которых пойдет речь ниже.

1.6. *Утверждение* (12): *конец доказательства. Аппроксимационный эквивалент задачи восстановления.* А. Докажем, что если $\mathfrak{L}_-(\Delta) > -\infty$, то (12) не выполняется. Для этого положим $f = \operatorname{ext} \Delta_1 q$, где $q \equiv 1$, если $X = \mathbb{T}$, $q(x) := (x-i)^{-1}$, если $X = \mathbb{R}$. Легко видеть, что $f \in H^2(X)$, $f \neq 0$, причем

$$\int_X (|f| / \Delta)^2 \, dm = \int_X (\Delta_1 / \Delta)^2 |q| \, dm \leq \int_X |q|^2 dm < +\infty.$$

Утверждение (12) доказано полностью.

Б. Предположим, что $\Delta \in L'(m)$, так что любая гармоника $\zeta^\xi (\xi \in \Xi)$ принадлежит $L^2(\Delta)(:= L^2(\Delta m, X))$. Обозначим символом $\operatorname{Harm}_+ (\operatorname{Harm}_-)$ линейную оболочку всех гармоник ζ^ξ с положительным (соответственно неположительным) показателем ξ.

Для каких (суммируемых) весов Δ *множество* Harm_+ *плотно в* $L^2(\Delta)$? Этот вопрос равносилен вопросу о справедливости утверждения (12): ответ на него утвердителен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty$ (или, что то же, $\mathfrak{L}(\Delta) = -\infty$, поскольку $\Delta \in L^1(m)$).

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *множество* Harm_+ *плотно в* $L^2(\Delta)$;

2) $\mathfrak{L}(\Delta) = -\infty$.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{L}(\Delta) = -\infty$. Пусть функция $g \in L^2(\Delta)$ ортогональна (в $L^2(\Delta)$) множеству Harm_+, т. е.

$$\int_X \bar{g} \zeta^\xi \Delta \, dm = 0 \quad \text{при любом} \quad \xi > 0. \tag{20}$$

Тогда $f := \bar{g}\Delta \in H^1(X)$ (заметим, что $f \in L^1(m)$, так как

$$\int_X |f| dm \leq \| g \|_{L^2(\Delta)} \| \Delta \|_{L^1(m)} < +\infty;$$

(20) означает, что $\hat{f}(\xi) = 0$ при $\xi < 0$). В то же время

$$\int_X |f|^2 \Delta^{-1} dm = \int_X |g|^2 \Delta \, dm < +\infty,$$

и $f = 0$ m-п. в., согласно п. 1.3 В. Значит, $g = 0$ как элемент пространства $L^2(\Delta)$ и 2) $\Rightarrow$ 1).

Допустим, что $\mathfrak{L}(\Delta) > -\infty$. Положим $h = \sqrt{\Delta}\,|q|$ (множитель q определен в п. 1.4). Очевидно, $\mathfrak{L}(h) > -\infty$, так что имеет смысл функция $\operatorname{ext} h$. Она принадлежит $H^1(X)$, поскольку

$$\int_X \sqrt{\Delta}\,|q|\,dm \le \|\Delta\|^{1/2}_{L^1(m)} \|q\|_{L^2(m)} < +\infty.$$

Функция $F := \overline{\operatorname{ext} h}\,\Delta^{-1}$ принадлежит $L^2(\Delta)$, так как

$$\int_X |F|^2\,\Delta\,dm = \int_X |\operatorname{ext} h|^2\,\Delta^{-1}\,dm = \int_X |q|^2 dm < +\infty.$$

В то же время она ортогональна множеству Harm_+, поскольку

$$\int_X \overline{Q}\,\Delta\,\zeta^{\xi}\,dm = \int_X \operatorname{ext} h\,\zeta^{\xi}\,dm = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad \xi > 0,$$

ибо $\operatorname{ext} h \in H^1$. Итак, мы построили ненулевой элемент пространства $L^2(\Delta)$, ортогональный множеству Harm_+, которое, тем самым, не может быть плотно в $L^2(\Delta)$.

1.7. *Об одном вопросе Маккина.* А. Итак, расходимость интеграла $\mathfrak{L}(\Delta)$ обеспечивает плотность множества Harm_+ в $L^2(\Delta)$. Изложенное в п. 1.5 доказательство этого факта основано на теореме (13) и на рассуждении от противного; мы не получили, таким образом, никакого практического рецепта аппроксимации суммами $\sum_{\xi\in A} C_\xi \zeta^{\xi}$, где $A \subset \Xi$ — конечное множество положительных чисел. (Аналогичный упрек в неэффективности можно адресовать и теореме (11), которая гарантирует, но не осуществляет возможность восстановить функцию по ее Δ-ростку.)

Б. В статье [18] поставлена следующая задача: „Пусть Δ — суммируемая неотрицательная функция на прямой, и пусть $\int_{\mathbb{R}} \log\Delta(x)(1+x^2)^{-1}\,dx = -\infty$. Тогда экспоненты e^{ixt}, $t \le 0$, порождают $L^2(\mathbb{R}, \Delta\,dx)$, но как *эффективно* приблизить e^{ixt} при фиксированном $T > 0$ их линейными комбинациями?"

В п. 3 мы предложим некоторую эффективную процедуру приближения, отвечающую на этот вопрос. Но сначала покажем, что некоторый (вполне эффективный) ответ легко следует из доказательства теоремы 5Б, данного Сеге еще в 1921 г. (для случая $X = \mathbb{T}$).

В. Напомним доказательство Сеге. Пусть w — суммируемый вес, заданный на $\mathbb{T}$, причем $\mathfrak{L}(w) = -\infty$. Положим $h = \sqrt{w}$, $h_\varepsilon := h + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, $\mathfrak{L}(h_\varepsilon) > -\infty$, так что функция $Q_\varepsilon := \operatorname{Ext} h_\varepsilon$ имеет смысл. Далее,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} |Q_\varepsilon(0)| = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \exp\int_{\mathbb{T}} \log h_\varepsilon\,dm = 0. \tag{21}$$

В самом деле, h_ε убывает вместе с ε при любом $x \in \mathbb{T}$, а $\int \log h_\varepsilon\,dm \le \int h_\varepsilon\,dm < +\infty$; поэтому (21) следует из теоремы Леви и из равенства $\mathfrak{L}(h) = -\infty$. Положим $f_\varepsilon := Q(0)/Q_\varepsilon = 1 - R_\varepsilon$. Очевидно,

$$\| f \|^2_{L^2(w)} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|Q_\varepsilon(0)|^2}{h_\varepsilon^2} w\, dm \le \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|Q_\varepsilon(0)|^2}{h_\varepsilon^2} w\, dm = |Q_\varepsilon(0)|^2, \tag{22}$$

так что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} R_\varepsilon = 1$ (в $L^2(w)$). Функция $R_\varepsilon \in O(\mathbb{D})$ ограничена в $\mathbb{D}$, поскольку $|Q_\varepsilon(0)| = \exp \mathcal{P}(\log h_\varepsilon) \ge \exp \log \varepsilon = \varepsilon$, и $|R_\varepsilon(z)| \le 1 + |Q_\varepsilon(0)| \varepsilon^{-1}$ при $|z| < 1$. Ряд Тейлора функции R_ε (с центром в начале координат) не содержит свободного члена. Поэтому для любого $\delta > 0$ существует такой многочлен $\gamma_{\varepsilon,\delta}\colon z \mapsto \sum_{k=1}^N c_k z^k$ (без свободного члена), что

$$\| R_\varepsilon - \gamma_{\varepsilon,\delta} \|_{L^2(w)} < \delta/2. \tag{23}$$

