УДК 513

В. Г. Чернов

Об одной функциональной алгебре

Изучается алгебра функций на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел относительно обобщенной свертки, порожденной оператором обобщенного сдвига $T_n f(k) = f(\max(n, k))$, $n, k \in \mathbb{N}$. С помощью обобщенного преобразования Фурье, связанного с такой сверткой, устанавливаются многочисленные тождества и рекуррентные соотношения, связывающие, в частности, суммы степеней натуральных чисел.

Вивчається алгебра функцій на множині $\mathbb{N}$ натуральних чисел відносно узагальненого скручування, породженого оператором узагальненого зсуву $T_n f(k) = f\max(n, k))$, $n, k \in \mathbb{N}$. За допомогою узагальненого перетворення Фур'є, зв'язаного з таким скручуванням, встановлюються численні тотожності і рекурентні співвідношення, які зв'язують, зокрема, суми степенів натуральних чисел.

1. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с естественным отношением порядка на нем, $\mathcal{F}$ — линейное пространство всех $\mathbb{C}$-значных функций на нем, $A = \{\mathcal{F}, \cdot\}$ — алгебра, полученная из $\mathcal{F}$ путем поточечного умножения функций. Введем в A новое умножение $*$, полагая

$$(f * g)(n) = \sum_{\max\{x, y\} = n} f(x) g(y), \quad f, g \in A. \tag{1}$$

Алгебру A с заданной на ней операцией $*$ далее будем обозначать A_*. В заметке устанавливается, что A_* является коммутативной ассоциативной алгеброй и описывается ее группа единиц A_*^*. На алгебре A_* строится оператор $S : A_* \to A$, который является изоморфизмом. Этот оператор служит источником многочисленных тождеств и рекуррентных соотношений, связывающих, в частности, суммы степеней натуральных чисел. Некоторые из них здесь приводятся. В заключительном пункте заметки на A_* рассматривается некоторое семейство «интегральных» операторов, представляющее самостоятельный интерес.

Побудительным мотивом для написания данной заметки послужили идеи работы [1]. Однако, как это стало недавно известно автору, пример подобного функционального оператора рассматривался уже К. Урбаником [2] и другими авторами [3, 4]. Кроме того, необходимо отметить, что алгебра, изучаемая в данной заметке, тесно связана с теорией операторов обобщенного сдвига Дельсарта—Левитана.

2. Теорема. *Структура A_* есть структура коммутативной ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Все требования, кроме ассоциативности, очевидны. Ассоциативность же устанавливается непосредственной проверкой:

$$[(f * g) * h](n) = \sum_{\max\{m, z\} = n} (f * g)(m) h(z) = \sum_{\max\{m, z\} = n} \times$$

$$\times \Big(\sum_{\max\{x, y\} = m} f(x) g(y) \Big) h(z) = \sum_{\max\{\max\{x, y\}, z\} = n} f(x) g(y) h(z) =$$

$$= \sum_{\max\{x, y, z\} = n} f(x) g(y) h(z) = \sum_{\max\{x, \max\{y, z\}\} = n} f(x) g(y) h(z) =$$

$$= \sum_{\max\{x, k\} = n} f(x) \sum_{\max\{y, z\} = k} g(y) h(z) = \sum_{\max\{x, k\} = n} f(x) (g * h)(k) =$$

$$= [f * (g * h)](n) \quad \forall\, g, h, f \in A_*.$$

Нетрудно видеть, что равенство (1) представимо следующим образом:

$$(f * g)(n) = g(n) \sum_{x=1}^{n} f(x) + f(n) \sum_{y=1}^{n-1} g(y),$$

или в терминах функций

$$f * g = gS_f + fS_g - fg \tag{1'}$$

$\left(\text{здесь функции } S_f \text{ и } S_g \text{ определены правилом } S_f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i),\ S_g(n) = \sum_{i=1}^{n} g(i) \text{ соответственно}\right)$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию δ_k, полагая

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Совокупность функций δ_k образует счетный базис в пространстве $\mathcal{F}$. Заметим, что

$$(f * \delta_k)(n) = \begin{cases} 0, & n < k, \\ S_f(n), & n = k, \\ f(n), & n > k. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует: а) функция δ_1 является нейтральным элементом алгебры A_* (относительно умножения $*$);
б) $\delta_k * \delta_l = \delta_{\max\{k,l\}}$, т. е. для любого $k \in \mathbb{N}$ элемент δ_k является идемпотентом алгебры A_*.

