УДК 512.61

О. Е. БЕЗУЩАК, асп., В. И. СУЩАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Сопряженность в группах изометрий обобщенных бэровских метрик

Описываются классы сопряженности групп изометрий пространств Бэра и обобщенных пространств Бэра. В первом случае каждый такой класс однозначно характеризуется маркированным деревом специального вида, а во втором — лесом таких деревьев. Из предложенного описания, в частности, следует, что указанные группы изометрий являются амбивалентными.

Описано класи спряженості груп ізометрій просторів Бера та узагальнених просторів Бера. В першому випадку кожен такий клас однозначно характеризується міченим деревом спеціального вигляду, а в другому — лісом таких дерев. Із запропонованого опису, зокрема, випливає, що вказані групи ізометрій амбівалентні.

Представление групп изометрий обобщенных бэровских метрик как l-сплетений конечных симметрических групп [1] позволяет достаточно подробно исследовать их строение. В настоящей работе изучаются классы сопряженности таких групп. При этом в качестве промежуточной задачи оказалось необходимым описать классы сопряженности групп изометрий метрических пространств Бэра, изучавшихся в [2—4].

1. Группы изометрий обобщенных бэровских метрик. Пусть $\Sigma = \{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in Z}$ — семейство конечных множеств, индексированных целыми числами, $\mathcal{M} = \prod\limits_{\alpha\in Z} \mathcal{M}_\alpha$, $E = (\mathcal{M}, \rho)$ — обобщенное пространство Бэра над семейством Σ в смысле [1], $\operatorname{Is} E$ — его группа изометрий. Согласно [1] группа $\operatorname{Is} E$ подобна $\widetilde{l}$-сплетению симметрических групп $S(\mathcal{M}_\alpha)$, $\alpha \in Z$. Поэтому любой элемент этой группы однозначно представим в виде таблицы

$$u = [a_\alpha ({}^{(\alpha-1)}\overline{x})]_{\alpha\in Z}, \tag{1}$$

где ${}^{(\alpha-1)}\overline{x}$ — бесконечное влево начало набора $\overline{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in Z} \in \mathcal{M}$ с крайней правой координатой $x_{\alpha-1}$, $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{x})$ — функция, определенная на ${}^{(\alpha-1)}\mathcal{M} = \prod\limits_{i<\alpha} \mathcal{M}_i$ со значениями в $S(\mathcal{M}_\alpha)$. Таблица (1) действует на любой элемент $\overline{m} = (m_\alpha)_{\alpha\in Z}$ следующим образом:

$$\overline{m}^u = (m_\alpha^{a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{m})})_{\alpha\in Z}. \tag{2}$$

Такому действию соответствует правило умножения таблиц, согласно которому произведением таблиц $u=[a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$ и $v=[b_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$ будет таблица $uv=[a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})\, b_\alpha({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^{u}{}_{\alpha-1}))]_{\alpha\in Z}$. Единичный элемент группы $\mathrm{Is}\,E$ — таблица e, все координаты которой тождественно равны единичной подстановке ε. Обратной к (1) будет таблица $[a_\alpha^{-1}({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^{u}\overline{{}_{\alpha-1}}^{1}))]_{\alpha\in Z}$, где $u_{\alpha-1}$ — начало таблицы u с крайней правой координатой $[u]_{\alpha-1}$. Как установлено в [1], группа $\mathrm{Is}\,E$ состоит из локально ограниченных таблиц вида (1), т. е. таких, что для любого $\bar{x}\in\mathcal{M}$ существует $\alpha\in Z$, для которого ${}^{(\alpha)}\bar{x}={}^{(\alpha)}(\bar{x}^u)$. Локально ограниченную таблицу $u\in\mathrm{Is}\,E$ назовем полуограниченной, если для нее существует номер $\alpha\in Z$ такой, что для всех $\bar{x}\in\mathcal{M}$ выполнено равенство ${}^{(\alpha)}(\bar{x}^u)={}^{(\alpha)}\bar{x}$. Все полуограниченные таблицы образуют нормальный делитель $\overline{\mathrm{Is}}\,E$ группы $\mathrm{Is}\,E$. Метрика на E индуцирует метрику на $\overline{\mathrm{Is}}\,E$, задающую на этой группе структуру обобщенного пространства Бэра. Группа $\overline{\mathrm{Is}}\,E$ является объединением возрастающей последовательности нормальных подгрупп I_α, $\alpha\in Z$, состоящих из всевозможных таблиц глубины $\geqslant\alpha$, т. е. таких, координаты с номерами $\leqslant\alpha$ в которых равны ε.

