УДК 519.21

О. И. КЛЕСОВ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Теорема восстановления для случайного блуждания с многомерным временем

Рассматриваются суммы $S(m, n) = \sum_{i \leqslant m} \sum_{j \leqslant n} X(i, j)$ независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $X(i, j)$ и $U(x) = \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} P(S(m, n) \leqslant x)$ —

аналог функции восстановления для случайного блуждания $\{S(m, n)\}$ с многомерным временем. Изучается поведение $U(x)$ при $x \to \infty$.

Розглядаються суми $S(m, n) = \sum\limits_{i \leqslant m} \sum\limits_{j \leqslant n} X(i, j)$ незалежних однаково розподілених випадкових величин $X(i, j)$ та $U(x) = \sum\limits_{m \geqslant 1} \sum\limits_{n \geqslant 1} P(S(m, n) \leqslant x)$ — аналог функції відновлення для випадкового блукання $\{S(m, n)\}$ є багатовимірним часом. Вивчається поведінка $U(x)$, коли $x \to \infty$.

Пусть $\{X(m, n),\ m \geqslant 1,\ n \geqslant 1\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $X(m, n) \geqslant 0$ почти наверное и обозначим $X = X(1,1)$, $F(t) = P(X < t)$. Определим функцию $U(x)$, $x > 0$, следующим образом:

$$U(x) = \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} P(S(m, n) \leqslant x),$$

где $S(m, n) = \sum\limits_{i \leqslant m} \sum\limits_{j \leqslant n} X(i, j)$. Последовательность $\{S(m, n), m \geqslant 1,\ n \geqslant 1\}$ будем называть случайным блужданием с двумерным временем, а функцию $U(x)$ — функцией восстановления для такого блуждания. В этой статье изучается вопрос об асимптотике $U(x)$ при $x \to \infty$, являющийся одним из основных в теории восстановления в классическом случае одномерного времени. Для многомерного времени этот вопрос изучался в работах [1—5] для целочисленного блуждания и приращений $\Delta U(x) = U(x) - U(x-1)$ с натуральными x. Лучшим результатом в этом направлении пока является следующий [5]:

$$\Delta U(x) \sim \log x/\mu \ \text{ при } \ x \to \infty,$$

если X — положительная целочисленная случайная величина с конечным вторым моментом, $\mu = MX$ и $M \exp\{itX\} \neq 1$ ни для какого $t \neq 0$. Если рассматривать $U(x)$, а не $\Delta U(x)$, то моментные условия можно ослабить по сравнению с условиями из работ [1—5].

При изучении асимптотики $U(x)$ основную роль играет асимптотика $T_k = \tau_1 + \ldots + \tau_k$, $k \geqslant 2$ $(T_0 = 0,\ T_1 = \tau_1)$, где τ_k обозначает количество решений в натуральных числах уравнения $mn = k$. Исследования асимптотики T_k начаты Дирихле, который показал, что

$$T_k = k \ln k + (2\gamma - 1) k + O(k^{2/3} (\ln k)^2) \ \text{ при } \ k \to \infty,$$

где γ — это константа Эйлера: $\gamma = \lim\limits_{N \to \infty} \left(\sum\limits_{k \leqslant N} 1/k - \ln N \right) = 0{,}5772\ldots$. В настоящее время известны и более точные результаты, но для наших целей достаточно, чтобы

$$T_k = k \ln k + (2\gamma - 1) k + d_k, \quad d_k = o(k^{3/4}). \tag{1}$$

Если обозначить $S_k = \sum\limits_{i \leqslant k} X(i, 1)$, то $\{S_k, k \geqslant 1\}$ будет обычным случайным блужданием. Пусть также $P_k(x) = P(S_k < x)$. В этих обозначениях $U(x) = \sum\limits_{k \geqslant 1} \tau_k P_k(x)$. Если распределение F не сосредоточено в 0, то $S_k \to \infty$ по вероятности и поэтому для любого $x > 0$ найдется натуральное r, при котором $P_r(x) < 1$. Так как для любого $i \geqslant 1$ $P_{ir}(x) \leqslant (P_r(x))^i$, то в силу монотонности $P_k(x)$ имеет место

$$U(x) = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{ri \leqslant j < r(i+1)} \tau_j P_j(x) \leqslant \text{const} \sum_{i \geqslant 1} t \ln(2i) P_r^i(x) < \infty.$$

Таким образом, $U(x) < \infty$, если распределение F не сосредоточено в 0.