(В роли $\gamma_{\varepsilon,\delta}$ может выступать фейеровская сумма ряда $\sum_{k=1}^\infty (R_\varepsilon^{(k)}(0)/k!)\, z^k$ или частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^\infty (R_\varepsilon^{(k)}(0)/k!)\, (rz)^k$, где число r принадлежит $(0, 1)$ и достаточно близко к единице; и те, и другие суммы близки к $R_\varepsilon | \mathbb{T}$ по мере m, оставаясь равномерно ограниченными.) Значит,

$$\| 1 - \gamma \|_{L^2(w)} \le \| f_\varepsilon \| + \| R_\varepsilon - \gamma \|_{L^2(w)}, \quad \gamma = \gamma_{\varepsilon,\delta}.$$

Выбрав достаточно малое число ε, получим $\| f_\varepsilon \|_{L^2(w)} < \delta/2$ (см.(21) и (22)), а затем при фиксированном ε найдем многочлен $\gamma_{\varepsilon,\delta}$, удовлетворяющий неравенству (23). Мы осуществили, таким образом, конструкцию тригонометрической суммы $S_\delta (= \gamma | \mathbb{T}) = \sum_{k=1}^N c_k \zeta^k$, которая содержит гармоники лишь со строго положительными частотами и δ-близка к единице: $\| 1 - S_\delta \|_{L^2(w)} < \delta$.

Г. Обозначим через Harm_n линейную оболочку гармоник $\zeta^n, \zeta^{n+1}, \ldots$ (так что $\mathrm{Harm}_1 = \mathrm{Harm}_+$). Из конструкции, описанной в п. В, легко следует, что

$$\zeta^n \in \mathrm{Clos}\,\mathrm{Harm}_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

(имеется в виду замыкание в $L^2(w)$). Точнее,

$$\zeta^n S_\delta \in \mathrm{Harm}_{n+1}, \quad \| \zeta^n - \zeta^n S_\delta \|_{L^2(w)} = \| 1 - S_\delta \|_{L^2(w)} < \delta.$$

Из (24) следует

$$\mathrm{Harm}_1 \subset \mathrm{Clos}\,\mathrm{Harm}_2 \subset \mathrm{Clos}\,\mathrm{Harm}_3 \subset \ldots,$$

так что $1 \in \mathrm{Clos}\,\mathrm{Harm}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем сумма $\sigma_{n+1} \in \mathrm{Harm}_{n+1}$, близкая к единице в $L^2(w)$, и может быть явно получена. Значит, любую „отрицательную" гармонику ζ^{-n} с $n \ge 0$ можно сколь угодно точно (и конструктивно) приблизить в $L^2(w)$ суммами из Harm_+. Действительно, функция $\tau := \zeta^{-n} \sigma_{n+1}$ принадлежит Harm_+, и $\| \zeta^{-n} - \tau \|_{L^2(w)} = \| 1 - \sigma_{n+1} \|_{L^2(w)}$.

Д. Теперь мы располагаем некоторым методом, позволяющим аппроксимировать (в $L^2(w)$) любую функцию $f \in L^\infty(m)$ элементами множества Harm_+. В самом деле, $f = \lim\limits_{j \to \infty} f_j$ m-п. в. на $\mathbb{T}$, где f_j — j-я фейеровская сумма функции f; как известно, $\|f_j\|_\infty \le \|f\|_\infty$, так что $\lim\limits_{j \to \infty} \| f_j - f \|_{L^2(w)} = 0$, а каждую сумму

f_j можно со сколь угодно малой ошибкой заменить (в $L^2(w)$) суммой из Harm_+.

E. Вернемся к вопросу Маккина (см. п. А) и рассмотрим функцию $\Delta \in L^1(\mathbb{R}, m)$, неотрицательную и удовлетворяющую условию $\mathfrak{L}(\Delta) = -\infty$. Пересадим ее на $\mathbb{T}$ с помощью дробно-линейного отображения $\omega : x \mapsto (x - i)/(x + i)$, $x \in \mathbb{R}$; мы получим вес w, заданный на $\mathbb{T}$ и связанный с ω формулой $(1 + x^2)\Delta(x) \equiv w(\omega)$. Из равенства

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi\, dm = \pi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \Phi(1 + x^2)^{-1}\, dx, \tag{25}$$

справедливого для любой неотрицательной функции Φ, заданной на $\mathbb{T}$, следует, что

$$\int_{\mathbb{T}} w\, dm = \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)\Delta\, d\Pi = \pi^{-1} \int \Delta\, dm < +\infty,$$

$$\int_{\mathbb{T}} \log w\, dm = \mathfrak{L}(\Delta(1 + x^2)) = -\infty,$$

так что к w можно применить результат, полученный в п. Д. Пусть $F \in L^\infty(\mathbb{R})$ (например, $F(x) \equiv e^{ixT}$, $T < 0$). Определим функцию $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ равенством $f(\omega) = F$; согласно п. Д существует (и может быть явно построена) сумма $\sum_{n=1}^N a_n \zeta^n \in \mathrm{Harm}_+$, близкая к f в $L^2(w)$. Но согласно (22)

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N} a_n \zeta^n \right\|^2_{L^2(w)} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(x) - S(x)|^2 \Delta(x)\, dx, \tag{26}$$

где $S(x) = \sum_{n=1}^N a_n (\omega(x))^n = A + \sum_{j=1}^N b_j / (x + i)^j$. Далее,

$$\frac{1}{(x + i)^j} = \frac{-i}{(j - 1)!} \int_0^{+\infty} u^{j-1} e^{-u} e^{ixu}\, du, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Если α — достаточно большое положительное число, то функция

$$x \mapsto \int_0^\alpha u^{j-1} e^{-u} e^{ixu}\, du$$

равномерно близка к $(x + i)^{-j}$ всюду в $\mathbb{R}$, а ее производная ограничена в $\mathbb{R}$. Заменяя последний интеграл римановой суммой, отвечающей достаточно мелкому дроблению сегмента $[0, \alpha]$, получаем линейную комбинацию гармоник $1, e^{ixu_k}$ с положительными частотами u_k, равномерно (а потому и в $L^2(\Delta)$) близкую к S и, в конечном счете, к F.

Описанная выше процедура пересадки с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{T}$ использовалась (с той же целью) в работах [1, 6, 7]. Несмотря на громоздкость, она эффективна: каждый ее шаг можно вычислить с помощью компьютера.

2. Вычисление функции класса Харди, содержащейся в данном Δ-ростке. Предположим, что

$$\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty, \tag{27}$$

так что верна теорема (11) из предыдущего пункта. Если Δ-росток функции

$\dot{\psi} \in L^2(X)$ содержит функцию $f \in H^2(X)$*, то эта функция f единственна. В этом пункте мы выпишем формулу, которая „отфильтровывает" f из ростка $\dot{\psi}$. Приведем в начале простое свойство операторов Теплица, отмеченное Патилом [20, 14].

2.1. **Лемма Патила.** А. *Пусть $G \in L^\infty(X)$. Оператор Теплица T_G с символом G непрерывно отображает $L^2(X)$ в $H^2(X)$:*

$$T_G(f) := P_+(Gf), \quad \| T_G(f) \|_{L^2(X)} \le \| Gf \|_{L^2(X)} \le \| G \|_\infty \| f \|_{L^2(X)},$$

так что $\| T_G \| \le \| G \|_\infty$. Подчеркнем, что функция $T_G(f)$ может быть записана с помощью явной формулы (см. п. 1.3В).