Лемма 1. *Для любого $\alpha\in Z$ группа I_α изоморфна декартовой степени групп изометрий пространства Бэра над семейством множеств $\{\mathcal{M}_\beta\}_{\beta>\alpha}$.*

Доказательство. Согласно [3] изометрии пространства Бэра над $\mathcal{M}^{(\alpha)}=\prod\limits_{\beta>\alpha}\mathcal{M}_\beta$ представимы бесконечными вправо наборами $[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}(x_1), \ldots]$, где $a_1^{(\alpha)}\in S(\mathcal{M}_{\alpha+1})$, $a_i^{(\alpha)}(\bar{x}_{i-1})$ — функция, определенная на множестве $\mathcal{M}_{\alpha+1}\times\ldots\times\mathcal{M}_{\alpha+i-1}$ со значениями в группе $S(\mathcal{M}_{\alpha+i})$. Для произвольной таблицы $u=[a_\gamma({}^{(\gamma-1)}\bar{x})]_{\gamma\in Z}$ из I_α и фиксированного $\bar{t}\in{}^{(\alpha)}\mathcal{M}$ обозначим через $u(\bar{t})$ преобразование множества $\mathcal{M}^{(\alpha)}$, задаваемое таблицей $[a_{\gamma+1}(\bar{t}), a_{\gamma+2}(\bar{t}, x_{\gamma+1}), \ldots]$. Оно содержится в группе изометрий пространства Бэра над $\mathcal{M}^{(\alpha)}$. Тем самым задано отображение $u\to(u(\bar{t})/\bar{t}\in{}^{(\alpha)}\mathcal{M})$ группы I_α в декартову степень группы изометрий пространства Бэра над $\mathcal{M}^{(\alpha)}$. Непосредственно проверяется, что оно является изоморфизмом и лемма доказана.

2. Классы сопряженности групп изометрий пространств Бэра. Пусть T — пространство Бэра над семейством $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in N}$, $|\mathcal{M}_\alpha|=n_\alpha$, $\mathrm{Is}\,T$ — его группа изометрий, $T^{(k)}=\mathcal{M}_1\times\ldots\times\mathcal{M}_k$, $k\in N$. Каждая изометрия $u\in\mathrm{Is}\,T$ индуцирует при любом $k\in N$ преобразование на $T^{(k)}$, которое обозначим u_k. Если $u=[a_1, a_2(x_1), \ldots]$, где $a_1\in S(\mathcal{M}_1)$, $a_i(\bar{x}_{i-1})\in S(\mathcal{M}_i)^{\mathcal{M}_1\times\ldots\times\mathcal{M}_{i-1}}$, то u_k соответствует началу длины k этой таблицы. Пусть φ_{k-1} — проэктирование (по последней координате) $T^{(k)}$ на $T^{(k-1)}$. Для цикла $\pi=(t_k^{(1)}, \ldots, t_k^{(l)})$ над $T^{(k)}$ обозначим через $\varphi_{k-1}(\pi)$ цикл на $T^{(k-1)}$, получаемый при проэктировании кортежей $t_k^{(i)}$, $1\leqslant i\leqslant l$, и вычеркивании повторяющихся вхождений элементов. Аналогом цикленного типа для преобразований из группы IsT является дерево орбит, определяемое следующим образом.

Вершины дерева орбит $\mathcal{D}(u)$ изометрии u расположены на уровнях, занумерованных натуральными числами. Корневой вершине соответствует нулевой уровень; она имеет метку 1. Для любого $k\in N$ на k-м уровне располагаются вершины, соответствующие компонентам разложения подстановки u_k множества $T^{(k)}$ в произведение независимых циклов. При этом каждой вершине сопоставляется метка — длина соответствующего цикла. Порядок расположения вершин данного уровня не существен. Вершина k-го уровня, соответствующая циклу π_k, соединяется с вершиной $(k-1)$-го уровня, соответствующей циклу π_{k-1}, в том и только в том случае, когда $\varphi_{k-1}(\pi_k) = \pi_{k-1}$, $k \geqslant 1$.

Дерево $\mathcal{D}(u)$ при любом $u \in \operatorname{Is} T$ удовлетворяет для всех $k \in N$ следующим условиям:

а) сумма меток всех вершин k-го уровня равна $n_1 \ldots n_k$;

б) если вершина $(k+1)$-го уровня с меткой s соединена с вершиной k-го уровня, имеющей метку t, то $t|_s$;

в) если вершина k-го уровня с меткой s соединена с l вершинами $(k+1)$-го уровня, имеющими метки $t_1, \ldots, t_l$, и только с ними, то $\sum_{i=1}^{l} t_i = sn_k$.

