УДК 512.54:519.1

В. А. Устименко

Линейная интерпретация геометрий флагов групп Шевалле

Доказано, что геометрию флагов группы Шевалле можно получить из геометрии флагов ее группы Вейля с помощью конструкции линейного накрытия, введенной автором. При доказательстве используется интерпретация элементов геометрии группы Вейля векторами евклидового пространства такая, что инцидентность векторов определяется скалярным произведением между ними.

Доведено, що геометрію стягів групи Шевалле можна одержати із геометрії стягів її групи Вейля за допомогою конструкції лінійного накриття, введеного автором. При доведенні використовується інтерпретація елементів геометрії групи Вейля векторами евклідового простору така, що інцидентність векторів визначається скалярним добутком між ними.

Пусть (Γ, I, t) — некоторая система инцидентности. Это означает, что Γ — некоторое множество, I — симметричное бинарное отношение над Γ, t — типовая функция — отображение из Γ в конечное множество типов Ω [1]. Систему $(\tilde{\Gamma}, \tilde{I}, \tilde{t})$ назовем линейным раздутием над полем $\mathbf{F}$, если для некоторого множества Σ и знакопеременного билинейного умножения $*$ в пространстве $V = \{f : \Sigma \to \mathbf{F}\}$ найдется отображение $\eta : \Gamma \to 2^{\Sigma}$ такое, что $\tilde{\Gamma} = \{(\alpha, f) \mid \alpha \in \Gamma,\ f \in V \wedge \operatorname{supp} f \subset \eta(\alpha)\}$, $\tilde{t}(\alpha, f) = t(\alpha)$, $(\alpha, f)\, \tilde{I}\, (\beta, g) \Leftrightarrow f - g|_{\eta(\alpha)\cap\eta(\beta)} = f * g|_{\eta(\alpha)\cap\eta(\beta)} \wedge \alpha I \beta$ [2]. Как обычно, $\operatorname{supp} f = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ и $f|_A$ — ограничение функции f на подмножество A, $2^{\Sigma} = \{A \mid A \subset \Sigma\}$.

В [3] сформулирована теорема о том, что геометрия группы Шевалле нормального типа является линейным накрытием ее группы Вейля (см. также [2, 4]). В настоящей работе будет доказано более общее утверждение: геометрия флагов группы Шевалле — линейное накрытие геометрии флагов, соответствующей группы Вейля. Доказательство использует интерпретацию элементов геометрии группы Вейля векторами евклидова пространства такую, что инцидентность элементов определяется скалярным произведением между ними.

1. Предварительные сведения. Пусть G— группа Шевалле, определенная над полем k, L — соответствующая ей алгебра Ли [5]. Рассмотрим разложение Картана для L

$$L = L_0 + \sum_{r \in R} L_r,$$

где R — соответствующая система корней. В случае алгебраически замкнутого поля характеристики нуль G является группой внутренних автоморфизмов L, т. е. $G = \langle \exp(\operatorname{ad} x) \mid x \in L \wedge \operatorname{ad} x$ нильпотентно$\rangle$. С помощью базиса Шевалле для произвольного поля k определяют k-аналог $\bar{x}_r(t)$, $r \in R$, $t \in k$ автоморфизма $x_r(t)$ алгебры L, отображающего z в $\exp[e_r t, z]$. Тогда $G = \langle \bar{x}_r(t) \mid r \in R,\ t \in k\rangle$. Рассмотрим некоторые подгруппы G. Пусть $u = \langle \bar{x}_r(t) \mid t \in k,\ r \in R^+\rangle$, $N = \langle w_\alpha(t) = x_\alpha(t)\, x_{-\alpha}(t^{-1})\, x_\alpha(t) \mid \alpha \in R^+,\ t \in k\rangle$. Группа G является парой BN с $B = N_G(u)$. Подгруппа $W = \langle w_\alpha(1) \mid a \in R^+\rangle$ группы N изоморфна группе Вейля системы корней R.