Б. *Пусть $a \in \mathbb{O}_-$. Ядро Коши с полюсом a мы будем обозначать символом C_a:*

$$C_a(x) := \frac{1}{x-a}, \quad x \in X.$$

Если $G \in \overline{H^\infty(X)}$, то существует такая функция $g \in H^\infty(\mathbb{O}_-)$, что $g^* = G$ т-п. в. $(H^\infty(\mathbb{O}_-) := \{g \in O(\mathbb{O}_-) : \sup_{\mathbb{O}_-} |g| < +\infty\})$. Справедливо следующее равенство:

$$T_G(C_a)(x) = g(a)\frac{1}{x-a}, \quad a \in \mathbb{O}_-, \quad G \in \overline{H^\infty(X)}, \quad x \in X. \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F^a \in O(\mathbb{O}_+)$, заданную контурным интегралом (dx понимается как дифференциал комплексной переменной x, а контур X ориентирован в положительном направлении относительно $\mathbb{O}_+$):

$$F^a(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_X G(x)\frac{1}{x-a}\,\frac{1}{x-z}\,dx, \quad z \in \mathbb{O}_+. \tag{29}$$

Применив к этому интегралу и к области $\mathbb{O}_-$ теорему о вычетах, получим $F^a(z) = g(a)(z-a)^{-1}$. Но $T_G(C_a)(x) = (F^a)^*(x)$ при m-п. в. $x \in X$, и мы получаем (28).

В. Следующая формула относится к случаю $X = \mathbb{T}$. Пусть $G \in \overline{H^\infty(\mathbb{T})}$, $\hat{G}(k) = \int_{\mathbb{T}} Gx^{-k}\,dm$ — k-й коэффициент Фурье функции G (так что $\hat{G}(k) = 0$ при $k = 1, 2, \dots$). Тогда

$$T_G(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \hat{G}(k-n)\,x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{30}$$

В самом деле,

$$T_G(x^n) = P_+(x^n G) = P_+\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{G}(k-n)x^k\right) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \hat{G}(k-n)\,x^k = \sum_{0 \le k \le n} \hat{G}(k-n)\,x^k.$$

* Вопросу о том, когда (т. е. для каких ψ и Δ) такая f найдется, посвящена работа [19].

Г. Из формулы (29) непосредственно следует такая лемма.

Лемма Патила. *Пусть* $(G_s)_{s\in N}$ — *последовательность функций класса* $\overline{H^\infty(X)}$, g_s — *соответствующие функции класса* $H^\infty(\mathbb{O}_-)$ $(g_s^* = G_s$ *т.-п. в.*). *Если* а) $\sup_s \|G_s\|_\infty < +\infty$ *и* б) $\lim\limits_{s\to\infty} g_s(z) = 0$ *при любом* $z\in\mathbb{O}_-$, *то*

$$\lim_{s\to\infty} \|T_{G_s}(f)\|_{L^2(X)} = 0, \tag{31}$$

какова бы ни была функция $f\in L^2(X)$.

Доказательство. Нормы операторов T_{G_s} равномерно ограничены (см. п. А), а равенство (31) выполнено для любого ядра Коши $C_a\,(a\in\mathbb{O}_-)$ в силу формулы (28). Линейная оболочка семейства $(C_a)_{a\in\mathbb{O}_-}$ плотна в $H^2(X)$ (например, потому, что функция класса $H^2_-(X)$, ортогональная всем C_a, обязана быть нулевой), и мы получаем (31) для любой $f\in H^2(X)$. Если же $f\in H^2_-$, то $T_{G_s}(f) = 0$.

Д. Если $X = \mathbb{T}$, то доказательство леммы Патила легко следует из формулы (30). В самом деле, линейная оболочка семейства $(x^k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ плотна в $H^2(X)$; в то же время (31) для $f = x^k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, вытекает непосредственно из (30) (ибо $g_s(z) = \sum_{j=0}^\infty \hat{G}_s(-j)z^{-j}\,(|z|>1)$), так что $\hat{G}_s(-j)$ есть j-й коэффициент Лорана функции $g_s\in O(\mathbb{O}_-)$; из условий а) и б) следует, что $\lim\limits_{s\to\infty}\hat{G}_s(-j) = 0$, $j = 0, 1, \ldots$.

Е. Если функция f имеет некоторую дополнительную регулярность, то равенство (31) (при условиях а) и б)) можно усилить:

$$\lim_{s\to\infty} T_{G_s}(f) = 0 \quad \text{равномерно на} \quad X. \tag{32}$$

Мы ограничимся здесь случаем $X\in\mathbb{T}$. Предположим, что f представима формулой

$$f(x) = \int\limits_{|a|>1} \frac{d\lambda(a)}{x-a}, \quad x\in\mathbb{T}, \tag{33}$$

где λ — комплексная борелевская мера на $\mathbb{O}_-$ с конечным интегралом $\int_{|a|>1}\frac{d|\lambda|(a)}{|a|-1} =: j(\lambda)$ (в таком случае функция f определена всюду на $\mathbb{T}$ и непрерывна; чем быстрее убывает мера $|\lambda|$ при приближении к $\mathbb{T}$, тем „регулярнее" функция f). Согласно (28)

$$T_{G_s}(f)(x) = \int\limits_{|a|>1} T_{G_s}(C_a)(x)\,d\lambda(a) = \int\limits_{|a|>1}\frac{g_s(a)}{x-a}\,d\lambda(a)$$

и

$$|T_{G_s}(f)(x)| \le \int\limits_{|a|>1} |g_s(a)|\,(|a|-1)^{-1}\,d|\lambda|(a), \quad x\in\mathbb{T}.$$

Последний интеграл стремится к нулю с ростом s (по теореме Лебега о мажорированной сходимости).

В работах Е. М. Дынькина указан ряд эффективных критериев, связывающих гладкость функции f с убыванием меры $|\lambda|$ вблизи $\mathbb{T}$ (и, в частности, обеспечивающих конечность интеграла $j(\lambda)$).

Ж. Нам понадобится следующее простое замечание, дополняющее лемму Патила. Пусть $(R_s)_{s\in\mathbb{N}}$ — *последовательность функций класса* $L^\infty(X)$, *причем* $\sup_s \|k_s\| < +\infty$, *и* $\lim_{s\to\infty} k_s = k$ *по мере* m *на* X. *Если последовательность* (G_s) *удовлетворяет условиям* а) *и* б) *леммы Патила, то*

$$\lim_{s\to\infty} T_{G_s}(k_s f) = 0 \quad \text{в } L^2(X),$$

какова бы ни была функция $f\in L^2(X)$.

Доказательство следует из неравенства

$$\| T_{G_s}(k_s f)\|_{L^2(X)} \le \| T_{G_s}(k f)\|_{L^2(X)} + \| T_{G_s}((k_s - k)f)\|_{L^2(X)},$$

поскольку первое слагаемое справа стремится к нулю по лемме Патила, а второе — по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

З. Подлинная природа явления, описываемого леммой Патила, хорошо замаскирована в приведенном выше коротком доказательстве. Заметим, что функции $|G_s|$ при условиях а) и б) никоим образом не обязаны быть малыми на X; причину малости величин $\| T_{G_s}(f)\|$ следует искать в другом. Рассмотрим следующий пример.

