УДК 517.9

С. А. КАЩЕНКО, д-р физ.-мат. наук (Ярослав. ун-т)

О нормализации в окрестности цикла систем параболических уравнений с малой диффузией

Рассмотрены вопросы о поведении решений параболических краевых задач в окрестности цикла в случаях, близких к критическим. Малость коэффициентов диффузии влечет за собой «бесконечномерность» критических случаев. С помощью формализма методов нормализации изучены установившиеся режимы в окрестности цикла.

Розглянуто питання про поведінку розв'язків параболічних крайових задач в околі циклу у випадках, що наближаються до критичних. З мализни коефіцієнтів дифузії випливає «нескінченновимірність» критичних випадків. За допомогою формалізму методів нормалізації вивчені сталі режими в околі циклу.

1. Постановка задачи. Рассматривается система параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u, \varepsilon) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

где $u \in R^m$ $(m > 1)$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $x \in [0, 1]$. Все собственные значения матрицы D имеют положительные вещественные части, а нелинейная вектор-функция $F(u, \varepsilon)$ достаточно гладко зависит от u и параметра ε. В качестве фазового пространства зафиксируем $C_{[0,1]}(R)^m$.

Предполагаем, что система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{v} = F(v, 0)$ имеет T_0-периодическое $(T_0 > 0)$ решение $v_0(t)$ $(\not\equiv \mathrm{const})$. Функция $v_0(t)$ является, очевидно, решением краевой задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Кроме того, каждая из функций $v_0(t + \varphi(x))$, где $\varphi(x) \in C^2_{[0,1]}(R^1)$ и $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, является асимптотическим по невязке с точностью до $O(\varepsilon)$ периодическим решением задачи (1), (2). Поставим задачу изучения таких установившихся режимов краевой задачи (1), (2), которые при $\varepsilon \to 0$ стремятся к $v_0(t + \varphi(x))$. Исследование этой задачи существенным образом зависит от свойств семейства операторов $L(\lambda)$:

$$L(\lambda) z \equiv \dot{z} - [A(t) - \lambda D] z, \quad A(t) = F'_u(v_0(t), 0), \quad \lambda \geqslant 0,$$

которые действуют из $C^1_{(-\infty,\infty)}$ в $C_{(-\infty,\infty)}$. При $\lambda = 0$ оператор $L(0)$ не регулярен, поскольку $L(0)\dot{v}_0(t) = 0$. Предположим сначала, что при всех $\lambda > 0$ операторы $L(\lambda)$ регулярны и выполнена оценка условие типа общности положения — $\|L^{-1}(\lambda)\| \leqslant c\lambda^{-1}$, где $c > 0$ не зависит от λ. Из [1] вытекает, что близкое при $\varepsilon \to 0$ к $v_0(t)$ периодическое решение $v_0(t, \varepsilon) = v_0((1 + 0(\varepsilon))t) + O(\varepsilon)$ системы $\dot{v} = F(v, \varepsilon)$ является орбитально устойчивым решением краевой задачи (1), (2).

В том случае, когда найдется такое $\lambda_0 \geqslant 0$, для которого система уравнений

$$\dot{z} = [A(t) - \lambda D] z \tag{3}$$

при $\lambda = \lambda_0$ имеет мультипликатор, модуль которого больше, чем 1, тогда задача о поведении решений (1), (2) в «окрестности» $v_0(t + \varphi(x))$ становится нелокальной, а любое решение, лежащее в «малой окрестности» $v_0(t + \varphi(x))$ не устойчиво.

Далее рассмотрим отдельно два типа критических случаев. В первом из них предполагаем, что при всех $\lambda > 0$ операторы $L(\lambda)$ регулярны, а при $\lambda = 0$ кроме единичного мультипликатора есть мультипликаторы, равные по модулю 1. Второй тип критических случаев выделяется условием, когда при некотором $\lambda = \lambda_0 > 0$ оператор $L(\lambda_0)$ не регулярен, а при $\lambda \geqslant 0$ и $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq \lambda_0$ операторы $L(\lambda)$ регулярны. Ниже будут более точно сформулированы соответствующие условия для наиболее простых и (основных) критических случаев каждого типа. Будет показано, что поведение решений в каждом из двух типов критических случаев существенно отличается. Сразу отметим, что для двух компонентных систем $(m = 2)$ возможны случаи, когда оператор $L(\lambda)$ не регулярен при произвольном (но конечном) числе значений параметра λ [2].