Применяя преобразование Абеля, можно записать

$$U(x)=\lim_{N\to\infty}\left[T_N P_N(x)+\sum_{k\leqslant N-1} T_k(P_k(x)-P_{k+1}(x))\right].$$

Если воспользоваться разложением (1), то

$$U(x)=\lim_{N\to\infty}[U_N^1(x)+U_N^2(x)+U_N^3(x)],$$

где

$$U_N^1(x)=N\ln NP_N(x)+\sum_{k\leqslant N-1} k\ln k(P_k(x)-P_{k+1}(x)),$$

$$U_N^2(x)=(2\gamma-1)\left(NP_N(x)+\sum_{k\leqslant N-1} k(P_k(x)-P_{k+1}(x)\right),$$

$$U_N^3(x)=d_N P_N(x)+\sum_{k\leqslant N-1} d_k(P_k(x)-P_{k+1}(x)\right).$$

Если обозначить $l_0=l_1=0$, $l_k=k\ln k$, $k\geqslant 2$, то

$$\lim_{N\to\infty} U_N^1(x)=\sum_{k\geqslant 1}(l_k-l_{k-1})P_k(x),$$

$$\lim_{N\to\infty} U_N^2(x)=(2\gamma-1)\sum_{k\geqslant 1}P_k(x). \tag{2}$$

Так как $P_k(x)\geqslant P_{k+1}(x)$, то

$$U_N^3(x)\leqslant \mathrm{const}\left[N^{3/4}P_N(x)+\sum_{k\leqslant N-1} k^{3/4}(P_k(x)-P_{k+1}(x))\right]$$

и поэтому

$$\lim_{N\to\infty} U_N^3(x)\leqslant \mathrm{const}\sum_{k\geqslant 1} k^{-1/4}P_k(x). \tag{3}$$

Так как $l_k-l_{k-1}=1+\ln\xi_k$ для некоторого числа ξ_k: $k-1\leqslant\xi_k\leqslant k$ и $\ln k-\ln\xi_k\leqslant 1/(k-1)$, $k\geqslant 2$, то

$$\lim_{N\to\infty} U_N^1(x)=\sum_{k\geqslant 1}\ln kP_k(x)+c(x), \tag{4}$$

причем $c(x)\leqslant P(S_1\leqslant x)+2\sum_{k\geqslant 2}P_k(x)/k$. Итак, в силу (2) — (4)

$$U(x)=2\gamma\sum_{k\geqslant 1}P_k(x)+\sum_{k\geqslant 1}\ln kP_k(x)+b(x), \tag{5}$$

где $b(x)\leqslant\mathrm{const}\sum_{k\geqslant 1}P_k(x)/k^{1/4}$. Представление (5) будет основным при изучении асимптотики $U(x)$. Первое слагаемое в (5) представляет собой обычную функцию восстановления для блуждания $\{S_k\}$, умноженную на 2γ. Третье слагаемое по лемме 1 является $o(1)$, а второе слагаемое изучается в теоремах 1—2.