Пусть Π — подмножество простых корней в R. Тогда для $S = \{w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ пара (W, S) является системой Коксетера. Подгруппы $W_J = \langle S - \{J\}\rangle$ и $P_J = BW_J B$, $J \subset S$, называют параболическими подгруппами в W и G соответственно.

Под геометрией $\Gamma(W)$ группы Вейля W понимают множество смежных классов $wW_{\{s\}}$ группы W по всевозможным подгруппам $W_{\{s\}}$, снабженное типовой функцией t: $wW_{\{s\}} \to s$ и отношением инцидентности I на $\Gamma(W) \times \Gamma(W)$: $\alpha I \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \varnothing$.

Множество $\Gamma F(W) = \{wW_J \mid w \in W,\ W_J = \langle S - J\rangle$ для $J \subset S$ вместе с $t_F(\alpha) = J$ для $\alpha = wW_J$ и отношением $I_F\{(\alpha, \beta) \in \Gamma F(W) \times \Gamma F(W) \mid \alpha \cap \beta \neq \varnothing\}$ назовем геометрией флагов группы W. Очевидно, что $\Gamma F(W)$ содержит $\Gamma(W)$ и ограничение I_F ни $\Gamma(W)$ совпадает с отношением J.

Аналогично определяют геометрию $\Gamma(G)$ группы Шевалле G: $\Gamma(G) = \bigcup_{s \in S} G/P_s$, $t(gP_s) = s$, $gP_{s_1} I gP_{s_2} \Leftrightarrow gP_{s_1} \cap gP_{s_2} \neq \varnothing$ [6]. Геометрия флагов группы G есть множество $\Gamma F(G) = \{gBW_J B \mid g \in G,\ J \subset S\}$ вместе с t: $gBW_J B \to J$ и $I_F = \{(\alpha, \beta) \in \Gamma F(G) \times \Gamma F(G) \mid \alpha \cap \beta \neq \varnothing\}$.

2. Линейная интерпретация геометрии группы Вейля. Рассмотрим абелеву группу L_z всех целочисленных линейных комбинаций элементов базиса Шевалле. Очевидно, что L_z замкнуто относительно лиевского умножения и ее можно рассматривать как кольцо Ли. Разложение $L_z = L_0^z + \sum_{r \in R} L_r^z$, где $L_r^z = \{t\varepsilon_r \mid t \in \mathbb{Z}\}$, $r \in R$, а L_0^z — целочисленная решетка

с базисом h_r, $r \in \Pi$, задает градуировку на L_z. Элементы $r \in R$ можно рассматривать как элементы L_0^z, отождествляя h_r и r для $r \in \Pi$. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица Картана группы Вейля W ($a_{ii} = 2$ при $i \neq j$, $a_{ij} \leqslant 0$), $\Pi = \{r_i\}$, $i = 1, \ldots, l$. Тогда отражение w_{r_i} переводит r_j в $r_j - a_{ij} r_i$ и $W = \langle w_{r_i}, i = 1, \ldots, l \rangle$ — группа симметрий целочисленной решетки L_0^z. Билинейная форма $(,)$ на $L' = L_0^z \otimes R$ такая, что $a_{ij} = \dfrac{2(r_i, r_j)}{(r_i, r_i)}$, инвариантна относительно W, невырождена и положительно определена. Ее называют канонической билинейной формой группы W. Пусть $\check{h}_i = \check{h}_{r_i}$, $i = 1, \ldots, l$, элементы дважды двойственного базиса к h_r, $r \in \Pi$, относительно $(,)$. Тогда $\mathbb{Z}$-решетка $Q(R)$ с базисом $\check{h}_r$, $r \in \Pi$, содержит все векторы L' такие, что $(x, h_r) \in \mathbb{Z}$ для всех $r \in \Pi$. $Q(R)$ содержит, в частности, все векторы L_0^z. Группа Вейля действует как группа изометрий евклидова пространства $(L', (,))$ и оставляет L_0^z и $Q(R)$ инвариантными.