Основная трудность при изучении поставленной задачи состоит в том, что при $\varepsilon \to 0$ бесконечно много мультипликаторов линеаризованной на $v_0(t)$ краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t, \varepsilon) u, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad A(t, \varepsilon) = F'_u(v_0(t), \varepsilon)$$

стремятся по модулю к 1. Таким образом, в задаче об устойчивости реализуется критический случай бесконечной размерности, поэтому известными результатами о существовании локальных инвариантных многообразий для «критических» переменных и методами нормализации [3—5] непосредственно воспользоваться нельзя. Тем не менее формализм метода нормализации позволяет получить некоторые аналоги укороченных нормальных форм в окрестности цикла — специальные эволюционные краевые задачи. Эти задачи и отвечают за динамику в окрестности $v_0(t + \varphi(x))$. Близкие результаты о поведении решений в окрестности состояния равновесия исходной краевой задачи приведены в работе [6].

2. Критические случаи первого типа. Ограничимся рассмотрением одного из самых простых критических случаев первого типа, когда система (3) при $\lambda = 0$, кроме простого единичного мультипликатора, имеет ровно пару мультипликаторов $\mu_{1,2}$, равных $\exp \pm i\varphi$, где $0 < \varphi < \pi$ и отсутствуют главные резонансы $\varphi \neq \pi/2, \pi/3, \pi/4$. Все остальные мультипликаторы (3) при $\lambda = 0$ удовлетворяют неравенству $|\mu| < 1$. Кроме этого предполагаем, что выполняется условие невырожденности: найдется такая универсальная постоянная $c > 0$, что при $\lambda > 0$

$$\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant c\lambda^{-1}. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольно постоянную $a > 0$ и рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v} = -\varepsilon a D v + F(v, \varepsilon). \tag{5}$$

Применим известные методы нормализации этой системы в окрестности цикла $v_0(t)$. В результате получим, что в окрестности $v_0(t)$ система (5) имеет устойчивое трехмерное локальное инвариантное многообразие, на котором (5) можно представить в виде системы двух уравнений относительно комплексной переменной z и вещественной переменной s:

$$\frac{dz}{dt} = [-\varepsilon a d_1 + \varepsilon d_2] z + d_3 |z|^2 z + O(\varepsilon^2 + |z|^4 + \varepsilon |z|),$$
$$\frac{ds}{dt} = 1 + \varepsilon\delta_1 a + \varepsilon\sigma_1 + \sigma_2 |z|^2 + O(|z|^3 + \varepsilon |z| + \varepsilon^2). \tag{6}$$

Таким образом, при некоторых достаточно общих условиях динамика (5) определяется укороченной нормализованной системой

$$\frac{dw}{d\tau} = [-a d_1 + d_2] w + d_3 |w|^2 w, \qquad \frac{d\tilde{s}}{d\tau} = \delta_1 a + \sigma_1 + \sigma_2 |w|^2, \tag{7}$$

не содержащей малый параметр ε. Эта система получается из (6) в результате замен $z = \sqrt{\varepsilon} w(\tau)$, $s = t + \tilde{s}(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, сокращения на $\varepsilon^{3/2}$ и отбрасывания слагаемых порядка $o(1)$ (при $\varepsilon \to 0$). Отметим, что из условия (4) вытекают неравенства $\operatorname{Re} d_1 > 0$, $\delta_1 > 0$. Соответствие между решениями (5) и (7) устанавливает формула

$$v = v_0(s) + \sqrt{\varepsilon} [wE(s) \exp i\varphi t + \overline{wE}(s) \exp - i\varphi t] + \ldots, \tag{8}$$

в которой через $E(t) \exp i\varphi t$, где $E(t)$ — T_0-периодическая, обозначено решение (3) (при $\lambda = 0$), отвечающее мультипликатору $\mu_1 = \exp i\varphi$.

Введем в рассмотрение параболическую систему

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [\partial_2 + d_3 |w|^2] w + d_4 \left(2 \frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right) + d_5 \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} \right)^2, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} = \sigma_1 + \sigma_2 |w|^2 + \delta_1 \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial x^2} + \delta_2 \left(\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x} \right)^2 \tag{10}$$

с краевыми условиями

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x}\right|_{x=1} = 0. \tag{11}$$

Явный вид для коэффициентов этой системы приводить не будем.

Теорема 1. *Краевая задача* (9)—(11) *играет роль укороченной нормальной формы для исходной краевой задачи* (1), (2).