Лемма 1. *Пусть* $0\leqslant\lambda_n\downarrow 0$ *и* $0<\mu=MX<\infty$. *Тогда*

$$(1/x)\sum_{k\geqslant 1}\lambda_k P_k(x)\to 0,\quad x\to\infty.$$

Доказательство. Выберем последовательность натуральных чисел $m(x)$ таким образом, что $(1/x)\sum_{k\leqslant m(x)}\lambda_k\to 0$, $x\to\infty$. Тогда при $x\to\infty$

$$(1/x)\sum_{k\geqslant 1}\lambda_k P_k(x)\leqslant(1/x)\sum_{k\leqslant m(x)}\lambda_k+(\lambda_{m(x)}/x)\sum_{k\geqslant 1}P_k(x)\to 0$$

в силу выбора последовательности $m(x)$ и теоремы восстановления для одномерного времени [6], гл. 9, теорема 4.

В теореме 1 асимптотика $U(x)$ устанавливается при классическом условии.

Теорема 1. *Из условия* $0 < \mu = MX < \infty$ *вытекает, что при* $x \to \infty$

$$U(x)/(x \ln x) \to 1/\mu.$$

Доказательство. В силу представления (1) и леммы 1

$$U(x)/(x \ln x) = (1/x \ln x) \sum_{k \geqslant 1} \ln k P_k(x) + o(1). \tag{6}$$

Положим $y = x/\mu$ и заметим, что

$$(1/m) \sum_{k \leqslant m} \ln k - \ln m \to -1, \quad m \to \infty. \tag{7}$$

В силу (7)

$$(1/x \ln x) \sum_{k \leqslant y} \ln k - (1/\mu) \to 0, \quad x \to \infty, \tag{8}$$

и поэтому

$$(1/x \ln x) \sum_{k \geqslant 1} \ln k P_k(x) = -(1/x \ln x) \sum_{k \leqslant y} \ln k P(S_k > x) +$$
$$+ (1/x \ln x) \sum_{k > y} \ln k P_k(x) \equiv -G_1(x) + G_2(x). \tag{9}$$

Выберем $0 < c < 1 < C$. Понятно, что

$$G_1(x) = (1/x \ln x) \sum_{k \leqslant cy} \ln k P(S_k > x) + (1/x \ln x) \sum_{cy < k \leqslant y} \ln k P(S_k > x) \leqslant$$
$$\leqslant P(S_{[cy]} > x)\, cy \ln cy / x \ln x + (\ln y / x \ln x)\, y (1 - c),$$

где $[cy]$ обозначает целую часть cy. В силу закона больших чисел $P(S_{[cy]} > x) \to 0$ при $x \to \infty$ и, следовательно,

$$G_1(x) \leqslant (1 - c)/\mu + o(1). \tag{10}$$

Для функции $G_2(x)$ справедливы следующие оценки:

$$G_2(x) \leqslant (C - 1)/\mu + o(1) + (1/x \ln x) \sum_{k > cy} \ln k P_k(x).$$

Пусть $a > 0$, $X^a(m, n) = X(m, n) I(X(m, n) \leqslant a)$, где $I(\cdot)$ — индикаторная случайная величина, $\mu(a) = MX^a(m, n)$, $S_k^a = \sum_{i \leqslant k} X_i^a$. Выберем a таким, чтобы $C\mu(a) > \mu$ и отметим, что

$$P_k(x) \leqslant P(S_k^a \leqslant x) \leqslant P(|S_k^a - k\mu(a)| \geqslant k(1/\mu(a) - \mu/C))$$

в области $k \geqslant Cy$. Если положить $\delta = 1/\mu(a) - \mu/C$, то в силу неравенства Маркова получим

$$P_k(x) \leqslant (\mathrm{const}/\delta^4 k^4)\, k^2 M (X^a - \mu^{(a)})^4 \leqslant \mathrm{const}/K^2.$$

Таким образом,

$$G_2(x) \leqslant (C - 1)/\mu + o(1). \tag{11}$$

Для окончания доказательства теоремы 1 достаточно объединить (6), (8)—(11) и воспользоваться произвольностью c и C.