Теорема 1. *Пусть W — группа Вейля конечной неприводимой системы корней R, $S = \{s_i\}$, где s_i — отражение относительно гиперплоскости ортогональной простому корню r_i, $i = 1, \ldots, l$. Для каждого $J \subset S$ рассмотрим вектор $\check{h}_J = \sum_{i \in J} \check{h}_i$ (сумму фундаментальных весов $\hat{h}_i$ по $i \in J$) и орбиту H_J группы преобразований $(W, Q(R))$, содержащую $\check{h}_J$, $J \subset S$. Тогда*

1) *группа W действует на множестве смежных классов W по W_J подобно (W, H_J);*

2) *пусть $\Gamma F(H) = \bigcup_{J \subset S} H_J$ и π — отображение из $\Gamma F(H_J$ в $\Gamma F(W)$, устанавливающее подобие $(W, \Gamma F(H))$ и $(W, \Gamma F(W))$. Для $\check{h}^J \in H_J$ и $\check{h}^K \in H_K$ элементы $\pi(\check{h}^J)$ и $\pi(\check{h}^K)$ инциденты в $\Gamma F(W)$ в точности тогда, когда выполнено одно из двух условий*

а) $(\check{h}^J, \check{h}^K) = (\check{h}_J, \check{h}_K)$;

б) $|\Delta^+(\check{h}^J) \cap \Delta^-(\hat{h}^K)| = |\Delta^-(\check{h}^J) \cap \Delta^+(\check{h}^K)| = 0$, *где для $\check{h} \in H$ множество $\Delta^+(\check{h})$ определяется как $\{r \in R^+ \mid (\check{h}, r) > 0\}$, $\Delta^-(\check{h}) = \{r \in R^+ \mid (\check{h}, r) < 0\}$.*

Доказательство. Утверждение 1 для случая одноэлементных подмножеств в S приведено в [6, с. 111]. Для того чтобы убедиться в его справедливости в общем случае, достаточно заметить, что стабилизатор точки $\check{h} = \sum_{i \in J} \check{h}_i$ в группе преобразований $(W, Q(R)$ совпадает с $\bigcap_{i \in J} W_{\check{h}_i}$. В частности, сумма всех фундаментальных весов лежит в фундаментальной области W. Необходимость и достаточность условия б) для инцидентности элементов $\pi(\check{h}^J)$ и $\pi(\check{h}^K)$ приведена при некоторых более общих предположениях в [7]. Наконец, в случае конечной системы корней условия а) и б) эквивалентны.

Следствие. *Пусть $\Gamma(H) = \bigcup_{i \in S} H_{\{i\}}$. Ограничение отображения π на $\Gamma(H)$ определяет подобие $(W, \Gamma(H))$ и $(W, \Gamma(W))$.*

Таким образом, теорема позволяет отождествить геометрию $\Gamma(W)$ с $\Gamma(H)$ (элементы $\check{h}^{\{i\}}$ и $\check{h}^{\{j\}}$ из $\check{h}$ полагаем инцидентными при выполнении условия а) или б)). Получаем «линейную интерпретацию $\Gamma(W)$».

3. Линейная интерпретация геометрий групп Шевалле. Будем предполагать, что $\operatorname{char} k = 0$. В этом случае $Q(R) \subset L_0^z \otimes Q \subset L_0 \subset L$. Обозначим через $\widehat{\Gamma F}$ объединение орбит группы u, имеющих непустое пересечение с $\Gamma F(H) = \bigcup_{J \in 2^S} H_J$.

Следующие леммы вытекают непосредственно из определений.

Лемма 1. *Произвольная орбита* $(u, \Gamma\tilde{F})$ *содержит единственный элемент* h *из* $\Gamma F(H)$.

Орбиту $(u, \Gamma\tilde{F})$, содержащую h из $\Gamma\tilde{F}(H)$ обозначим через $A(h)$. Таким образом, $\Gamma\tilde{F}$ есть раздельное объединение $A(h)$ по $h \in \Gamma F(H)$.

Для $x \in L$ проекцию на L_0 обозначим через x_0. Множество $\{r \in R \mid x_r \neq \neq 0\}$ обозначим через $s(x)$. Для $A \subset R$ через $x|_A$ обозначим проекцию $x = \sum_{r \in A} L_r$.