Изоморфизмом помеченных деревьев $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ будем называть такой их изоморфизм, при котором корневой вершине $\mathcal{D}_1$ соответствует корневая вершина $\mathcal{D}_2$, а для всех $k \in N$ вершинам k-го уровня $\mathcal{D}_1$ соответствуют вершины k-го уровня $\mathcal{D}_2$ с такими же метками. Пусть Γ_T — множество всевозможных попарно неизоморфных помеченных деревьев, удовлетворяющих условиям а) — в). Понятно, что мощность Γ_T равна c. Если $\mathcal{D} = \mathcal{D}(u)$, $u \in \operatorname{Is} T$, то его поддерево $\overline{\mathcal{D}}_k$, получаемое отбрасыванием вершин $\mathcal{D}$ всех уровней, начиная с $(k+1)$-го, и выходящих из них ребер, естественно рассматривать как дерево орбит преобразования u_k. Для любого $k \in N$ определено вложение $\varphi_k : \overline{\mathcal{D}}_k \to \overline{D}_{k+1}$, причем $\varphi_{k+1}|_{\overline{\mathcal{D}}_k} = \varphi_k$. Тем самым задан прямой спектр $\langle \overline{\mathcal{D}}_k, \varphi_k \rangle_{k \in N}$, предельный граф $\varinjlim \langle \overline{\mathcal{D}}_k, \varphi_k \rangle$ которого изоморфен $\mathcal{D}$. Такое предельное представление можно определять для любых графов из Γ_T.

Лемма 2. *Деревья $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ из Γ_T изоморфны тогда и только тогда, когда существует система изоморфизмов $\delta_k : \overline{\mathcal{D}}_k \to \overline{\mathcal{D}}'_k$ такая, что при любом $k \in N$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{D}}_k & \xrightarrow{\delta_k} & \overline{\mathcal{D}}'_k \\ {\scriptstyle\varphi_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'_k} \\ \overline{\mathcal{D}}_{k+1} & \xrightarrow{\delta_{k+1}} & \overline{\mathcal{D}}'_{k+1} \end{array} \tag{3}$$

коммутативна.

Символом $\operatorname{пр} \bar{t}_k$ обозначим проекцию $\bar{t}_k \in T^{(k)}$ по последней координате и положим для любой подстановки $\pi_k = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{t}' \end{pmatrix} \in S(T^{(k)})$, $\operatorname{пр} \pi_k = \begin{pmatrix} \operatorname{пр} \bar{t} \\ \operatorname{пр} \bar{t}' \end{pmatrix}$, $k \in N$. Двухстрочная таблица $\operatorname{пр} \pi_k$ — мультиподстановка, поскольку элементы в ее строках повторяются. Подстановку π_k назовем согласованной, если в $\operatorname{пр} \pi_k$ равные элементы первой строки стоят только в одинаковых столбцах.

Лемма 3. *Подстановка π_k согласована тогда и только тогда, когда $\pi_k \in S(T^{(k-1)}) \sim S(\mathcal{M}_k)$.*

Доказательство. Любая мультиподстановка μ, равные элементы первой строки которой стоят в одинаковых столбцах, однозначно определяет подстановку $r(\mu)$, которая получается после вычеркивания в μ одинаковых столбцов, кроме одного. Если $\pi_k \in S(T^{(k)})$ согласована, то определена $\pi'_k = r(\operatorname{пр} \pi_k) \in S(T^{(k-1)})$, причем для любого $(m_1, \ldots, m_k) \in T^{(k)}$ имеем $((m_1, \ldots, m_{k-1})^{\pi'_k}, m'_k)$. Тем самым согласованной подстановке π_k сопоставляется пара $[\pi'_k, a(\bar{x}_{k-1})]$, где $a(\bar{x}_{k-1})$ — функция из $T^{(k-1)}$ в $S(\mathcal{M}_k)$, принимающая на произвольном наборе $(m_1, \ldots, m_{k-1})$ значение, которое переводит m_k в m'_k. Итак, каждая согласованная подстановка из $S(T^{(k)})$ содержится в $S(T^{(k-1)}) \operatorname{г} S(\mathcal{M}_k)$. Согласованность подстановок из этой подгруппы очевидна. Лемма доказана.

Для $\pi_k \in S(T^{(k)})$ положим $\pi_k^{(1)} = r(\text{пр}\,\pi_k)$, $\pi_k^{(l)} = r(\text{пр}\,\pi_k^{(l-1)})$, $1 < l \leqslant k$. Подстановку π_k назовем сильно согласованной, если для всех l, $1 \leqslant l \leqslant k$, подстановка $\pi_k^{(l)}$ согласована.

Лемма 4. *Подстановка $\pi_k \in S(T^{(k)})$ содержится в подгруппе $G_k = \mathop{\S}\limits_{i=1}^{k} S(\mathcal{M}_i)$ тогда и только тогда, когда она сильно согласована.*

Согласно изложенному выше цикленный тип сильно согласованных под-
стр. 50 529
становок можно уточнить, сопоставляя им (конечное) дерево орбит. При этом сопряженным в G_k подстановкам соответствуют, как легко понять, изоморфные деревья орбит.

Пусть $\langle \pi_i \rangle_{i \in N}$ — семейство подстановок таких, что $\pi_i \in S(T^{(i)})$. Изометрию $w \in \operatorname{Is} T$ назовем предельной для семейства π_i, если при любом $i \in N$ выполнено равенство $w_i = \pi_i$.