3. Следующая теорема описывает группу единиц A_*^* алгебры A_*.

Теорема. $A_*^* = \{f \in A_* \mid S_f(n) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Индукцией устанавливается, что функция $g \in A_*$, определенная по функции f формулой

$$g(n) = \begin{cases} 1/f(1), & n = 1, \\ -\dfrac{f(n)}{S_f(n-1)\, S_f(n)}, & n > 1, \end{cases}$$

обладает свойством $f * g = \delta_1$. Ясно, что функция g определена на $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $S_f(n) \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Далее элемент, обратный к $f \in A_*$, будем обозначать $f^{(-1)}$.

Пример*. 1, $\mathrm{id} \in A_*^*$, при этом

$$1^{(-1)}(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ -\dfrac{1}{n(n-1)}, & n > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{id}^{(-1)}(n) = \begin{cases} 1, & n = 1; \\ -\dfrac{4}{n(n^2-1)}, & n > 1. \end{cases}$$

Пусть для всякого $k \in \mathbb{N}$

$$\xi_k(n) = \begin{cases} 0, & n < k \\ 1, & n \geqslant k \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тривиально проверяется, что $\xi_k \xi_l = \xi_{\max\{k,l\}}$. Определим отображение $S: A_* \to A$ правилом $S(f) = S_f$, т. е. $(S(f))(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Теорема. *Оператор $S: A_* \to A$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Линейность и биективность оператора устанавливаются тривиально. Пусть $f, g \in A_*$. Имеем

$$(S(f*g))(n) = \sum_{i=1}^{n} (f*g)(i) = \sum_{i=1} \sum_{x,y \in \mathbb{N}} f(x)\, g(y)\, \chi_i(x, y),$$

где χ_i — характеристическая функция множества $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \max\{x, y\} =$

* Здесь и далее id означает функцию, тождественную на $\mathbb{N}$, т. е. $\mathrm{id}(n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$= i\}$. Легко видеть, что $\sum_{i=1}^{n} \chi_i(x, y) = \xi_{\max\{x, y\}}(n)$. Теперь

$$(S(f*g))(n) = \sum_{x, y \in \mathbb{N}} f(x) g(y) \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x, y) = \sum_{x=1}^{n} f(x) \sum_{y=1}^{n} g(y) = (S(f))(n)\,(S(g))(n).$$

Являясь изоморфизмом, оператор S имеет обратный S^{-1}: $A \to A_*$. По известной формуле обращения Мебиуса

$$(S^{-1} f)(n) = \begin{cases} f(1), & n = 1; \\ f(n) - f(n-1), & n > 2. \end{cases}$$

Положим $f^{(0)} = \delta_1$, $f^{(1)} = f$, $f^{(k+1)} = f^{(k)} * f$, $k \geqslant 1$. Отсюда следует, что $f^{(k+l)} = f^{(k)} * f^{(l)}$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как S—изоморфизм, то $S(1_1) = \mathrm{id}$, $S(f^{(-1)}) = 1/S(f)$. Кроме того, ясно, что $S(\delta_k) = \xi_k$

4. Пусть $S_k = S_{\mathrm{id}^k}$. Таким образом,

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Для сумм (2), как это не трудно обнаружить, имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$S_k(n-1) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} S_i(n), \tag{3}$$

откуда непосредственно вытекает формула

$$n^k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} S_i(n). \tag{3'}$$

Теорема.

$$1^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} \mathrm{id}^{m-i}. \tag{4}$$