Теорему 1 можно уточнить, но при этом придется сделать дополнительные предположения о распределении F. Метод доказательства приведенной далее теоремы 2 в целом такой же, как и метод доказательства теоремы 1, но с необходимыми уточнениями, опирающимися на следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ — *независимые одинаково распределенные случайные величины,* $\xi=\xi_1$, $\zeta_n=\sum_{k\leqslant n}\xi_k$ *и* $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$. *Если выполнены условия*

$$t(\ln t)^{\alpha+\beta}P(|\xi|\geqslant t)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{12}$$

$$(\ln t)^{\beta}\int_{-t}^{t} s\,dP(\xi<s)\to 0,\quad t\to\infty, \tag{13}$$

то для любого $\varepsilon>0$

$$(\ln n)^{\alpha}P(|\zeta_n|\geqslant \varepsilon n/(\ln n)^{\beta})\to 0,\quad n\to\infty.$$

Лемма 2 при $\alpha=\beta=0$ сводится к закону больших чисел, а при $\alpha>0$, $\beta=0$ может трактоваться как утверждение о скорости сходимости в законе больших чисел. Лемма 2 будет использоваться при доказательстве теоремы 2 при $\alpha=\beta=1$. Доказательство леммы 2 приведено в конце этой статьи.

Теорема 2. *Пусть* $0<\mu=MX<\infty$ *и*

$$n(\ln n)^2P(X\geqslant n)\to 0\ \text{при}\ n\to\infty.$$

Тогда

$$U(x)/x-\ln x/\mu\to 2\gamma/\mu-1+\ln\mu/\mu\ \text{при}\ x\to\infty.$$

Доказательство. В силу леммы 1 и представления (5)

$$U(x)/x=2\gamma/\mu+(1/x)\sum_{k\geqslant 1}\ln kP_k(x)+o(1). \tag{14}$$

Как и раньше, положим $y=x/\mu$ и получим

$$(1/x)\sum_{k\geqslant 1}\ln kP_k(x)=(1/x)\sum_{k\leqslant y}P_k(x)+(1/x)\sum_{k>y}\ln kP_k(x)\equiv G_1(x)+G_2(x). \tag{15}$$

Вследствие (7) $(1/x)\sum_{k\leqslant y}\ln k\to\ln\mu/\mu-1$ при $x\to\infty$, и поэтому $G_1(x)-\ln x/\mu=-(1/x)\sum_{k\leqslant y}\ln kP(S_k>x)$. Пусть $\varepsilon>0$, $\varphi(y)=\varepsilon y/\ln y$. В этих обозначениях имеем

$$|G_1(x)-\ln x/\mu|\leqslant(1/x)\sum_{y-\varphi(y)\geqslant k}\ln kP(S_k>x)+(1/x)\sum_{y-\varphi(y)<k\leqslant y}\ln kP(S_k>x)\leqslant(1/x)\sum_{k\leqslant y-\varphi(y)}\ln kP(|S_k-k\mu|>x-k\mu)+\varphi(y)\ln y/x\leqslant$$
$$\leqslant(1/x)\sum_{k\leqslant y}\ln kP(|S_k-k\mu|>\varphi(y))+\varepsilon/\mu.$$

Так как $M\xi_k=0$ для $\xi_k=X_k-\mu$, то условие (13) вытекает из условия (12). В соответствии с леммой 2 при $k\to\infty$ $\ln kP(|S_k-k\mu|>\varphi(y))\to 0$ и поэтому

$$|G_1(x)-\ln x/\mu|\leqslant\varepsilon/\mu+o(1). \tag{16}$$

Далее, используя обозначения, введенные при доказательстве теоремы 1, получаем для любого $a>0$

$$G_2(x)\leqslant(1/x)\sum_{y<k\leqslant y+\varphi(y)}\ln kP(S_k<x)+(1/x)\sum_{2y\geqslant k>y+\varphi(y)}\ln kP(S_k^a<x)+$$
$$+(1/x)\sum_{k>2y}\ln kP(S_k^a<x)\leqslant\varepsilon/\mu+(1/x)\sum_{2y\geqslant k>y+\varphi(y)}P(|S_k-k\mu|>\varphi(y))+$$
$$+(1/x)\sum_{k>2y}\ln kP(|S_k^a-k\mu(a)|>k\mu(a)-x).$$