Лемма 5. *Подстановка, предельная для семейства $\langle \pi_i \rangle_{i \in N}$, существует тогда и только тогда, когда при любом $i \in N$ π_i согласована, причем $r(\text{пр}\,\pi_{i+1}) = \pi_i$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Проверим достаточность. Так как для любого $i \in N$ π_i согласована, то по лемме 3 она содержится в $S(T^{(i-1)}) \operatorname{\Gamma} S(\mathcal{M}_i)$, т. е. задается таблицей вида $[\pi'_{i-1}, a_i(\overline{x}_{i-1})]$, $\pi_i \in S(T^{(i-1)})$, $a_i(\overline{x}_{i-1}) \in S(\mathcal{M}_i)^{\mathcal{M}^{(i)}}$. При этом, поскольку $r(\text{пр}\,\pi_i)$ совпадает с проекцией этой таблицы по последней координате, то $\pi'_{i-1} = \pi_{i-1}$ для любого $i \in N$. Поэтому и $\pi_i \in G_i$, а семейство $\langle \pi_i \rangle_{i \in N}$ является нитью из обратного спектра $\langle G_i, \lambda_i \rangle_{i \in N}$, где λ_i: $G_{i+1} \to G_i$ — гомоморфизм проектирования по последней координате. Следовательно, оно однозначно определяет элемент w предельной группы этого спектра, которая совпадает с $\operatorname{Is} T$. Так как для w при всех $i \in N$ имеем $w_i = \pi_i$, то лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $u, v \in \operatorname{Is} T$. Таблицы u, v сопряжены в этой группе тогда и только тогда, когда их деревья орбит $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ изоморфны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть u и v — сопряженные элементы. Тогда при любом $k \in N$ элементы u_k и v_k сопряжены в G_k, т. е. их деревья орбит $\overline{\mathcal{D}}_k$ и $\overline{\mathcal{D}}'_k$ изоморфны. Тем самым для любого $k \in N$ фиксируется изоморфизм $\delta_k : \overline{\mathcal{D}}_k \to \overline{\mathcal{D}}'_k$. Кроме того, $\mathcal{D} \simeq \varinjlim \langle \overline{\mathcal{D}}_k, \varphi_k \rangle$, $\mathcal{D}' \simeq \varinjlim \langle \overline{\mathcal{D}}'_k, \varphi'_k \rangle$, т. е. заданы вложения $\varphi_k : \overline{\mathcal{D}}_k \to \overline{\mathcal{D}}_{k+1}$, $\varphi'_k : \mathcal{D}'_k \to \overline{\mathcal{D}}'_{k+1}$. И поскольку для произвольного $k \in N$ диаграмма (3) в этой ситуации является коммутативной, то из леммы 2 следует $\mathcal{D} \simeq \mathcal{D}'$.

Достаточность. Пусть графы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ изоморфны. Тогда соответствующие системы $\langle \overline{\mathcal{D}}_k, \varphi_k \rangle$ и $\langle \overline{\mathcal{D}}'_k, \varphi'_k \rangle$ удовлетворяют условиям леммы 2. Следовательно, для любого $k \in N$ деревья $\overline{\mathcal{D}}_k$ и $\overline{\mathcal{D}}'_k$ изоморфны. Поэтому сильно согласованные подстановки u_k и v_k сопряжены, т. е. их цикленные типы совпадают. Пусть $u_k = \prod_{l=1}^{s} u_k^{(l)}$, $v_k = \prod_{l=1}^{s} v_k^{(l)}$ — разложения u_k и v_k в произведения независимых циклов, причем циклы занумерованы так, что если $u_k^{(l)}$ соответствует вершина t дерева $\overline{\mathcal{D}}_k$, то $v_k^{(l)}$ — вершина $\delta_k(t)$ дерева $\overline{D}'_k$. Полагая $u_k^{(l)} = (a_1^{(l)}, \ldots, a_{r_l}^{(l)})$, $v_k^{(l)} = (b_1^{(l)}, \ldots, b_{r_l}^{(l)})$, $1 \leqslant l \leqslant s$, определим подстановку

$$w_k = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \ldots & a_{r_1}^{(1)} & \ldots & a_1^{(s)} & \ldots & a_{r_s}^{(s)} \\ b_1^{(1)} & \ldots & b_{r_1}^{(1)} & \ldots & b_1^{(s)} & \ldots & b_{r_s}^{(s)} \end{pmatrix} \in S(T^{(i)}),$$

которая сопрягает u_k и v_k. Вычеркивая последнюю координату в кортежах $a_i^{(j)}$ и $b_i^{(j)}$, $j=1,\dots,s$; $i=1,\dots,r_j$, по преобразованию w_k построим мультиподстановку

$$\overline{w}_{k-1}=\begin{pmatrix}\text{пр}\, a_1^{(1)} & \dots & \text{пр}\, a_{r_1}^{(1)} & \dots & \text{пр}\, a_1^{(s)} & \dots & \text{пр}\, a_{r_s}^{(s)} \\ \text{пр}\, b_1^{(1)} & \dots & \text{пр}\, b_{r_1}^{(1)} & \dots & \text{пр}\, b_1^{(s)} & \dots & \text{пр}\, b_{r_s}^{(s)}\end{pmatrix}.$$

Покажем, что в ней одинаковые элементы первой строки стоят в равных столбцах. Пусть $\text{пр}\, a_m^{(i)}=\text{пр}\, a_n^{(j)}$, $1\leqslant i,j\leqslant s$, $1\leqslant m\leqslant r_i$, $1\leqslant n\leqslant r_j$, $m\geqslant n$. Возможны два случая.