Поясним сказанное. Сначала коротко остановимся на выводе уравнений (9), (10). В отличие от системы (5) для исходной краевой задачи реализуется, как говорилось выше, критический случай бесконечной размерности. Применяя формализм метода нормализации (и отбрасывая слагаемые старших порядков малости), приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Именно эта бесконечная система получается и при разложении переменных w и $\tilde{s}$ в (9), (10) в ряды Фурье по соответствующим собственным функциям.

Далее, с помощью формулы (8) по решениям (9)—(11) (и при соответствующей нормировке) получаем асимптотические (на любом конечном отрезке времени) по невязке с точностью до $o(\varepsilon)$ решения исходных краевых задач. Можно показать, что «грубому» (понятие «грубости» здесь специфично) состоянию равновесия в (9)—(11) отвечает при достаточно малых ε двумерный тор в (1), (2). Подобные результаты можно получить и для торов краевых задач (9)—(11). Отметим, что динамика этих краевых задач может быть довольно сложной даже при $d_4 = d_5 = 0$ [7]. После того, как найдены решения в (9)—(11), можно с помощью стандартных разложений строить асимптотические решения в исходной краевой задаче с любой степенью точности.

Пусть, для примера, краевая задача (9)—(11) имеет однородный периодический установившийся режим $w_0(t) = w_0 \exp i\alpha\tau$, где $|w_0|^2 = -(\operatorname{Re} d_2)(\operatorname{Re} d_3)^{-1}$ (считаем здесь, что $(\operatorname{Re} d_2)(\operatorname{Re} d_3) < 0$), $\alpha = \operatorname{Im}(d_2 + |w_0|^2 d_3)$, а $\tilde{s}(\tau) = \tau[\sigma_1 + \sigma_2 |w_0|^2]$. Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{v} = F(v, \varepsilon)$ имеет (при малых ε) двумерный тор $\tilde{v}(t, \varepsilon) = v_0(s) + \sqrt{\varepsilon}\,[w_0 E_0(s) \exp i\varphi t_1 + \bar{w}_0 \bar{E}_0(s) \exp - i\varphi t_1] + O(\varepsilon)$, где $\dot{s} = 1 + \dot{\tilde{s}}(\tau) + o(\varepsilon)$, $\dot{t}_1 = 1 + \varepsilon\alpha + o(\varepsilon)$. В рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений устойчивость этого тора определяется знаком числа $\operatorname{Re} d_3$: при условии $\operatorname{Re} d_3 < 0$ тор устойчив, а при $\operatorname{Re} d_3 > 0$ неустойчив. Этот же тор $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ доставляет совокупность решений и краевой задачи (1), (2). Для формулировки теоремы об устойчивости $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ (в рамках краевой задачи (1), (2)) введем в рассмотрение многочлены $\rho_k(\lambda) = \lambda^3 + A_k\lambda^2 + B_k\lambda + C_k$ $(k + 0, 1, 2, \ldots)$, где

$$A_k = k^2[\delta_1 + 2\operatorname{Re} d_1] - |w_0|^2 \operatorname{Re} d_3,$$

$$B_k = k^2\{k^2(|d_1|^2 + 2\delta_1 \operatorname{Re} d_1) - |w_0|^2[\operatorname{Re} d_3(\delta_1 + \operatorname{Re} d_1) - \\ - \operatorname{Im} d_1 \operatorname{Im} d_3 + \sigma_2 \operatorname{Re} d_4]\},$$

$$C_k = k^4\{\delta_1 k^2 |d_1|^2 + |w_0|^2[\operatorname{Im} d_1(\sigma_2 \operatorname{Im} d_4 + \delta_1 \operatorname{Im} d_3) + \operatorname{Re} d_1(\sigma_2 \operatorname{Re} d_4 - \delta_1 \operatorname{Re} d_3)]\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $(\operatorname{Re} d_2)(\operatorname{Re} d_3) < 0$ *и выполнены условия невырожденности* $\delta_1 > 0$, $\operatorname{Re} d_1 > 0$ *и* $\operatorname{Re} \lambda_{jk} \neq 0$ $(j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \ldots)$, *где* λ_{jk} — *корни многочлена* $p_k(\lambda)$. *Тогда тор* $\tilde{v}(t, \varepsilon)$ *устойчив, если* $\operatorname{Re} d_3 < 0$ *и* $\operatorname{Re} \lambda_{jk} < 0$ $(j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, \ldots)$ *и неустойчив, если либо* $\operatorname{Re} d_3 > 0$, *либо найдутся такие* j_0 *и* k_0, *что* $\operatorname{Re} \lambda_{j_0 k_0} > 0$.

