УДК 517.9

Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатырко

Абсолютная устойчивость систем регулирования с запаздывающим аргументом

Прямым методом Ляпунова исследуется поведение систем автоматического регулирования с одной нелинейностью и запаздывающим аргументом. Получены достаточные критерии абсолютной устойчивости систем для любой величины запаздывания.

Прямим методом Ляпунова вивчається поведінка систем автоматичного регулювання з однією нелінійністю та аргументом, що запізнюється. Одержані достатні критерії абсолютної стійкості систем для довільної величини запізнювання.

Рассмотрим процессы, описываемые системами дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа при наличии аддитивно входящей нелинейной функции, зависящей от линейной комбинации фазовых переменных

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + b_1 f(\sigma(t)) + b_2 f(\sigma(t-\tau)),$$
$$\sigma(t) = d_1^{\mathrm{T}} x(t) + d_2^{\mathrm{T}} x(t-\tau). \tag{1}$$

Здесь A, B— постоянные матрицы, b_1, b_2, d_1, d_2, $x(t)$ — векторы пространства $\mathbb{R}^n$. Нелинейная функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условию «сектора» $[0, K]$

$$0 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant K\sigma^2, \quad f(0) \equiv 0. \tag{2}$$

Предположим, что $x(t) \equiv 0$ является единственной стационарной точкой системы (1).

Уравнения вида (1), (2) возникают в задачах автоматического регулирования при надлежащей идеализации в случае, когда существенна нелинейность одного элемента схемы. Довольно часто их называют системами «прямого регулирования».

Система, получаемая из (1) при отсутствии запаздывания, т. е. при $\tau = 0$, имеет вид

$$\dot{x}(t) = (A + B)\,x(t) + (b_1 + b_2)\,f(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = (d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t). \tag{3}$$

Очевидно, при малом запаздывании τ асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1) следует из асимптотической устойчивости системы без запаздывания (3) [1]. В настоящей статье будем рассматривать абсолютную устойчивость, т. е. асимптотическую устойчивость в целом для произвольной функции $f(\sigma)$, удовлетворяющей условию (2). Получим условия абсолютной устойчивости для произвольного запаздывания $\tau > 0$.

Пусть матрица $A + B$ — гурвицева. Исследование системы (1) будем проводить прямым методом Ляпунова, а функцию Ляпунова строить в виде Лурье—Постникова [2]

$$\mathcal{V}(x) = x^{\mathrm{T}} H x + \beta \int_0^{\sigma(x)} f(\xi)\,d\xi, \quad \sigma(x) = (d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t), \tag{4}$$

где H — симметрическая положительно-определенная матрица, полученная при решении матричного уравнения Ляпунова

$$(A + B)^{\mathrm{T}} H + H(A + B) = -C, \tag{5}$$

β — числовой параметр, выбираемый таким образом, чтобы матрица $H + \frac{1}{2}\beta K(d_1 + d_2)(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}}$ являлась положительно-определенной. Существование и единственность решения уравнения (5) для произвольной симметрической положительно-определенной матрицы C гарантируется гурвицевостью матрицы $A + B$ [3].

Для функции Ляпунова $\mathcal{V}(x)$ вида «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» (4) справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(\tilde{H})\,\|x\|^2 \leqslant \mathcal{V}(x) \leqslant \lambda_{\max}(\tilde{H})\,\|x\|^2, \tag{6}$$

где

$$\lambda_{\min}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\min}(H) & \text{при } \beta \geqslant 0, \\ \lambda_{\min}\left(H + \dfrac{1}{2}\beta K(d_1 + d_2)(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}}\right) & \text{при } \beta < 0, \end{cases}$$

$$\lambda_{\max}(\tilde{H}) = \begin{cases} \lambda_{\max}\left(H + \dfrac{1}{2}\beta K(d_1 + d_2)(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}}\right) & \text{при } \beta \geqslant 0, \\ \lambda_{\max}(H) & \text{при } \beta < 0. \end{cases}$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения: $\|\cdot\|$ — евклидова норма пространства $\mathbb{R}^n$; $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — соответственно максимальное и минимальное собственные числа матрицы.