1) $i=j$, т. е. $a_m^{(i)}$, $a_n^{(j)}$ принадлежат одному циклу $u_k^{(i)}$. Рассмотрим подстановки u_k^{m-n}, v_k^{m-n}. Так как деревья орбит u_k и v_k изоморфны, то изоморфными будут также деревья орбит u_k^{m-n}, v_k^{m-n}. Для подстановки u_k^{m-n} выполнено равенство $(a_n^{(j)})^{u_k^{m-n}}=a_m^{(i)}$. Из него и равенства проекций $a_m^{(i)}$ и $a_n^{(j)}$ следует, что в мультиподстановке $\overline{u}_{k-1}$ все элементы, получаемые из цикла $u_k^{(i)}$, равны между собой. Поэтому в подстановке $r(\overline{u}_{k-1}^{m-n})=u_{k-1}^{m-n}$ этому циклу соответствует неподвижная точка. Следовательно, v_{k-1} имеет неподвижную точку, соответствующую тому циклу v_k, который содержит $b_m^{(i)}$ и $b_n^{(j)}$. Значит, $\text{пр}\, b_m^{(i)}=\text{пр}\, b_n^{(j)}$.

2) $i\neq j$, т. е $a_m^{(i)}$, $a_n^{(j)}$ содержатся в различных циклах $u_k^{(i)}$, $u_k^{(j)}$. Из согласованности u_k следует, что цикл $(\text{пр}\, a_1^{(i)},\dots,\text{пр}\, a_{r_i}^{(i)})$ совпадает с циклом $(\text{пр}\, a_1^{(j)},\dots,\text{пр}\, a_{r_j}^{(j)})$. Так как деревья орбит u_k и v_k изоморфны, и вершины $\overline{\mathcal{D}}_k$, отвечающие циклам $u_k^{(i)}$, $u_k^{(j)}$ при этом изоморфизме, соответствуют вершинам $\overline{\mathcal{D}}_k'$, которые отвечают циклам $v_k^{(i)}$, $v_k^{(j)}$, то из указанного равенства циклов следует, что $(\text{пр}\, b_1^{(i)},\dots,\text{пр}\, b_{r_i}^{(i)})=(\text{пр}\, b_1^{(j)},\dots$ $\dots,\text{пр}\, b_{r_j}^{(j)})$. Поэтому, если $\text{пр}\, a_m^{(i)}=\text{пр}\, a_n^{(j)}$, то и $\text{пр}\, b_m^{(i)}=\text{пр}\, b_n^{(j)}$.

Таким образом, для любого $k\in N$ подстановка w_k согласована, причем $r(\overline{w}_{k-1})=w_{k-1}$. Итак, для системы подстановок w_k, $k\in N$, выполнены условия леммы 5. Следовательно, существует предельная изометрия $w'\in \operatorname{Is} T$ такая, что $(w')_k=w_k$, $k\in N$. Поскольку для нее выполнено равенство $uw'=w'v$, то таблицы u, v сопряжены в $\operatorname{Is} T$, и теорема доказана.

Теорема 2. *Для любого пространства Бэра T существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженности группы $\operatorname{Is} T$ и деревьями множества Γ_T.*