Доказательство этой теоремы проводится по стандартной схеме, но довольно громоздко. Поэтому приводить его здесь не будем.

3. О периодических краевых условиях. Динамика уравнения (1) с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv (t, x) \qquad (12)$$

имеет свои особенности. Например, при условии, что все, кроме одного, мультипликаторы системы (3) при $\lambda = 0$ и все мультипликаторы этой системы при $\lambda > 0$ лежат внутри единичного круга, для каждого номера $k = 0, 1, 2, \dots$ существует [1] (при достаточно малых ε) устойчивое периодическое решение краевой задачи (1), (12) вида $v_k(t, x, \varepsilon) = v_0(t_1 + kT_0(2\pi)^{-1}x) + O(\varepsilon)$, $t_1 = (1 + O(\varepsilon))\,t$. В условиях теоремы 1 и в случае краевых условий (12) приходим к системе уравнений вида (9), (10), но в отличие от (12) краевые условия здесь такие:

$$w(\tau, x+2\pi) \equiv w(\tau, x), \quad \tilde{s}(\tau, x+2\pi) \equiv s(\tau, x) + kT_0 \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \qquad (13)$$

Таким образом, возникает семейство краевых задач (9), (10), (13), зависящих от целочисленного параметра k. Для каждой из них справедлив аналог теоремы 1. Отметим, что периодическому решению $w(\tau, x)$ задачи (9), (10), (13) при условии $\partial w/\partial\tau \not\equiv \mathrm{const}\ \partial w/\partial x$ (и при некоторых условиях типа общности положения) отвечает трехмерный тор (а не двумерный, как в случае условий (2)) в (1), (12).

Приведем критерий устойчивости торов в краевой задаче (1), (12), которые отвечают простейшим периодическим решениям в задачах (9), (10), (13) вида

$$w_{nr}(\tau, x) = w_{nr} \exp i[\alpha_{nr}\tau + nx],$$
$$\tilde{s}_{nr}(\tau, x) = rT_0(2\pi)^{-1}x + \tilde{s}_{nr}\tau; \qquad r, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Из (9), (10) находим

$$|w_{nr}|^2 = \mathrm{Re}\,[n^2 d_1 - d_2 - d_5 r^2 T_0^2 (2\pi)^{-2} + 2ind_4 rT_0(2\pi)^{-1}]\,(\mathrm{Re}\,d_3)^{-1},$$
$$\alpha_{nr} = \mathrm{Im}\,[-n^2 d_1 + d_2 + d_3|w_{nr}|^2 + 2ind_4 rT_0(2\pi)^{-1} + d_5 r^2 T_0^2 (2\pi)^{-2}],$$
$$\tilde{s}_{nr} = \sigma_1 + \sigma_2|w_{nr}|^2 + \delta_2 r^2 T_0^2 (2\pi)^{-2}.$$

Введем в рассмотрение семейство 3×3 матриц $P_{knr} = \{p_{ej}(knr)\}_{e,j=1,2,3}$, где

$$p_{11}(knr) = \mathrm{Re}\,(-k^2 d_1 + 2|W_{nr}|^2 d_3) + 2ik\,\mathrm{Re}\,[ind_1 + rT_0(2\pi)^{-1}d_4],$$
$$p_{12}(knr) = \mathrm{Im}\,k^2 d_1 - 2ik\,\mathrm{Im}\,[ind_1 + rT_0(2\pi)^{-1}d_4],$$
$$p_{13}(knr) = -k^2\,\mathrm{Re}\,d_1 + 2ik\,\mathrm{Re}\,[ind_4 + rT_0(2\pi)^{-1}d_5],$$
$$p_{21}(knr) = -\mathrm{Im}\,k^2 d_1 + 2ik\,\mathrm{Im}\,[ind_1 + rT_0(2\pi)^{-1}d_4],$$
$$p_{22}(knr) = p_{11}(knr) - 2|w_{nr}|^2\,\mathrm{Re}\,d_3,$$
$$p_{23}(knr) = -\mathrm{Im}\,k^2 d_4 + 2ik\,\mathrm{Im}\,[ind_4 + rT_0(2\pi)^{-1}d_5],$$
$$p_{31}(knr) = 2\sigma_2|w_{nr}|^2, \quad p_{32}(knr) = 0, \quad p_{33}(knr) = -k^2\delta_1 + 2ik\delta_2 rT_0(2\pi)^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть для некоторых фиксированных номеров n и r выполнено неравенство $|w_{nr}|^2 > 0$ и при каждом $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ вещественные части всех собственных значений матриц P_{knr} отличны от нуля. Тогда найдется такое $\varepsilon_{nr} > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{nr})$* краевая задача (1), (12) имеет двумерный тор