Если выберем теперь a таким, что $\mu(a) > \mu/2$, то докажем, что

$$G_2(x) \leqslant (\varepsilon/\mu) + o(1) + \mathrm{const}/(x\delta^4) \sum_{k>2y} \ln k/k^2,$$

где $\delta = \mu - \mu(a)$. Используя (14) — (16), окончательно получаем

$$U(x)/x = \ln x/\mu + 2\gamma/\mu - 1 + \ln \mu/\mu + 2\varepsilon/\mu + o(1),$$

что и доказывает теорему 2 в силу произвольности ε.

Замечания 1. И в теореме 1, и в теореме 2 получено представление $U(x) - L(x) = -G_1(x) + G_2(x)$, где $G_1(x) \geqslant 0$, $G_2(x) \geqslant 0$, $L(x) = 1/\mu$ в теореме 1 и $L(x) = \ln x/\mu + 2\gamma/\mu - 1 + \ln \mu/\mu$ в теореме 2. Условия теорем 1 и 2 гарантировали, что $G_1(x) \to 0$, $G_2(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Можно показать, что условия теорем 1 и 2 эквивалентны $G_1(x) \to 0$, $G_2(x) \to 0$ при $x \to \infty$, поэтому правдоподобным кажется предположение, что условия теорем 1 и 2 эквивалентны $U(x) - L(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Доказательством этого утверждения автор не располагает.

2. Пусть $d \geqslant 1$ и N^d обозначает пространство d-мерных векторов с натуральными координатами. Пусть символ $\leqslant$ обозначает покоординатную упорядоченность в N^d. Рассмотрим набор $\{X(\bar{n}), \bar{n} \in N^d\}$ независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Положим $X = X(1, \ldots, 1)$, $|\bar{n}| = n_1 \ldots n_j$, $S(\bar{n}) = \sum_{\bar{k} \leqslant \bar{n}} X(\bar{k})$ и определим функцию восстановления

$$U_d(x) = \sum_{\bar{n} \in N^d} P(S(\bar{n}) \leqslant x) = \sum_{k \geqslant 1} \tau_k P_k(x),$$

где $\tau_k = \tau_k(d)$ — число решений уравнения $|\bar{n}| = k$. Пусть также $P_k(x) = P(S_k \leqslant x)$, $S_k = \sum_{i \leqslant k} X(i, 1, \ldots, 1)$. Для функции восстановления $U_d(x)$ вопрос об асимптотике при $x \to \infty$ также представляет интерес. Метод теорем 1 и 2 почти без изменений переносится и на случай $d > 2$. Важным при этом остается вопрос об асимптотике $T_k = T_k(d) = \tau_1 + \ldots + \tau_k$ при $k \to \infty$. Аналогом разложения (1) для $d > 2$ служит разложение

$$T_k = k\mathcal{P}_{d-1}(\ln k) + Q(k), \quad Q(k) = o(k^t),$$

где $1 > t > 1 - (1/d)$, $\mathcal{P}_{d-1}(z) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant d-1} a_m z^m$ — полином степени $d - 1$. Коэффициенты этого полинома могут быть получены из интегрального представления T_k, причем $a_{d-1} = 1/(d-1)!$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \mu = MX < \infty$. *Тогда*

$$U_d(x)/x(\ln x)^{d-1} \to 1/\mu(d-1)! \quad \text{при } x \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < \mu = MX < \infty$ *и*

$$t(\ln t)^d P(X \geqslant t) \to 0 \ \text{при } t \to \infty.$$

Тогда при $x \to \infty$

$$U_d(x)/x - (1/\mu) + R_{d-1}(\ln(x/\mu)) \to 0,$$

где $R_{d-1}(z) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant d-1} b_m z^m$ — *полином степени* $d - 1$, *причем* $b_m = ((-1)^m/m!) \sum_{m \leqslant i \leqslant d-1} (-1)^i i! a_i$.