Пусть $G_s = \operatorname{ext} h_s$, где $h_s = 1$ на множестве $E \subset X$ $(m(E) > 0)$, $h_s = 1/s$ на $E' := X\setminus E$. Легко видеть, что при больших s функция $G_s|E$, оставаясь унимодулярной, сильно колеблется (см. конец п. 1.5). Функцию $T_{G_s}(f)$ можно отождествить с аналитической функцией (класса $H^2(\mathbb{C}_+)$)

$$z \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{G_s(x) f(x)}{x - z}\,dx + \frac{1}{2\pi i}\int_{E'} \frac{G_s(x) f(x)}{x - z}\,dx.$$

Малость первого интеграла (по норме пространства $H^2(\mathbb{C}_+)$ и при больших s) обеспечивается малостью функции $|G_s|\,|E|$; малость второго интеграла есть следствие сильных колебаний функции G_s на E'.

2.2. *Веса, отделенные от нуля и близкие к данному весу.* А. Предполагая, что вес Δ удовлетворяет условию

$$\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty, \tag{34}$$

(см. п. 1.4 А), рассмотрим такую последовательность $(\Delta_s)_{s\in\mathbb{N}}$ весов, что

I. $\Delta_s \ge \Delta$.

II. $\Delta_s(x) \ge c_s > 0$ при m-п. в. $x\in X$.

III. $\mathfrak{L}_+(\Delta_s) < +\infty$.

IV. Последовательность функций $(\Delta/\Delta_s)_{s\in\mathbb{N}}$ сходится на X по мере m к некоторой функции k;

V. $\lim\limits_{s \to \infty} \mathfrak{L}(\Delta_s) = -\infty.$

Например, можно положить

$$\Delta_s := \max(\Delta, 1/s) \tag{35}$$

или

$$\Delta_s := \Delta + 1/s. \tag{36}$$

Условия I, II, IV (с $k \equiv 1$) выполнены очевидным образом; если $\mathfrak{L}_+(\Delta) < +\infty$, то выполнены и условия III, V (так будет, в частности, если вес суммируем по мере m или ограничен).

Б. Представляет интерес еще один способ конструкции весов Δ_s, применимый к весу Δ, не превышающему единицу.

Пусть s — натуральное число, $0 < c < 1/s$. Положим

$$\Delta_{s,c} := \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta(x) > 1/s; \\ \Delta(x), & \text{если } c \le \Delta(x) \le 1/s; \\ c, & \text{если } \Delta(x) < c. \end{cases}$$

При условии (34) для любого $s = 1, 2, \ldots$ можно найти такое положительное число c_s, что

$$\int\limits_X \log \Delta_{s, c_s} \, d\Pi < -s.$$

Положим $\Delta_s := \Delta_{s, c_s}$. Условия I – V, очевидно, выполнены ($k \equiv \Delta$). При таком определении множества $\{\Delta_s \equiv 1\}$ с ростом исчерпывают все множество $\{\Delta > 0\}$.

Если вес Δ ограничен, то при всех трех способах конструкции весов Δ_s выполнено следующее условие (более сильное, чем III):

VI. Веса Δ_s ограничены (на X) равномерно относительно s.

В. Условия II и III обеспечивают существование и конечность интеграла $\mathfrak{L}(\Delta_s)$. Поэтому можно положить

$$q_s := \operatorname{ext}(1/\sqrt{\Delta_s}), \qquad Q_s := \operatorname{Ext}(1/\sqrt{\Delta_s})$$

(см. п. 1. 5). Очевидно,

$$\text{а)} \quad 1/|q_s|^2 = \Delta_s; \quad \text{б)} \quad q_s \bar{q}_s = 1/\Delta_s \quad m\text{-п. в.} \tag{37}$$

Функция q_s ограничена ($|q_s| \le 1/\sqrt{c_s}$ m-п. в. согласно условию II), так что имеет смысл оператор Теплица T_{q_s}. Из (37а) следует, что при условии VI числа $\| 1/q_s \|_\infty$ равномерно ограничены.

2.3. *Выделение аналитического элемента из данного Δ-ростка*. А. Если Δ-росток функции $\psi \in L^2(X)$ содержит функцию $f \in H^2(X)$, то то же свойство имеет и Δ_1-росток функции ψ, где $\Delta_1 := \min(\Delta, 1)$. Если $\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty$, то и $\mathfrak{L}(\Delta_1) = -\infty$. Поэтому, не умаляя общности, будем считать, что $\Delta \le 1$ (в противном случае вес Δ можно заменить весом Δ_1).

Б. Сформулируем основной результат этого пункта. *Если* $\psi \in L^2(X)$, $f \in H^2(X)$, *причем* $f \in \dot{\psi}$ ($=\Delta$-*росток функции* ψ), *а веса* Δ_s *удовлетворяют условиям* I – VI, *то*

$$f = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{q_s} T_{q_s}(\psi) \quad \text{в} \quad L^2(X). \tag{38}$$

Доказательство. По условию $f = \psi + r$, где $\int_X |r|^2 \Delta^{-2}\, dm < +\infty$. Очевидно, $q_s f \in H^2(X)$ (ибо $q_s \in H^\infty(X)$), и

$$q_s f = P_+(q_s f) = P_+(q_s\psi) + P_+(q_s r),$$

$$f = \frac{1}{q_s} T_{q_s}(\psi) + R_s, \quad R_s := \frac{1}{q_s} T_{q_s}(r) = \frac{1}{q_s} T_{G_s}\left(k_s, \frac{r}{\Delta}\right),$$

где $k_s := \Delta/\Delta_s$, $G_s = 1/\bar{q}_s \in \overline{H^\infty(X)}$ (см. (37б)). Согласно VI, $\| 1/q_s \|_\infty \le c$ и

$$\| R_s \|_{L^2(X)} \le c \left\| T_{G_s}\left(k_s \frac{r}{\Delta}\right)\right\|_{L^2(X)}.$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю (при $s \to +\infty$) в силу замечания п. 2.1ж и свойства IV. Условие б) леммы Патила выполнено в силу свойства V последовательности (Δ_s) и неравенства, доказанного в п. 1.5Г: если $z \in \mathbb{C}_-$, а z^0 — точка, симметричная z относительно X, то

$$|q_s(z)| = |\operatorname{Ext}(\sqrt{\Delta_s})(z^0)| \le \exp[\mathfrak{L}_+(\sqrt{c})K_1(z^0)],$$

где $c = \sup_s \| \Delta_s \|_\infty$.

2.4. *Формула второго рода.* А. Положим $\rho_s := (q_s)^{-1} T_{q_s}(\Delta_s \psi)$. Если веса Δ_s удовлетворяют условиям I – VI, то

$$\lim_{s\to\infty} \rho_s = 0 \quad \text{в} \quad L^2(X),$$

какова бы ни была функция $\psi \in L^2(X)$. Действительно, функции $1/q_s$ равномерно ограничены (в $L^\infty(X)$), а $T_{q_s}(\Delta_s\psi) = T_{1/\bar{q}_s}(\psi)$, и вновь можно применить лемму Патила.