Показано [4], что при использовании метода функций Ляпунова для систем с запаздыванием возникает осложнение при исследовании знакоопределенности производной в силу системы. Она зависит от $2n$ переменных и непосредственное использование теорем А. М. Ляпунова не эффективно. Поскольку при определении устойчивости предполагается малость начальных возмущений, то Б. С. Разумихин предложил рассматривать производную на кривых, находящихся внутри поверхности уровня функции Ляпунова, т. е. удовлетворяющих условию $\mathcal{V}(x(s)) < \mathcal{V}(x(t))$ при $s < t$ [5]. Для функции Ляпунова вида (4), учитывая (6), это условие можно выразить неравенством

$$\|x(s)\| < \Delta(\tilde{H})\,\|x(t)\|, \tag{7}$$

где $\Delta(\tilde{H}) = (\lambda_{\max}(\tilde{H})/\lambda_{\min}(\tilde{H}))^{1/2}$, $s < t$.

Теорема 1 *Пусть матрица* $A+B$ — *гурвицева, а* $\tilde{C}_1$ — *положительно-определенная*

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} C & -\frac{1}{2}(\beta A^{\mathrm{T}} + E)(d_1 + d_2) \\ -\frac{1}{2}(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}}(\beta A + E) & 1/K \end{bmatrix},$$

E — *единичная матрица. Если существует матрица* H, *являющаяся решением уравнения* (5), *такая, что выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(\tilde{C}_1) > 2\|HB\|(1 + \Delta(\tilde{H})) + K[2\|HB_1\| + K\|d_1 + d_2\| \times$$
$$\times |\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} b_1|][\|d_1\| + \|d_2\|\Delta(\tilde{H})] + K[2\|Hb_2\| + K\|d_1 + d_2\| \times$$
$$\times |\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} b_2|]\Delta(\tilde{H})(\|d_1\| + \|d_2\|) + K\Delta(\tilde{H})\|d_1 + d_2\|\|\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} B\|, \tag{8}$$

то система автоматического регулирования (1) *абсолютно устойчива при любом отклонении аргумента* $\tau > 0$.

Доказательство. Как следует из (6), функция $\mathcal{V}(x)$ вида (4) положительно определена.

Рассмотрим полную производную функции $\mathcal{V}(x)$ в силу системы (1). Выделив в ней предварительно полный квадрат относительно $n+1$ фиктивно независимых переменных $x_1(t), \ldots, x_n(t), f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t))$ и использовав условия сектора (2) [6] $(\sigma - f(\sigma)/K) f(\sigma) \geqslant 0$, запишем

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = -[x^{\mathrm{T}}(t), f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t))]\tilde{C}_1[x^{\mathrm{T}}(t), f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t))]^{\mathrm{T}} +$$
$$+ 2x^{\mathrm{T}}(t) H\{B[x(t-\tau) - x(t)] + b_1 f(d_1^{\mathrm{T}} x(t) + d_2^{\mathrm{T}} x(t-\tau)) + b_2 f(d_1^{\mathrm{T}} x(t-\tau) +$$
$$+ d_2^{\mathrm{T}} x(t - 2\tau))\} + \beta f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t))(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}}\{Bx(t-\tau) + b_1 f(d_1^{\mathrm{T}} x(t) +$$
$$+ d_2^{\mathrm{T}} x(t-\tau)) + b_2 f(d_1^{\mathrm{T}} x(t-\tau) + d_2^{\mathrm{T}} x(t-2\tau))\} + [(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t) -$$
$$- f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t))/K] f((d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} x(t)).$$

Используя условие (7) и ограничение (2), налагаемое на функцию $f(\sigma)$, получаем следующую оценку величины полной производной от функции $\mathcal{V}(x)$:

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leqslant -\lambda_{\min}(\tilde{C}_1)\|x(t)\|^2 + \{2\|HB\|(1 + \Delta(\tilde{H})) + K[2\|Hb_1\| +$$
$$+ K\|d_1 + d_2\||\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} b_1|][\|d_1\| + \|d_2\|\Delta(\tilde{H})] + K[2\|Hb_2\| +$$
$$+ K\|d_1 + d_2\||\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} b_2|]\Delta(\tilde{H})(\|d_1\| + \|d_2\|) + K\Delta(\tilde{H})\|d_1 +$$
$$+ d_2\|\|\beta(d_1 + d_2)^{\mathrm{T}} B\|\}\|x(t)\|^2.$$

Следовательно, при выполнении условия (8) $\dot{\mathcal{V}}(x)$ является отрицательно-определенной, что вместе с предположением о единственности стационарной точки системы (1) означает ее абсолютную устойчивость. Теорема доказана.