Сказанное в замечании 1 о необходимости условий теорем 1 и 2 относится к условиям теорем 3 и 4.

Доказательство леммы 2. Для $k \leqslant n$ положим

$$\xi_{kn} = \xi_k I(|\xi_k| \leqslant n/(\ln n)^\beta), \quad \zeta_{nn} = \sum_{k \leqslant n} \xi_{kn}.$$

Так как

$$\{\omega : |\zeta_n| \geqslant \varepsilon n/(\ln n)^\beta\} \subseteq \{\omega : \max_{k \leqslant n} |\xi_{kn}| \geqslant n/(\ln n)^\beta\} \cup \{\omega : |\zeta_{nn}| \geqslant \varepsilon n/(\ln n)^\beta\}$$

и в силу (13) для достаточно больших s

$$\left| \int_{|t| \leqslant n/(\ln n)^\beta} t dP(\xi < t) \right| \leqslant (\varepsilon/2) n/(\ln n)^\beta,$$

то

$$P(|\zeta_n| \geqslant \varepsilon n/(\ln n)^\beta) \leqslant nP(|\xi| \geqslant n/(\ln n)^\beta) + \\ + P(|\zeta_{nn} - nM\xi_{1n}| \geqslant (\varepsilon/2) n/(\ln n)^\beta).$$

Следовательно,

$$(\ln n)^\alpha P(|\zeta_n| \geqslant \varepsilon n/(\ln n)^\beta) \leqslant n(\ln n)^\alpha P(|\xi| \geqslant n/(\ln n)^\beta) + \\ + (4/\varepsilon^2 n)(\ln n)^{\alpha+2\beta} M(\xi_{1n} - M\xi_{1n})^2. \tag{17}$$

Первое слагаемое в правой части (17) стремится к 0 в силу условия (12). Это же справедливо по отношению ко второму слагаемому в правой части (17), так как для $T_n = n/(\ln)^\beta$ справедливы неравенства

$$((\ln n)^{\alpha+2\beta}/n) M(\xi_{1n} - M\xi_{1n})^2 \leqslant ((\ln n)^{\alpha+2\beta}/n) M\xi_{1n}^2 = ((\ln T_n)^{\alpha+\beta}/T_n) \times \\ \times \int_{|t| \leqslant T_n} t^2 dP(\xi < t) \leqslant 2((\ln T_n)^{\alpha+\beta}/T_n) \int_0^{T_n} tP(|\xi| \geqslant t)\, dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Лемма 2 доказана.

1. *Ney P., Wainger S.* The renewal theorem for a random walk in two-dimensional time // Stud. math.— 1972.— 46.— P. 71—85.
2. *Maejima M., Mori T.* Some renewal theorems for random walks in multidimensional time // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.— 1984.— 95, N 1.— P. 149—154.
3. *Galambos J., Katai I.* A note on random walks in multidimensional time // Ibid.— 1986.— 99, N 1.— P. 163—170.
4. *Galambos J., Katai I.* Some remarks on random walks in multidimensional time // Proc. 5-th Pannonian Sympos. on Math. Statist. (Visegrad, Hungary, 1985).— Dordrecht: Reidel, 1986.— P. 65—74.
5. *Galambos J., Indlekofer K.-H., Katai I.* A renewal theorem for random walks in multidimensional time // Trans. Amer. Math. Soc.— 1987.— 300, N 2.— P. 759—769.
6. *Боровков А. А.* Теория вероятностей.— М. : Наука, 1986.— 431 с.

Получено 22.06.90