$$v_{nr}(t, x, \varepsilon) = v_0(\bar{s}) + \sqrt{\varepsilon}\,(W_{nr}E_0(\bar{s}) \exp i\varphi t_1 + \overline{W}_{nr}\overline{E}_0(\bar{s}) \exp(-i\varphi t_1)) + O(\varepsilon),$$

где

$$\bar{s} = \int_0^t (1 + \varepsilon\tilde{s}_{nr} + o(\varepsilon))\, d\tau + rT_0 (2\pi)^{-1} x,$$

$$t_1 = \int_0^t [1 + \varepsilon\alpha_{nr} + o(\varepsilon)]\, d\tau + nx.$$

Этот тор устойчив, если $\operatorname{Re} d_3 < 0$ и все собственные значения матриц P_{knr}, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеют отрицательные вещественные части, и неустойчив, если либо $\operatorname{Re} d_3 > 0$, либо найдется такой номер k_0, что у матрицы $P_{k_0 nr}$ есть собственное значение с положительной вещественной частью.

4. Критические случаи второго типа. Основное предположение здесь состоит в том, что при $\lambda = 0$ все кроме одного мультипликатора (3) по модулю меньше единицы, и при $\lambda = \lambda_0 > 0$ система (3) имеет простой мультипликатор $\mu_0 = 1$, а все остальные мультипликаторы и все мультипликаторы (3) при $\lambda > 0$ и $\lambda \neq \lambda_0$ по модулю меньше, чем 1. Кроме этого полагаем, что выполнены условия типа невырожденности

$$\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant c\lambda^{-1} \text{ при } 0 < \lambda < \frac{1}{2}\lambda_0,$$
$$\| L^{-1}(\lambda) \| \leqslant c\,|\lambda - \lambda_0|^{-1} \text{ при } \frac{1}{2}\lambda_0 \leqslant \lambda, \quad \lambda \neq \lambda_0, \tag{14}$$

где $c > 0$ не зависит от λ. В отличие от результатов предыдущих пунктов при сделанных предположениях установившиеся режимы формируются «вокруг» оси порядка $\varepsilon^{-1/2}$, т. е. являются быстро осциллирующими по пространственной переменной. Положим $n(\varepsilon) = (\lambda_0\varepsilon^{-1})^{1/2} + \theta$, где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ и определяется условием $n(\varepsilon) \in Z$ ($n(\varepsilon)$—целое). Отсюда $\theta(\varepsilon) = (\lambda_0\varepsilon^{-1})^{1/2} - \{(\lambda_0\varepsilon^{-1})^{1/2}\}$. Через $E(t)$ обозначим периодическое (ненулевое) решение (3) при $\lambda = \lambda_0$, а через $H_0(t)$ — периодическое решение сопряженной к (3) (при $\lambda = \lambda_0$) системы уравнений. Следующее предположение типа невырожденности заключается в том, что

$$\int_0^{T_0} (\dot{v}_0(t), H_0(t))\, dt \neq 0. \tag{15}$$

Зафиксируем произвольно функции $z_1(\tau, x)$, $z_2(\tau, x)$, которые определены при $\tau \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$, принадлежат пространству $C^{1,2}_{[0,\infty)\times[0,1]}$ (т. е. $z_j(\tau, x)$, $\partial z_j(\tau, x)/\partial\tau$, $\partial z_j(\tau, x)/\partial x$, $\partial^2 z_j(\tau, x)/\partial x^2 \in C_{[0,\infty)\times[0,1]}$ и удовлетворяют краевым условиям

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{x=1} = z_2\,|_{x=0} = z_2\,|_{x=1} = 0. \tag{16}$$