Б. Вычтем ρ_s под знаком предела в правой части формулы (38); получим

$$f = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{q_s} T_{q_s}((1-\Delta_s)\psi) \quad \text{в} \quad L^2(X). \tag{39}$$

Эту „формулу восстановления" будем называть формулой второго рода (в отличие от формулы первого рода (38)). Если веса построены по способу п. 2. 2Б, то формула второго рода имеет некоторые преимущества. Чтобы это увидеть, заметим, что $1-\Delta_s \equiv 0$ на множестве $\{x \in X : \Delta > 1/s\} =: E_s$. Функция, стоящая под знаком предела в формуле (39), совпадает (m-п. в.) с граничными значениями аналитической функции (класса $H^2(\mathbb{C}_+)$)

$$\Phi_s : p \mapsto \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_X \frac{(1-\Delta_s(x))\psi(x)\,dx}{x-p} \right) \frac{1}{Q_s(p)}, \quad p \in \mathbb{O}_+. \tag{40}$$

Интеграл типа Коши в (40) фактически берется по $X \setminus E_s$ (как функция комплексной переменной p он определен всюду в $\mathbb{C} \setminus X$ и совпадает в $\mathbb{O}_-$ с функцией класса $H^2(\mathbb{O}_-)$, так как $(1-\Delta_s)\psi \in L^2(X)$. Поскольку $1/Q_s = \operatorname{Ext}\sqrt{\Delta_s}$, а $\Delta_s \equiv 1$ на E_s, то можно воспользоваться заключительным замечанием из п. 1. 5Е и сделать следующий вывод:

$$\Phi_s(p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{X \setminus E_s} \frac{\varphi_s(x)\,dx}{x-p}, \tag{41}$$

где функция $\varphi_s(x)$ принадлежит $L^2(\mathbb{T} \setminus E_s)$ и может быть выражена явно через ψ и Δ_s.

Таким образом, формула второго рода доставляет эффективный способ приближения функции $f \in H^2(X)$ (по L^2-норме) потенциалами Коши, плотности которых сосредоточены на собственных подмножествах множества X.

Если $\Delta = \chi_{A'}$, где $A' \subset X$, и $A := X \setminus A' (m(A) > 0)$, то $E_s = A'$, $s = 2, 3, \ldots$, и все интегралы типа Коши в (41) берутся по фиксированному множеству A (в этом случае $\psi | A = f | A$). Если же вес Δ строго положителен на $X \setminus \{a\}$ и быстро стремится к нулю при приближении к a (или в случае $X = \mathbb{R}$ строго положителен всюду и быстро стремится к нулю в бесконечности), то $\cup E_s = X \setminus \{a\}$ (или X, если $X = \mathbb{R}$, $a = \infty$), и интеграл типа Коши в (41) берется по весьма „малому" множеству. Если множества E_s замкнуты, то функция Φ_s аналитически продолжима из $\mathbb{O}_+$ в $\mathbb{O}_-$ через $X \setminus E_s$.

В заключение заметим, что в формуле второго рода можно положить $\psi = f$ (ибо $f \in \dot{f}$); в таком случае она восстанавливает f „по неполным данным" (по следам $f | (X \setminus E_s)$).

3. Явная конструкция весовых приближений функциями класса Харди. Дадим конструктивное доказательство теоремы из п. 1. 6Б. Оно выглядит особенно просто в случае ограниченного веса Δ. В п. 3.3 будет выписана процедура явного решения задачи Маккина (отличная от той, что обсуждалась в п. 1.7). В п. 3.4 мы покажем, что поправка, превращающая „формулу восстановления" второго рода (см. п.2) в формулу весовой аппроксимации, весьма мала.

3.1. *Ганкелевы операторы, осуществляющие весовую аппроксимацию.*

А. Пусть вес Δ удовлетворяет условию

$$\mathfrak{L}_-(\Delta) = -\infty. \tag{42}$$

Кроме того, предположим, что

$$\Delta \in L^\infty(X). \tag{43}$$

Тогда $H^2_\pm(X) \subset L^2(X) \subset L^2(\Delta)$.

Рассмотрим последовательность весов (Δ_s), имеющую свойства I, II, V и VI из п. 2 (заметим, что свойства I и VI совместимы только при условии (43); с другой стороны, при условии (43) веса, построенные в п. 2.2 А и п. 2.2 Б, имеют свойства I–VI). Пусть q_s и Q_s — функции, отвечающие весу Δ_s согласно п. 2.2В.

Б. *Какова бы ни была функция* $f \in H^2(X)$,

$$f = \lim_{s \to \infty} \overline{q}_s \mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f) \quad \text{в} \quad L^2(\Delta) \tag{44}$$

($\mathcal{H}_\lambda$ *обозначает оператор Ганкеля с символом* λ, *см. п.* 1. 3В).

Доказательство. Очевидно, $f/\overline{q}_s \in L^2(X)$ (поскольку $1/\overline{q}_s \in L^\infty(X)$) и

$$f/\overline{q}_s = P_-(f/\overline{q}_s) + P_+(f/\overline{q}_s), \quad f = \overline{q}_s \mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f) + R_s,$$

где $R_s := \overline{q}_s T_{1/\overline{q}_s}(f)$, так что

$$\|R_s\|^2_{L^2(\Delta)} = \int\limits_X |q_s|^2 \Delta \left| T_{1/\overline{q}_s}(f) \right|^2 dm =$$

$$= \int\limits_X \frac{\Delta}{\Delta_s} \left| T_{1/\overline{q}_s}(f) \right|^2 dm \le \left\| T_{1/\overline{q}_s}(f) \right\|_{L^2(X,m)};$$

последнее выражение стремится к нулю по лемму Патила (см. п. 2. 1 Г, 2. 4 А).

В. Функция, стоящая под знаком предела в (44), принадлежит $H^2_-(X)$ (поскольку $\mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f) \in H^2_-(X)$, $\overline{q}_s \in \overline{H^\infty(X)}$). Ее можно сколь угодно точно приблизить* в $L^2(\Delta)$ линейной комбинацией гармоник ζ^ξ с отрицательными частотами ξ (см. ниже п. 3.3Б). Таким образом, (44) есть конструктивная реализация утверждения о плотности множеств $\overline{H^2_\pm(X)}$ (или Harm_+) в $L^2(\Delta)$ для весов, удовлетворяющих условию (42) и принадлежащих $L^\infty(X)$ (или $L^\infty(X) \cap$ $\cap L^1(X)$).

3.2. *Аппроксимация с неограниченным весом.* Рассмотрим случаи $X = \mathbb{T}$ и $X = \mathbb{R}$ отдельно.

А. Пусть $X = \mathbb{T}$. В этом случае мы ослабим условие (43), заменив его условием

$$\Delta \in L^1(\mathbb{T}, m) \tag{45}$$

(так что $L^2(\Delta) \supset L^\infty(\mathbb{T}) \supset H^\infty(\mathbb{T})$).

Нам потребуется последовательность весов (Δ_s), имеющая свойства I, II, III, V и VI′: $\sup\limits_s \|\Delta_s\|_{L^1(m)} < +\infty$. Веса, построенные в пп. 2.2 А и 2. 2 Б, имеют эти свойства. Функции q_s и Q_s будут здесь иметь тот же смысл, что и в п. 3. 1.

Если функция Φ *определена и голоморфна в круге* $r\mathbb{D}$, *где* $r > 1$, *а* $f = \Phi | \mathbb{T}$, *то формула* (44) *сохраняет силу при условиях* (42) *и* (45).