Доказательство. По теореме 1 каждому классу сопряженности группы $\operatorname{Is} T$ соответствует некоторое дерево из Γ_T, причем различным классам сопряженности соответствуют неизоморфные деревья. Поэтому достаточно проверить, что определяемое таким образом отображение является сюрьективным, т. е. любое дерево из Γ_T может быть деревом орбит некоторой изометрии пространства T. Пусть $\mathcal{D}\in\Gamma_T$ — некоторое дерево. Опишем явно процесс построения таблицы $u=[a_1, a_2(x_1),\dots]\in \operatorname{Is} T$ такой, что $\mathcal{D}(u)=$ $=\mathcal{D}$. В качестве a_1 выберем подстановку из $S(\mathcal{M}_1)$, цикленный тип которой совпадает с набором меток вершин первого уровня дерева $\mathcal{D}$. Предположим, что координаты $a_1,\dots,a_{k-1}(\overline{x}_{k-2})$ таблицы u определены. Зафиксируем некоторую вершину $\overline{t}$ $(k-1)$-го уровня дерева $\mathcal{D}$ и рассмотрим все вершины k-го уровня, ей инцидентные. Пусть $\pi=(\overline{a}_1,\dots,\overline{a}_l)$ — цикл из разложения u_{k-1}, отвечающий $\overline{t}$. Приписывая каждому из кортежей $\overline{a}_i$ всевозможные координаты — элементы из $\mathcal{M}_k$,— получаем $l\cdot|\mathcal{M}_k|$ различных точек. Так как дерево $\mathcal{D}$ удовлетворяет условиям $a)$—$b)$, то сумма меток вершин $\mathcal{D}$, инцидентных $\overline{t}$, тоже равна $l\cdot|\mathcal{M}_k|$. Поэтому указанные $l\cdot|\mathcal{M}_k|$ точек можно разбить на части, мощности которых равны меткам инцидентных $\overline{t}$ вершин, и образовать по каждой части цикл. Проведя аналогичные построения для всех вершин $(k-1)$-го уровня, получим разложение некоторой подстановки u_k, первые $(k-1)$ координат которой совпадают с уже определенными функциями. Тем самым определена и ее k-я координата. Согласно лемме 5 отсюда получаем, что существует таблица $u \in \mathrm{Is}\, T$, начало которой совпадает с u_k, $k \in N$, и $D(u) = D$. Теорема доказана.

3. Классы сопряженности группы $\mathrm{Is}\, E$. Пусть $u \in \mathrm{Is}\, E$ — некоторая изометрия, $t \in \mathcal{M}$ и k_t — наибольшее число такое, что u_{k_t} не изменяет ${}^{(k_t)}t$ или символ ∞, если такого числа не существует. Так как u локально ограниченная таблица, k_t определено для каждого $t \in \mathcal{M}$. Спектром таблицы u назовем семейство $\mathrm{sp}\, u = \langle k_t / t \in \mathcal{M} \rangle$ и положим $\mathcal{M}_u = \{t \in \mathcal{M} / k_t \neq \infty\}$. Диск $B(\xi^k, t)$ в пространстве E (ξ, $0 < \xi < 1$, — фиксированное число, фигурирующее в определении метрики ρ [1]) задается равенством $B(\xi^k, t)$ $\{{}^{(k}t * x / x \in \mathcal{M}^{(k+1)}\}$, где $*$ — операция приписывания. Диски $B(\xi^{k_t}, t)$, $k_t \in \mathrm{sp}\, u$, $t \in \mathcal{M}_u$, назовем значимыми для подстановки u. Два значимых диска либо не пересекаются, либо совпадают, причем для любого такого диска B из $x \in B$ следует $x^u \in B$. Поэтому определено ограничение u_B изометрии u на каждый из ее значимых дисков $B(\xi^{k_t}, t)$, $t \in \mathcal{M}_u$, совпадающее с преобразованием, которое индуцируется таблицей $u({}^{(k_t)}t)$. Пусть $\mathfrak{B}_u$ — множество различных значимых дисков изометрии u.

Лемма 6. *Для произвольного $u \in \mathrm{Is}\, E$ имеет место разложение*

$$u = \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}_u} u_B, \tag{4}$$

где $\oplus$ — знак прямой суммы подстановок в смысле [5].

Разложение (4) назовем спектральным разложением изометрии u. Любой из дисков $B \in \mathfrak{B}_u$ изометричен пространству Бэра над подходящим семейством, а u_B определяет изометрию этого пространства на себя. Следовательно, ему согласно п. 2 соответствует некоторое дерево орбит $\mathcal{D}(u_B)$. Тем самым изометрии u сопоставляется помеченный граф $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}_u} \mathcal{D}(u_B)$, являющийся лесом, который обозначим $\mathbf{Л}(u)$. Будем называть его лесом орбит преобразования u. Все деревья леса $\mathbf{Л}(u)$ имеют одинаково направленные кроны, их корневые вершины располагаются на счетном числе уровней, которые занумерованы целыми числами, и мощность множества вершин каждого уровня равна c. Каждой вершине $\mathcal{D}(u_B)$ однозначно соответствует набор ${}^{(k_t)}t$, где $k_t \in \mathrm{sp}\, u$, $B = B(\xi^{k_t}, t)$, $t \in \mathcal{M}_u$, который назовем ее координатным набором. Координатные наборы близки, если они имеют общее начало.

Два леса $\mathbf{Л}_1$ и $\mathbf{Л}_2$ указанного вида назовем эквивалентными, если существует биективное отображение φ множества корневых вершин деревьев леса $\mathbf{Л}_1$ на такое же множество для $\mathbf{Л}_2$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) образами корневых вершин k-го уровня деревьев из $\mathbf{Л}_1$ при отображении φ будут корневые вершины деревьев k-го уровня из $\mathbf{Л}_2$;

2) если ${}^{(k)}t$ — координатный набор вершины дерева $\mathcal{D}$ из $\mathbf{Л}_1$, а ${}^{(k)}t'$ — координатный набор вершины дерева $\mathcal{D}'$ из $\mathbf{Л}_2$, причем ${}^{(k)}t' = \varphi({}^{(k)}t)$, то наборы ${}^{(k)}t$, ${}^{(k)}t'$ близки и $\mathcal{D}$ изоморфно $\mathcal{D}'$.