Положим затем

$$\begin{aligned} u(s, \tau, x) = v_0(s) &+ \sqrt{\varepsilon}\,[z_1(\tau, x) E(s) \cos n(\varepsilon) x + z_2(\tau, x) E(s) \sin n(\varepsilon) x] + \\ &+ \varepsilon\,[u_{20}(s, \tau, x) + u_{21}(s, \tau, x) \cos n(\varepsilon) x + u_{22}(s, \tau, x) \sin n(\varepsilon) x] + \\ &+ u_{23}(s, \tau, x) \cos 2n(\varepsilon) x + u_{24}(s, \tau, x) \sin 2n(\varepsilon) x] + \varepsilon^{3/2}\,[u_{30}(s, \tau, x) + \\ &+ u_{31}(s, \tau, x) \cos n(\varepsilon) x + u_{32}(s, \tau, x) \sin n(\varepsilon) x + u_{33}(s, \tau, x) \cos 2n(\varepsilon) x + \\ &+ u_{34}(s, \tau, x) \sin 2n(\varepsilon) x + u_{35}(s, \tau, x) \cos 3n(\varepsilon) x + u_{36}(s, \tau, x) \sin 3n(\varepsilon) x], \end{aligned} \tag{17}$$

$$S_\varepsilon(t, x) = t + s_0(\tau, x) + \sqrt{\varepsilon_1 s_1}(\tau, x), \tag{18}$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $s_0(\tau, x)$ — решение краевой задачи вида

$$\frac{\partial s_0}{\partial \tau} = \delta_1 \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} + \delta_2 \left(\frac{\partial s_0}{\partial x}\right)^2 + \sigma_1 + \sigma_2 (z_1^2 + z_2^2) + \sigma_3 \frac{\partial s_0}{\partial x} [z_2 \cos n(\varepsilon) x -$$

$$- z_1 \sin n(\varepsilon) x], \quad \left.\frac{\partial s_0}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial s_0}{\partial x}\right|_{x=1} = 0. \qquad (19)$$

Отметим, что функция $s_0(\tau, x)$ определена при $\tau \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$ и при $\tau \to \infty$ может возрастать по модулю не быстрее некоторой линейной по τ функции. Этот вывод следует из того простого факта, что в результате замены $s_0 = \delta_1 \delta_2^{-1} \ln \xi$ (при $\delta_2 \neq 0$) приходим к линейной по ξ краевой задаче. Фигурирующие в (17) функции $u_{kj}(s, \tau, x)$ ограничены при τ, $s \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$. Они и функция $s_1(\tau, x)$ определяются из условий, что $u(s, \tau, x)$ при $s = S_\varepsilon(t, x)$ удовлетворяют задаче (1), (2) с точностью до $O(\varepsilon_2)$. Отсюда получаем такое утверждение.

Теорема 4. *Для произвольных функций* $z_j(\tau, x) \in C^{1,2}_{[0,\infty)\times[0,1]}$ ($j = 1, 2$) *формула* (17), *где* $s = S_\varepsilon(t, x)$, *определяет асимптотическое с точностью до* $O(\varepsilon^2)$ *по невязке решение (при* $\tau \in [0, \infty)$, $x \in [0, 1]$) *краевой задачи* (1), (2).

Обратим внимание на принципиальное отличие рассмотренной ситуации от той, которая имеет место в критических случаях тоже второго типа при изучении решений в окрестности состояния равновесия. Там функции $z_j(\tau, x)$ были определены как установившиеся режимы специальных краевых задач [6].

Подобные структуры асимптотических по невязке режимов краевых задач (1), (2) и (1), (12) наблюдаются и при исследовании других критических случаев второго типа. Наиболее существенные усложнения, которые могут здесь возникать, связаны с появлением специальной (например, периодической) зависимости от t в коэффициентах при $\partial s/\partial x$ уравнения (19).

1. *Кащенко С. А.* Асимптотика периодических решений автономных параболических уравнений с малой диффузией // Сиб. мат. журн.— 1986.— 27, № 6.— С. 116—126.
2. *Кащенко С. А.* Исследование асимптотики периодических решений автономных параболических уравнений с малой диффузией.— М., 1985.— 65 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 388—85.
3. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. Моск. Мат. о-ва.— 1972.— 26.— С. 199—239.
4. *Sacker R. I.* On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations.— New York, 1964.— P. 717—732.— (Reprt/New York Univ. IMM—NYU; 333).
5. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 304 с.
6. *Кащенко А. А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР.— 1988.— 299, № 5.— С. 1049—1052.
7. *Двухкомпонентные* диссипативные системы в окрестности точки бифуркации / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский // Математическое моделирование. Процессы в нелинейных сферах.— М. : Наука, 1986.— С. 7—59.

Получено 28.06.89