Если матрица, определяющая линейную часть системы (1), имеет одно нулевое собственное число, а остальные обладают отрицательной действительной частью, то систему можно свести к виду [6]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau) + b_1 f(\sigma(t)) + b_2 f(\sigma(t-\tau)),$$
$$\dot{\sigma}(t) = d_1^{\mathrm{T}} x(t) + d_2^{\mathrm{T}} x(t-\tau) - \rho_1 f(\sigma(t)) - \rho_2 f(\sigma(t-\tau)). \tag{9}$$

Систему (9) часто называют системой «непрямого регулирования», или управления по производным. Здесь нелинейная функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$K_1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant K_2\sigma^2, \quad K_2 \geqslant K_1 > 0, \quad f(0) \equiv 0. \tag{10}$$

Пусть $x(t) \equiv 0$ — единственная стационарная точка системы (9), матрица $A + B$ — гурвицева. Тогда функцию Ляпунова будем строить в виде

$$\mathcal{V}(x, \sigma) = x^{\tau} H x + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma, \tag{11}$$

где H — решение матричного уравнения (5). В отличие от (1) уравнение (9) будем рассматривать в $(n+1)$-мерном пространстве $x_\sigma = (x, \sigma)$. Для функции Ляпунова вида (11) справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(H)\|x\|^2 + \frac{K_1}{2}\sigma^2 \leqslant \mathcal{V}(x, s) \leqslant \lambda_{\max}(H)\|x\|^2 + \frac{K_1}{2}\sigma^2. \tag{12}$$

Поэтому условие Б. С. Разумихина $\mathcal{V}(x(s), \sigma(s)) < \mathcal{V}(x(t), \sigma(t))$, $s > t$, применительно к (11) имеет вид

$$\|x(s)\| < \Delta_1 \|x(t)\| + \Delta_2 |\sigma(t)|, \quad |\sigma(s)| < \Delta_3 \|x(t)\| + \Delta_4 |\sigma(t)|, \tag{13}$$

где

$$\Delta_1 = (\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H))^{1/2}, \quad \Delta_2 = (K_2/(2\lambda_{\min}(H)))^{1/2},$$

$$\Delta_3 = (2\lambda_{\max}(H)/K_1)^{1/2}, \quad \Delta_4 = (K_2/K_1)^{1/2}.$$

Приведем условия абсолютной устойчивости системы (9), аналогичные полученным в теореме 1 для системы (1).

Теорема 2. *Пусть матрица $A + B$ — гурвицева, а матрица $\tilde{C}_2$ — положительно-определенная*

$$\tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} C & -[Hb_1 + d_1/2] \\ -[Hb_1 + d_1/2]^{\tau} & \rho_1 \end{bmatrix}.$$

Если существует матрица H, являющаяся решением уравнения (5), *такая, что выполняются неравенства*

$$\lambda_{\min}(\tilde{C}_2)/2 > \|HB\|(1 + \Delta_1) + \|Hb_2\| K_2\Delta_3,$$

$$[\lambda_{\min}(\tilde{C}_2) - 2(\|HB\|(1 + \Delta_1) + \|Hb_2\| K_2\Delta_3)]\,[K_1^2(\lambda_{\min}(\tilde{C}_2) +$$

$$+ \rho_2\Delta_4) - K_2\Delta_2\|d_2\|] > (\|HB\|\Delta_2 + \|Hb_2\| K_2\Delta_4 +$$

$$+ (K_2\Delta_1\|d_2\| - \rho_2\Delta_3 K_1^2))^2/2, \tag{14}$$

то система непрямого регулирования (9) *абсолютно устойчива при произвольном* $\tau > 0$.

Доказательство. В силу (12) функция $\mathcal{V}(x, \sigma)$ вида (11) является положительно-определенной.