Лемма 2. *Пусть* $l \in A(h)$. *Тогда* $l_0 = h$ *и* $s(l) \subset \Delta^-(h) \cup \Delta^+(h) \subset R^+$.

Пусть φ_h означает ограничение отображения $x \to x|_{\Delta^+(h)}$ на $A(h)$.

Лемма 3. *Отображение* φ_h из $A(h)$ *в* $V_h = \sum_{r \in \Delta^+(h)} L_r$ *сюрьективно.*

Лемма 4. *Пусть* $h \in \Gamma F(H)$, *множества* $\langle x_r(t) \mid r \in \Delta^{\pm}(h),\ t \in k\rangle = = u^{\pm}(h)$ *являются подгруппами в* u.

В самом деле, множества $\Delta^{\pm}(h)$, $O(h) = R^+ - (\Delta^+(h) \cup \Delta^-(h))$ являются замкнутыми подмножествами корней в смысле [5].

Из уточненного разложения Брюа вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* G — *группа Шевалле* $P_J = BW_JB$, $J \subset S$ — *ее стандартная параболическая подгруппа. Тогда произвольный элемент смежного класса* gP_J *представляется в виде* $u^- whu$, *где* $w \in W$ *такой, что* $BgP_s = BwP_s$, $h \in H$, $u \in U$, u^- — *однозначно определенный элемент из* $u^+(\check{h})$ *для* $\check{h}$, *соответствующего* wW_J $(\hat{h} = \pi^{-1}(wW_J))$.

Замечание. Лемма 5 однозначно сопоставляет смежному классу gP_J и элемент $\check{h} = \pi^{-1}(wW_J) = r(gP_J)$.

Следствие. *Отображение* $r: \Gamma F(G) \to \Gamma F(H)$ *является морфизмом геометрий, т. е.* $\alpha I_F \beta \Rightarrow r(\alpha) I_\beta r(\beta)$ *для произвольных* α *и* β *из* $\Gamma F(G)$.

Отображение r называют ретрактом. Его свойства подробно рассматриваются в [8]. Очевидно, что функция r постоянна на орбитах группы U. Поэтому для орбиты A группы U можно определить $r(A) = r(x)$ для некоторого $x \in A$. Нам понадобиться следующее известное свойство r.

Лемма 6. *Предположим, что* A *и* B — *две орбиты группы* $(u, \Gamma F(G))$ *такие, что* $r(A)$ *и* $r(B)$ *инцидентны. Тогда* u *действует транзитивно на множестве* $\Gamma_{A,B} = \{(x, y) \in A \times B \mid xI_F y\}$.

Пусть $\widehat{\Gamma F}$ — раздельное объединение V_h, $h \in \Gamma F(H)$, введенных в лемме 3. Определим действие ρ группы U на $\widehat{\Gamma F}$, положив $v^g = \pi_h((h + v)^g)$ для $v \in V(h)$ и $g \in U$.

Нетрудно проверить, что действие ρ корректно определено, является точным и множества V_h, $h \in \Gamma F(H)$, являются его орбитами. Обозначим через $(U, \widehat{\Gamma F})$ группу подстановок, соответствующую действию ρ.

Теорема 2. *Существует биекция* $\mu: \widehat{\Gamma F} \to \Gamma F(G)$, *устанавливающая подобие групп* $(U, \widehat{\Gamma F})$ *и* $(U, \Gamma F(G))$ *такая, что для* $x \in V_h$ *и* $y \in V_{h'}$ *классы* $\mu(x)$ *и* $\mu(y)$ *инциденты в* $\Gamma F(G)$ *в точности тогда, когда*

$$x - y|_{\Delta^+(\check{h}) \cap \Delta^+(\check{h}')} = [xy].$$

Доказательство. Известно, что произвольный элемент группы представляется в виде $x_{r_1}(t_1) x_{r_2}(t_2) \dots x_{r_k}(t_k)$, где $t_i \in K$ и корни r_i упорядочены в некотором стандартном порядке [5]. Пусть gP_J — некоторый смежный класс из $\Gamma F(G)$. По лемме 5 ему соответствует h типа J из $\Gamma F(H)$ и эмемент $u^+(h) = x_{r_1}(t_1) \dots x_{r_n}(t_n)$. Сопоставив этой паре пространство V_h и вектор $(t_1/\lambda_1, \dots, t_n/\lambda_n)$, где $\lambda_i = (hr_i/(r_i r_i)$, определим отображение μ. Эта биекция устанавливает подобие групп подстановок $(U, \Gamma F(G))$ и $(U, \widehat{\Gamma F})$.