Доказательство. Функция $f/\overline{q}_s$ принадлежит $L^2(\mathbb{T})$, так как $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, а $1/|\overline{q}_s|^2 = \Delta_s \in L^1(m)$. Следовательно, как и в п. 3.1,

$$f = \overline{q}_s \mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f) + R_s.$$

В этом случае

* Если $\Delta \in L^1(X)$.

$$\lim_{s \to \infty} T_{1/\overline{q}_s}(f) = 0 \quad \text{равномерно на} \quad \mathbb{T}, \tag{46}$$

и (44) следует из (46) и из оценки $\|R_s\|^2_{L^2(\Delta)} = \|T_{1/\overline{q}_s}(f)\|^2_\infty$. Оператор Теплица был определен в п. 1. 3В лишь для ограниченных символов, а функция $1/\overline{q}_s$ может не быть ограниченной. Однако $T_{1/\overline{q}_s}(f) = P_+(f/\overline{q}_s)$ имеет смысл как элемент пространства $H^2(\mathbb{T})$, поскольку $f/\overline{q}_s \in L^2(\mathbb{T})$. Чтобы доказать (46), представим f по формуле Коши:

$$f(x) = \int\limits_{|a|=\rho} \frac{d\lambda(a)}{a-x}, \quad d\lambda(a) = (2\pi i)^{-1} f(a)\, da, \quad 1 < \rho < r, \quad x \in \mathbb{T}.$$

Применим формулу, полученную в п. 2. 1 Е. Функция $1/\overline{q}_s$ совпадает m-п. в. на $\mathbb{T}$ с граничным значением функции $\overline{Q}_s^{-1} = \overline{\text{Ext}\sqrt{\Delta_s}} \mid \mathbb{D}$, которое, в свою очередь, совпадает с граничным значением функции $(\text{Ext}\sqrt{\Delta_s})^{-1} \mid \mathbb{D}_-$ (см. (17) в п.1). Согласно п. 2. 1 Е, при любом $x \in \mathbb{T}$

$$\left|T_{1/q_s}(f)(x)\right| = \left|\int\limits_{|a|=\rho} \frac{1}{x-a}\,\frac{1}{(\text{Ext}\sqrt{\Delta_s})(a)}\,d\lambda(a)\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{|a|=\rho} \frac{1}{x-a}\,\overline{Q_s^{-1}\left(\frac{1}{\overline{a}}\right)}\,d\lambda(a)\right| \le \rho \max_{\rho\mathbb{T}} |\Phi| \frac{1}{\rho-1} \max_{\rho^{-1}\mathbb{T}} |Q_s^{-1}|.$$

Но $\lim\limits_{s\to\infty} \max |Q_s^{-1}| = \lim\limits_{s\to\infty} \max\limits_{\rho^{-1}\mathbb{T}} |\text{Ext}\sqrt{\Delta_s}| = 0$, так как

$$\lim_{s\to\infty} \mathfrak{L}_-(\Delta_s) = -\infty, \quad \text{а} \quad \int\limits_{\mathbb{T}} \left(\sqrt{\Delta_s}\right)^2 dm = \int\limits_{\mathbb{T}} \Delta_s\, dm < C, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

вследствие условия IV′ (см. п. 1. 5 Г).

Доказанный только что результат применим, в частности, к любой гармонике z^n, $n = 0, 1, \ldots$. При $n = 0$ он, по существу, воспроизводит алгоритм Сеге (см. п. 1. 7 В).

Б. В случае $X = \mathbb{R}$ мы также сумеем распространить (слегка модифицированную) формулу (44) на некоторые неограниченные веса Δ, наложив дополнительные условия на f. Обозначим символом $\mathcal{E}_\sigma$ множество всех целых функций степени, не превышающей σ: $\Phi \in \mathcal{E}_\sigma \Leftrightarrow \Phi \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, и при любом $\varepsilon > 0$

$$|\Phi(z)| = \mathcal{O}(e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}), \quad |z| \to +\infty.$$

Положим

$$H^2_\sigma (= H^2_\sigma(\mathbb{R})) := \{ f \in H^2(\mathbb{R}) : \exists\, \Phi \in \mathcal{E}_\sigma \quad \text{такая, что} \quad f = \Phi \mid \mathbb{R} \}.$$

Согласно теореме Винера – Пэли H^2_σ совпадает со множеством всех функций класса $L^2(\mathbb{R})$, спектр которых содержится в $[0, \sigma]$. Иными словами,

$$f \in H^2_\sigma \Leftrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f(x) = \int_0^\sigma \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Целая функция $\Phi \in \mathcal{E}_\sigma$, отвечающая функции $f \in H^2_\sigma$, определяется формулой

$$\Phi(z) = \int_0^\sigma \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Положим $f_1(x) := \Phi(x+i)$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, $f_1(x) = \int_0^\sigma \hat{f}(\xi)\, e^{-\xi}\, e^{i\xi x} d\xi$, $x \in \mathbb{R}$, так что $\hat{f}_1(\xi) = \hat{f}(\xi)\, e^{-\xi}$, и

$$\| f_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = c\, \| \hat{f}_1 \|^2_{L^2(\mathbb{R})} = c \int_0^\sigma |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-2\xi} d\xi \le c \int_0^\sigma |\hat{f}(\xi)|^2\, d\xi = \| f \|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (47)$$

Кроме того, при любом $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \le \int_0^\sigma |\hat{f}(\xi)|\, e^{-\xi} e^{\xi} d\xi \le \left(\int_0^\sigma |f_1(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \left(\int_0^\sigma e^{2\xi}\, d\xi \right) \le c(\sigma) \| f_1 \|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (48)$$

B. Предположим, что вес Δ удовлетворяет условиям (42) и

$$\Delta \in L^1(m). \quad (49)$$

Пусть $\Delta^* := \min(\Delta, 1)$ (так что $\Delta^* \in L^\infty(\mathbb{R})$), $\Delta^{**} = \Delta - \Delta^*$. Построим веса Δ^*_s, имеющие свойства I – VI (*по отношению к весу* Δ^*), а затем внешние функции $q_s := \operatorname{ext}(1/\sqrt{\Delta^*_s})$. Положим $F_s := T_{1/\overline{q}_s}(f)$, где $f \in H^2(\mathbb{R})$. По лемме Патила

$$\lim_{s \to \infty} \| F_s \|_{L^2(\mathbb{R},\, m)} = 0.$$

В частности, $\lim\limits_{s \to \infty} F_s = 0$ по мере m (на $\mathbb{R}$).

Предположим теперь, что $f \in H^2_\sigma(\mathbb{R})$. Тогда и $F_s \in H^2_\sigma(\mathbb{R})$, ибо

$$\operatorname{spec}(f/\overline{q}_s) \subset (-\infty, \sigma], \ \operatorname{spec} F_s = \operatorname{spec} P_+(f/\overline{q}_s) \subset (0, \sigma].$$

Поэтому согласно (47) и (48) при любых $x \in \mathbb{R}$ и $s = 1, 2, \ldots$

$$|F_s(x)| \le C(\sigma) \| (F_s)_1 \|_{L^2(\mathbb{R})} \le C(\sigma) \| F_s \|_{L^2(\mathbb{R})} = C(\sigma) \| P_+(f/\overline{q}_s) \|_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le C(\sigma) \| f/\overline{q}_s \|_{L^2(\mathbb{R})} \le C'(\sigma) \| f \|_{L^2(\mathbb{R})}$$

(последнее неравенство следует из условия VI). Значит, функции F_s равномерно ограничены на всей прямой $\mathbb{R}$. Наконец,

$$f = \overline{q}_s\, \mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f) + R_s, \quad \| R_s \|_{L^2(\Delta)} = \| R_s \|^2_{L^2(\Delta^*)} + \| R_s \|^2_{L^2(\Delta^{**})};$$

$\lim\limits_{s \to \infty} \| R_s \|_{L^2(\Delta^*)} = 0$ согласно (3), поскольку веса Δ^*_s и функции q_s построены по прежнему рецепту *для веса* Δ^*. Далее,

$$\| R_s \|^2_{L^2(\Delta^{**})} = \int\limits_{\{\Delta > 1\}} |q_s|^2 \Delta^{**} |F_s|^2 dm \le \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta |F_s|^2 dm,$$

так как $|q_s|^2 = 1/\Delta_s^* = 1$ на множестве $\{\Delta > 1\}$. Последний интеграл стремится к нулю, поскольку функции F_s стремятся к нулю по мере m, оставаясь равномерно ограниченными, а вес Δ суммируем (по мере m).