Теорема 3. *Пусть E — произвольное обобщенное пространство Бэра. Изометрии u, v этого пространства сопряжены в группе $\mathrm{Is}\, E$ тогда и только тогда, когда их леса орбит $\mathbf{Л}(u)$ и $\mathbf{Л}(v)$ эквивалентны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть u, v — сопряженные изометрии и $u = \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}_u} u_B$, $v = \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}_v} v_B$ — их спектральные разложения. Для $w \in \mathrm{Is}\, E$, $B \in \mathfrak{B}_w$ — обозначим через $\overline{w}_B$ преобразование $\mathcal{M}$, которое действует на B как и w, а на $\mathcal{M} \setminus B$ тривиально. Из сопряженности u, v следует, что существует биекция $\delta: \mathfrak{B}_u \to \mathfrak{B}_v$ такая, что если $\delta(B) = B'$, $B = B(\xi^{k_t}, t) \in \mathfrak{B}_u$, $B' = B'(\xi^{k_{t'}}, t') \in \mathfrak{B}_v$, то $k_t = k_{t'}$ и $\overline{u}_B$ сопряжено с $\bar{v}_{B'}$ в $\operatorname{Is} E$. По биекции δ построим отображение φ, определяющее эквивалентность лесов орбит $\mathbf{Л}(u)$ и $\mathbf{Л}(v)$, следующим образом. Каждый диск $B = B(\xi^{k_t}, t)$ однозначно определяет набор $^{(k_t)}t$, который будет координатным для корневой вершины дерева орбит преобразования $u|_B$ — ограничения u на B. Пусть $\mathcal{M}^u = \{^{(k_t)}t / B(\xi^{k_t}, t) \in \mathfrak{B}_u\}$, $\mathcal{M}^v = \{^{(k_{t'})}t' / B'(\xi^{k_{t'}}, t') \in \mathfrak{B}_v\}$ — множества координатных наборов вершин деревьев из $\mathbf{Л}(u)$ и $\mathbf{Л}(v)$. Положим для любого $t \in \mathcal{M}$ $\varphi(^{(k)}t) = {}^{(k)}t'$, где $\delta(B(\xi^k, t)) = B'(\xi^k, t')$. Так как δ — биекция, то φ будет биективным отображением. Так как $\bar{u}_B$ и $\bar{v}_{B'}$ сопряжены элементом группы $\operatorname{Is} E$, то $^{(k)}t$ и $^{(k)}t'$ близки, а циклические группы $\langle \bar{u}_B \rangle$ и $\langle \bar{v}_{B'} \rangle$ подобны. Поэтому будут подобными также циклические группы, порожденные преобразованиями $\bar{u}_B|_B = u_B$ и $\bar{v}_{B'}|_{B'} = v_{B'}$, действующими на дисках B и B', которые изометричны одному и тому же пространству Бэра. Следовательно, деревья орбит преобразований u_B и $v_{B'}$ изоморфны для произвольного $B \in \mathfrak{B}_u$. Итак, построенное отображение φ удовлетворяет условиям 1 и 2 из определения эквивалентности лесов, т. е. $\mathbf{Л}(u)$ и $\mathbf{Л}(v)$ эквивалентны.

Достаточность. Пусть u, v — такие изометрии, что $\mathbf{Л}(u)$ эквивалентно $\mathbf{Л}(v)$. Тогда существует биекция $\varphi: \mathcal{M}^u \to \mathcal{M}^v$, для которой из равенства $\varphi(^{(k_t)}t) = {}^{(k_{t'})}t'$ следует, что $k_t = k_{t'}$ и для дисков $B(\xi^{k_t}, t) \in \mathfrak{B}_u$, $B'(\xi^{k_{t'}}, t') \in \mathfrak{B}_v$ деревья $\mathcal{D}(u_B)$ и $\mathcal{D}(v_{B'})$ изоморфны. Определим изометрию $\tilde{u}_B$ диска B', полагая для любого $z = {}^{(k_t)}t' * z^{(k_t+1)} \in B'$:

$$z^{\tilde{u}_B} = {}^{(k_t)}t' * ((^{(k_t)}t * z^{(k_t+1)})^{u_B})^{(k_t+1)}.$$