Рассмотрим инцидентные элементы $\alpha = gP_J$ и $\beta = g'P'P_{J'}$. Обозначим через γ минимальный флаг, инцидентный как α, так и β. Пусть $\mu(gP_J) = (h, t_h)$ и $\mu(g'P_{J'}) = (h', t_{h'})$. Ввиду следствия из леммы 5 $r(\alpha) I_F r(\beta)$, что означает hI_Fh'. По лемме 6 существует элемент d из u_γ^+, переводящий α и β в P_J и $P_{J'}$ соответственно. Тогда выполняется

$$(h, t_h)^{\mu(d)} = (h, 0) \bigwedge (h', t'_{h'})^{\mu(d)} = (h', 0). \quad (1)$$

Преобразование $\mu(d)$ действует на (h, t_h) как композиция действия элемента d на вектор $h + t_h$ из присоединенного представления алгебры Ли и проектирования на $\Delta^+(h)$. Так как лиевское произведение $(h + t_h)$ и $(h' + t_{h'})$ лежит в $\sum\limits_{r \in \Delta^+(h) \cap \Delta^+(h')} L^r$, то оно должно сохраняться инвариантным при действии $\mu(d)$. Таким образом, для выполнения (1) необходимо

$$[h + t_h, \ h' + t_{h'}] = 0. \quad (2)$$

Можно показать, что (1) в точности эквивалентно (2). Так как $[h, t_{h'}] = t_{h'}$, $[t_h, h'] = -t_h$, $[h, h'] = 0$, то

$$t_{h'} - t_h = [t_{h'}, t_h], \quad (3)$$

что завершает доказательство в случае характеристики. Для доказательства теоремы в общем случае достаточно проверить равносильность (1) и (3) с использованием базиса Шевалле.

Следствие. *Геометрия $\Gamma F(G)$ группы Шевалле G, определенной над полем* $\mathbf{F}$, *является линейным над* $\mathbf{F}$ *накрытием геометрии $\Gamma F(W)$ группы Вейля W для G.*

В самом деле, в качестве Σ, η, $*$ из определения накрытия следует взять соответственно множество положительных корней R^+, отображение, сопоставляющее $\alpha \in \Gamma F(W)$ множество $\Delta^+(\alpha)$, лиевское произведение на $\sum\limits_{r \in R^+} L_r$.

1. *Dembovski P.* Finite Geometries.— Berlin: Springer, 1968.— 376 p.
2. *Устименко В. А.* О некоторых свойствах геометрии групп Шевалле и их обобщении // Исслед. по алгебр. комбинаторике.— М. : ВНИИ систем. исслед.— 1985.— С. 134—148.
3. *Устименко В. А.* Геометрии Титса и алгебры с делением // Докл. АН СССР.— 1987.— 296, № 5.— С. 1061—1665.
4. *Устименко В. А.* Группы, полугруппы и геометрии Титса // Тр. X Всесоюз. конф. по теории групп (Гомель, 1987).— Минск: Вышейш. шк., 1988.— С. 56—84.
5. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type.— London, 1972.— 350 p.
6. *Freudenthal H., de Uries H.* Linear Lie Groups.— London: Acad. press, 1969.— 592 p.
7. *Ustimenko V. A.* On some properties of Shevalley groups geometries and their generalisations // Investigation on algebraik combinatories.— Amsterdam, 1988.— P. 32—72.
8. *Tits J.* Building of Spherical Type and Finite *BN*-paris // Lect. Notes Math.— 1974.— 386.— 299 p.

Киев, ун-т — Получено 04.05.88