Выделив предварительно полный квадрат от $n + 1$ переменных $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, $f(\sigma(t))$, полную производную от $\mathcal{V}(x, \sigma)$ в силу системы (9) можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathcal{V}}(x, \sigma) = -(x^{\tau}(t), f(\sigma(t)))\,\tilde{C}_2\,(x^{\tau}(t), f(\sigma(t)))^{\tau} +$$

$$+ 2x^{\tau}(t) H \{B[x(t-\tau) - x(t)] + b_2 f(\sigma(t-\tau))\} +$$

$$+ d_2^{\tau} x(t-\tau) f(\sigma(t)) - \rho_2 f(\sigma(t)) f(\sigma(t-\tau)).$$

Используя условия (13), имеем

$$\dot{\mathcal{V}}(x, \sigma) \leqslant -\lambda_{\min}(\tilde{C}_2)[\|x(t)\|^2 + K_1^2\sigma^2(t)] + 2\|x(t)\| \times$$

$$\times \{\| HB \| [(1+\Delta_1)\| x(t) \| + \Delta_2 | \sigma(t) |] + \| Hb_2 \| K_2 (\Delta_3 \| x(t) \| +$$
$$+ \Delta_4 | \sigma(t) |\} + K_2 | \sigma(t) | \| d_2 \| (\Delta_1 \| x(t) \| + \Delta_2 | \sigma(t) |) -$$
$$- \rho_2 K_1^2 | \sigma(t) | (\Delta_3 \| x(t) \| + \Delta_4 | \sigma(t) |).$$

Представив правую часть последнего выражения в виде квадратичной формы переменных $\| x(t) \|$, $| \sigma(t) |$ и записав условия ее отрицательной определенности, получим условия абсолютной устойчивости (14) системы непрямого регулирования (9). Теорема доказана.

Во многих задачах [7] необходимо найти оценку величины K, характеризующей допустимую нелинейную характеристику $f(\sigma)$. Полученные достаточные условия абсолютной устойчивости позволяют решить этот вопрос.

Пример 1. Рассмотрим систему прямого регулирования первого порядка $\dot{x}(t) = -20x(t) - 5x(t-\tau) + 2f(\sigma(t)) - f(\sigma(t-\tau))$, $\sigma(t) = 2x(t) - x(t-\tau)$, где $f(\sigma)$ удовлетворяет условию $0 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant K\sigma^2$. Если в качестве функции Ляпунова выбрать $\mathscr{V}(x) = 0{,}02x^2 + 0{,}04 \int\limits_0^{x(t)} f(\xi)\, d\xi$, то согласно теореме 1 эта система будет абсолютно устойчивой для любого запаздывания $\tau > 0$ при $K \leqslant 0{,}58$.

Пример 2. Рассмотрим систему непрямого регулирования, описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = -20x_1(t) - 9x_2(t) - x_2(t-\tau) + 4f(\sigma(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = 8x_1(t) - 20x_2(t) + 2x_1(t-\tau) - 5f(\sigma(t)) + f(\sigma(t-\tau)),$$

$$\dot{\sigma}(t) = -16x_1(t) + 20x_2(t) + x_1(t-\tau) - 35f(\sigma(t)) - 20f(\sigma(t-\tau)),$$

где $f(\sigma)$ удовлетворяет условию $0{,}1\sigma^2 \leqslant \sigma f(\sigma) \leqslant K\sigma^2$. Если выбрать в качестве функции Ляпунова

$$\mathscr{V}(x, \sigma) = 2(x_1^2 + x_2^2) + \int\limits_0^{\sigma} f(\sigma)\, d\sigma,$$

то по условию теоремы 2 эта система будет абсолютно устойчивой для любого запаздывания $\tau > 0$ при $K \leqslant 0{,}52$.

1. *Хусаинов Д. Я., Шарковский А. Н.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Функциональные и диф.-разност. уравнения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 141—147.
2. *Лурье А. И.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.— М. : Гостехиздат, 1951.— 216 с.
3. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова.— М. : Наука, 1970.— 240 с.
4. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 290 с.
5. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика.— 1956.— 20, № 4.— С. 500—512.
6. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем.— М. : Изд-во АН СССР, 1963.— 140 с.
7. *Громова П. С., Пелевина А. Ф.* Абсолютная устойчивость систем автоматического регулирования с запаздыванием // Диф. уравнения.— 1977.— 13, № 8.— С. 1375—1383.

Киев. ун-т

Получено 22.04.88