Итак, *формула* (44) *сохраняет силу при* $X = \mathbb{R}$, *если* $f \in H^2_\sigma$, *вес* Δ *удовлетворяет условиям* (42) *и* (49), *а* $q_s = \operatorname{ext}(1/\sqrt{\Delta_s^*})$, $\Delta^* := \min(\Delta, 1)$.

3.3. ***Весовая аппроксимация „положительной" гармоники линейными комбинациями „отрицательных" (задача Маккина).*** Условие (49) становится вполне естественным, когда мы интересуемся аппроксимационными возможностями тригонометрических сумм, ибо оно обеспечивает включение чистых гармоник в пространство $L^2(\Delta)$. Однако чистые гармоники и их линейные комбинации не принадлежат $H^2_\pm(\mathbb{R})$. Поэтому, желая приблизить гармонику $\zeta^T : x \mapsto e^{ixT}$, где $T > 0$, суммами класса Harm_-, мы предварительно подправим ее, чтобы оказаться в $H^2_+(\mathbb{R})$, а затем воспользуемся формулой (44).

А. Если $T \ge 0$, $\varepsilon > 0$, то функция $\zeta^T_\varepsilon : x \mapsto e^{ixT} \dfrac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x} e^{i\varepsilon x}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Ее спектр есть сегмент $[0, T + 2\varepsilon]$, так что $\zeta^T_\varepsilon \in H^2_{T+2\varepsilon}$. Кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \| \zeta^T - \zeta^T_\varepsilon \|_{L^2(\Delta)} = 0 \tag{50}$$

вследствие суммируемости веса Δ и равномерной ограниченности функций ζ^T_ε. К функции ζ^T_ε можно применить результат, полученный в п. 3.2 В, и приблизить ее функцией φ класса $H^2_-(\mathbb{R})$ по $L^2(\Delta)$-норме.

Б. Функция φ „состоит из гармоник с отрицательными частотами":

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi,$$

где интеграл понимается в соответствии с теоремой Планшереля. Приблизим его суммой класса Harm_- (по норме пространства $L^2(\Delta)$). Предположим сначала, что функция φ ограничена. Тогда функции $\varphi_y : x \mapsto \int_{-\infty}^0 \hat{\varphi}(\xi) e^{\xi |y|} e^{i\xi x} d\xi$, $y < 0$, равномерно ограничены: $\| \varphi_y \|_\infty \le \| \varphi \|_\infty$ ($\varphi_y(x)$ есть интеграл Пуассона функции φ, вычисленный в точке $x + iy \in \mathbb{C}_-$). Кроме того, $\lim\limits_{y \uparrow 0} \varphi_y = \varphi$ m-п. в. Следовательно, $\lim\limits_{y \uparrow 0} \| \varphi_y - \varphi \|_{L^2(\Delta)} = 0$. Функция φ_y близка к $\varphi_{y,A} : x \mapsto$ $\mapsto \int_A^0 \hat{\varphi}(\xi) e^{\xi |y|} e^{i\xi x} d\xi$ равномерно на $\mathbb{R}$, если отрицательное число A достаточно велико по модулю. Приблизив $\hat{\varphi} \mid [A, 0]$ по норме пространства $L^1([A, 0])$ непрерывной функцией, получим интеграл, равномерно на $\mathbb{R}$ приближаемый своими римановыми суммами, которые принадлежат Harm_-.

В. Избавимся от условия ограниченности функции φ. Предположим, что $\varphi \in H^2_+(\mathbb{R}) \cap L^2(\Delta)$ и построим такую последовательность (φ_j) функций класса $H^2_+(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, что

$$\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^2(\Delta)} = 0. \tag{51}$$

(Переходя к комплексно сопряженным функциям, получим нужное нам утверждение о функции $\varphi \in H^2_-(\Delta) \cap L^2(\Delta)$). Имеем $\varphi = qI$, где $q = \operatorname{ext}|\varphi|$, $I \in H^\infty(\mathbb{R})$, $|I| = 1$ m-п. в. Положим $q^j := \operatorname{ext}\psi_j$, где $\psi_j(x) := |\varphi(x)|$, если $|\varphi(x)| \le j$, $\psi_j(x) = j$, если $|\varphi(x)| > j$, $j = 1, 2, \ldots$. Функция $\varphi_j := q^j I$ принадлежит $H^2_+(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Докажем равенство (51). Для этого нам понадобится следующий факт:

$$\lim_{j\to\infty} q^j = q \quad \text{по мере } m \text{ на любом ограниченном промежутке.} \tag{52}$$

(Доказательство см. ниже в п. Г). Далее,

$$|q^j - q| = |q|\,|1 - q^j/q| \le 2|q| = 2|\varphi|,$$

поскольку $|q^j| \le |q|$. Поэтому функции $|\varphi_j - \varphi|^2\Delta = |q^j - q|^2\Delta$ имеют мажоранту $4|\varphi|^2\Delta$, суммируемую на $\mathbb{R}$, и (51) следует из (52).

Г. Докажем утверждение (52). Согласно формуле (16) из п. 1,

$$q^j(x) = \psi_j(x)\exp\frac{1}{i}(\widetilde{\log\psi_j})(x), \quad q(x) = |\varphi(x)|\exp\frac{1}{i}\left(\widetilde{\log|\varphi|}\right)(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$\tilde{M}(x) := \frac{1}{\pi}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} M(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{z}{1+z^2}\right]dz$$

— функция, сопряженная с функцией M. Из теоремы Смирнова [13] или из неравенства Колмогорова для сопряженной функции [17] следует, что соответствие $M \mapsto \tilde{M}$ есть непрерывный линейный оператор из $L^1(\Pi)$ в $L^{1/2}(\Pi)$. Далее, $\log|\varphi| \in L^1(\Pi)$ (ибо $\varphi \in H^2_+(\mathbb{R})$, и разумеется, речь идет о ненулевой функции), а $\lim_{j\to\infty}\|\log\psi_j - \log|\varphi|\|_{L^1(\Pi)} = 0$ (ибо $\log\psi_j$ стремится к $\log|\varphi|$, монотонно возрастая). Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\|\widetilde{\log\psi_j} - \widetilde{\log|\varphi|}\|_{L^{1/2}(\Pi)} = 0, \quad \lim_{j\to\infty}\widetilde{\log\psi_j} = \widetilde{\log|\varphi|}$$

по мере Π, а потому и по мере m на каждом ограниченном промежутке. Аналогичное утверждение справедливо в отношении функций $\exp(1/i)\widetilde{\log\psi_j}$ (и, конечно, ψ_j), и мы получаем (52).