Так как циклические группы $\langle u_B \rangle$ и $\langle \tilde{u}_B \rangle$ подобны, то деревья $\mathcal{D}(u_B)$ и $\mathcal{D}(\tilde{u}_B)$ изоморфны. Следовательно, $\mathcal{D}(\tilde{u}_B)$ изоморфно $\mathcal{D}(v_{B'})$. Так как $\tilde{u}_B$ и $v_{B'}$ — изометрии пространства Бэра B', то по теореме 1 отсюда получаем, что $\tilde{u}_B$ и $v_{B'}$ сопряжены в $\operatorname{Is} B'$, т. е. существует $\tilde{w}_B \in \operatorname{Is} B'$ такое, что $\tilde{u}_B \tilde{w}_B = \tilde{w}_B v_{B'}$. По изометрии $\tilde{w}_B$ определим преобразование w_B, полагая для произвольного $z = {}^{(k_t)}t * z^{(k_t+1)} \in B$

$$z^{w_B} = {}^{(k_t)}t * ((^{(k_t)}t' * z^{(k_t+1)})^{\tilde{w}_B})^{(k_t+1)}.$$

Семейство $\langle w_B / B \in \mathfrak{B}_u \rangle$ однозначно определяет подстановку w, действующую на элементы B как w_B для всех $B \in \mathfrak{B}_u$ и не изменяющую элементы из $\mathcal{M} \setminus \left(\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}_u} B \right)$. Это преобразование содержится в группе $\operatorname{Is} E$, причем оно удовлетворяет равенству $uw = wv$. Следовательно, изометрии u, v сопряжены в группе $\operatorname{Is} E$ и теорема доказана.

Лес орбит произвольной изометрии пространства E удовлетворяет следующим условиям:

а) для произвольного $k \in Z$ существует пространство Бэра $T^{(k)}$ такое, что все деревья k-го уровня этого леса содержатся в $\Gamma_{T^{(k)}}$;

б) при всех $k \in Z$ пространство $T^{(k+1)}$ получается из $T^{(k)}$ проектированием всех наборов по первой координате.

Обозначим через ЛГ_E множество попарно неизоморфных лесов, удовлетворяющих условиям а), б).

Теорема 4. *Для любого обобщенного пространства Бэра E существует взаимно однозначное соответствие между классами сопряженности группы $\operatorname{Is} E$ и лесами множества ЛГ_E.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 и мы его опускаем.

Напомним, что группа называется амбивалентной, если каждый ее элемент сопряжен со своим обратным.

Теорема 5. 1) *Для любого пространства Бэра T группа* $\mathrm{Is}\,T$ *является амбивалентной.*

2) *Для любого обобщенного пространства Бэра E группы* $\mathrm{Is}\,E$ *и* $\overline{\mathrm{Is}}\,E$ *являются амбивалентными.*

Доказательство. 1) Достаточно убедиться, что для каждого $u \in \mathrm{Is}\,T$ дерево $\mathcal{D}(u)$ изоморфно дереву $\mathcal{D}(u^{-1})$. А это действительно так, ибо при любом $k \in N$ подстановки u_k и u_k^{-1} имеют одинаковые цикленные типы.

2) Покажем, что леса $\mathbf{Л}(u)$ и $\mathbf{Л}(u^{-1})$ эквивалентны. Если $u = \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}_u} u_B$ — спектральное разложение для изометрии $u \in \mathrm{Is}\,E$, то спектральное разложение для u^{-1} записывается в виде $u^{-1} = \bigoplus_{B \in \mathfrak{B}_u} u_B^{-1}$. Так как u_B, u_B^{-1} — изометрии пространства Бэра B, то $\mathcal{D}(u_B)$ изоморфно $\mathcal{D}(u_B^{-1})$ по первой части теоремы. Отсюда сразу же получаем, что $\mathbf{Л}(u)$ эквивалентно $\mathbf{Л}(u^{-1})$. Если $u \in \overline{\mathrm{Is}}\,E$, т. е. u имеет конечную глубину $k \in Z$, то, определяя элемент w для u, u^{-1} по их спектральным разложениям как в доказательстве теоремы 3, получаем, что его глубина не меньше k, т. е. $w \in \overline{\mathrm{Is}}\,E$. Следовательно, для любого $u \in \overline{\mathrm{Is}}\,E$ элементы u, u^{-1} сопряжены в $\overline{\mathrm{Is}}\,E$ и эта группа амбивалентна. Теорема доказана.

1. *Сущанский В. И.*, *Безущак О. Е.* l-Сплетения и изометрии обобщенных бэровских метрик // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 7—8.— С. 1031—1038.
2. *Сущанский В. И.* Группы изометрий p-пространств Бэра // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 8.— С. 27—30.
3. *Сущанський В. І.* Зображення фінітно апроксимовних груп ізометріями однорідних ультраметричних просторів скінченної ширини//Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1988.— № 4.— С. 19—22.
4. *Сущанский В. И.* Нормальное строение группы изометрий метрического пространства целых p-адических чисел // Алгебраические структуры и их применение.— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1988.— С. 113—128.
5. *Калужнин Л. А.*, *Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки // М. : Наука, 1985.— 167 с.

Получено 29.08.90