3.4. *Близость формул восстановления и аппроксимации.* В п. 1.2 мы видели, что карлемановская формула, отвечающая „характеристическому" весу, одновременно реализует теорему единственности (для функции класса Харди с данным сужением на данное множество) и теорему аппроксимации (следами функций класса Харди на данном множестве). В этом пункте мы покажем, что и в гораздо более общем случае ограниченного веса с расходящимся интегралом $\mathfrak{L}(\Delta)$ карлемановские формулы восстановления и аппроксимации близки друг к другу в довольно сильном смысле. Будем рассматривать здесь только случай $X = \mathbb{T}$.

А. Рассмотрим оператор R^s приближенного восстановления функции (второго рода; см. формулу (39)) в п. 2. 4 Б):

$$R^s(f) := \frac{1}{q_s} T_{q_s}((1-\Delta_s)f), \quad f \in H^2(\mathbb{T}),$$

и оператор A^s весовой аппроксимации (формула (44) в п. 1Б): $A^s(f) := = \overline{q}_s \mathcal{H}_{1/\overline{q}_s}(f)$, $f \in H^2(\mathbb{T})$. Будем считать, что $\Delta \le 1$ $\mathfrak{L}(\Delta) = -\infty$, а Δ_s и q_s определены как в п. 2. 2Б (так что множество $\{\Delta > 1/s\}$ есть „окно", на котором $\Delta_s \equiv 1$ и через которое функция Q_s „продолжима" из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}_-$).

Б. Положим $\mathcal{D}_s := R^s - A^s$ и зафиксируем число $p > 2$ (Очевидно, что $H^p(\mathbb{T}) \subset H^2(\mathbb{T})$.) Рассмотрим $\mathcal{D}_s$ как линейный оператор, действующий из $H^p(\mathbb{T})$ в $L^2(\Delta)$. Тогда

$$\lim_{s \to \infty} \|\mathcal{D}_s\| = 0 \tag{53}$$

(имеется в виду сходимость по норме в пространстве операторов, действующих из $H^p(\mathbb{T})$ в $L^2(\Delta)$).

Докажем это. Если $f \in H^p(\mathbb{T})$, то $P_+(q_s f) = q_s f$; $\Delta_s q_s = 1/q_s$. Поэтому

$$\mathcal{D}_s(f) = 1/q_s P_+((1-\Delta_s)q_s f) - \overline{q}_s P_-(f/\overline{q}_s) =$$

$$= f - (1/q_s)P_+(f/\overline{q}_s) - \overline{q}_s P_-(f/\overline{q}_s) =$$

$$= f - (1/q_s)\left(\frac{f}{q_s} - P_-\left(\frac{f}{\overline{q}_s}\right)\right) - \overline{q}_s P_-(f/\overline{q}_s) =$$

$$= (1-\Delta_s)f + ((1/q_s) - \overline{q}_s)P_-(f/\overline{q}_s) = a_1 + a_2$$

(эта выкладка показывает, в частности, что операторы R_s и A_s тождественны, если $\Delta = \chi_E$, ибо $1 - \Delta_s \equiv 1/q_s - \overline{q}_s \equiv 0$ на E). Далее, полагая $e_s := \{x \in \mathbb{T}: 0 < \Delta(x) < 1/s\}$, получаем

$$\|a_1\|^2_{L^2(\Delta)} = \int_{e_s} (1-\Delta_s)^2 |f|^2 \Delta \, dm \le \frac{1}{s}(\|f\|_{H^p})^2,$$

$$\left|\frac{1}{q_s} - \overline{q}_s\right|^2 \Delta = \frac{\left(1-|q_s|^2\right)^2}{|q_s|^2}\Delta = \left(\frac{1}{|q_s|} - |q_s|\right)^2 \Delta =$$

$$= \left(\sqrt{\Delta_s} - \frac{1}{\sqrt{\Delta_s}}\right)^2 \Delta = \Delta_s\Delta - 2\Delta + \frac{\Delta}{\Delta_s} \begin{cases} = 0, & \text{если } \Delta \ge \dfrac{1}{s}; \\ \le 2, & \text{если } 1 \ge \Delta_s \ge \Delta; \end{cases}$$

$$\|a_2\|^2_{L^2(\Delta)} = \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{q_s} - q_s\right|^2 \Delta \left|P_-\left(\frac{f}{q_s}\right)\right|^2 dm = \int_{e_s} \le 2\int_{e_s} \left|P_-\left(\frac{f}{q_s}\right)\right|^2 dm \le$$

$$\leq 2\left(\int\limits_{e_s}\left|P_-\left(\frac{f}{q_s}\right)\right|^p dm\right)^{2/p}(m(e_s))^{p/(p-2)} \leq$$

$$\leq 2c_p(\|f/q_s\|_{L^p(\mathbb{T})})^2(m(e_s))^{p/(p-2)} \leq 2c_p(\|f\|_{H^p(\mathbb{T})})^2(m(e_s))^{p/(p-2)}$$

(в предпоследнем неравенстве мы воспользовались известной L^p-оценкой проектора Риса P_-). Осталось заметить, что $\lim\limits_{s\to\infty} m(e_s) = 0$.

1. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. – 1945. – **46**, №3. – С. 1378 – 1409.
2. *Крейн М. Г.* Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова // Там же. – №8. – С. 339 – 341.
3. *Szegö G.* Uber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Eben gehören // Math. Z. – 1921. – **9**. – S. 218 – 247.
4. *Szegö G.* Uber die Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems // Math. Ann. – 1921. – **82**. – S. 188 – 212.
5. *Колмогоров А. Н.* Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве // Бюлл. Моск. ун-та. Математика. – 1941. – **2**, вып.6. – С. 1 – 40.
6. *Ахиезер Н.И.* Об одном предположении А. Н. Колмогорова и об одном предположении М. Г. Крейна // Докл. АН СССР. – 1945 –. **50**, №1. – С. 35 – 39.
7. *Тумаркин Г. Ц.* Приближение в среднем функций на спрямляемых кривых // Мат. сб. – 1957. – **42**. – С. 79 – 128.
8. *Никольский Н. К.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1974. – **70**. – С. 1 – 270.
9. *Никольский Г. К.* Лекции об операторе сдвига. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
10. *Koosis P.* The Logarithmic Integral: In 2 Vol. – Cambridge: Univ. press, 1988. – Vol. 1. – 606 p.
11. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964. – 438 с.
12. *Carleman T.* Les fonctions quasianalytiques. – Paris: Hermann, 1926. – 116 p.
13. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.
14. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. – Новосибирск: Наука, 1990. – 246 с.
15. *Havin V. P., Jöricke B.* The Uncertainty Principle in Harmohic Analysis (to appear).
16. *Виденский И. В., Гавурина Е. М., Хавин В. П.* Аналогия интерполяционной формулы Карлемана–Голузина–Крылова // Теория операторов и теория функций. - 1983. – Вып. 1. – С. 21 – 31.
17. *Кусис П.* Введенче в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 336 с.
18. *McKean H. P.* Some questions about Hardy functions // Lect. Notes Math. – 1943. – P. 85 – 86.
19. *Хавин В. П.* Невозможность карлемановской аппроксимации функций, непрерывных на единичной окружности, граничными значениями функций, аналитических и равномерно непрерывных в единичном круге // Исслед. по линейн. оператором и теории функций. – 1971. – **2**. – С. 161 – 170.
20. *Patil D. I.* Representation of H^p- functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – **78**. №5. – P. 617 – 620.

Получено 29. 07. 93