◀ Доказательство формулы (4) проведем по индукции. При $m = 1, 2$ равенство очевидно. Предположим, что оно верно для $m = k$ и покажем его справедливость для $m = k + 1$. Имеем

$$1^{(k+1)}(n) = (1^{(k)} * 1)(n) = \left(\left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} n^{k-i}\right) * 1\right)(n) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} (\mathrm{id}^i * 1)\right)(n).$$

Вычислим $\mathrm{id}^i * 1$:

$$(\mathrm{id}^i * 1)(n) = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{id}^i(l) + \mathrm{id}^i(n) \sum_{l=1}^{n-1} 1 = S_i(n-1) + n^{i+1}.$$

Таким образом,

$$1^{(k+1)}(n) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} (S_i(n-1) + n^{i+1}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} S_i(n-1) + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} n^{i+1} =.$$

В соответствии с формулой (3′) равенство продолжается следующим образом:

$$= (n-1)^k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} n^{i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} n^{k-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i+1} \binom{k}{i} n^{i+1}.$$

Делая во втором слагаемом замену $i+1 \leftrightarrow k-i$, получаем

$$1^{(k+1)}(n) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} n^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i+1} n^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i+1}\right) n^{k-i} + (-1)^k =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k+1}{i+1} n^{k-i} + (-1)^k + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+1} \binom{k+1}{i} n^{k+1-i}.$$

Следствие.

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} k^{m-i}. \tag{5}$$

Формула получается применением к обеим частям равенства (4) оператора S.

Теорема.

$$\mathrm{id}^{(m)} = \frac{1}{2^{m-1}} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{2i-1} \mathrm{id}^{2m-2i+1}, & m \in 2\mathbb{N}; \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{m+1}{2}} \binom{m}{2i-1} \mathrm{id}^{2m-2i+1}, & m \notin 2\mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Так как $S(\mathrm{id}^{(m)}) = S_1^m$, то $\mathrm{id}^{(m)} = S^{-1}(S_1^m)$. Используя формулу, получаем

$$\mathrm{id}^{(m)}(n) = S_1^m(n) - S_1^m(n-1) = \frac{n^m((n+1)^m - (n-1)^m)}{2^m}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

откуда требуемое равенство вытекает без труда.

Следствие.

$$S_1^m = \frac{1}{2^{m-1}} \cdot \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\frac{m}{2}} \binom{m}{2i-1} S_{2m-2i+1}, & m \in 2\mathbb{N}; \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{m+1}{2}} \binom{m}{2i-1} S_{2m-2i+1}, & m \notin 2\mathbb{N}. \end{cases} \tag{7}$$

Вот для примера несколько тождеств, следующих из (7):

$$S_1^2(n) = S_3(n); \qquad S_1^4(n) = \frac{1}{2}(S_7(n) + S_5(n));$$

$$S_1^6(n) = \frac{1}{16}(3S_{11}(n) + 10S_9(n) + 3S_7(n)).$$

Замечание. Полезно обратить внимание на геометрический и арифметический смыслы формул (4) и (6) соответственно.

Первая из них, отнесенная к аргументу n, выражает порядок «сферы»

$$\Omega_n^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m \mid \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = n\},$$

в то время как (5) дает порядок «шара»

$$B_n^m = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^m \mid \max\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \leqslant n\}.$$

Впрочем, формула (5) геометрически тривиальна, поскольку $B_n^m = \coprod_{i=1}^{n} \Omega_i^m$ (дизъюнктное объединение).

Значение формулы (6) на элементе n показывает чему равна сумма всевозможных произведений m натуральных чисел, имеющих наибольшее значение равное n.

Для получения следующей серии тождеств нам будет полезно равенство

$$S(f \cdot g) + S(f) \cdot S(g) = S(fS(g)) + S(gS(f)), \quad \forall f,\ g \in A_*, \tag{8}$$

которое есть результат применения к обеим частям соотношения (1′) оператора S. В частности, если $f = g$, то

$$S(f^2) + (S(f))^2 = 2S(fS(f)). \tag{9}$$

Пусть $f = \mathrm{id}^k$, $g = \mathrm{id}^l$. По формуле (8) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} [i^l S_k(i) + i^k S_l(i)] = S_{k+l}(n) + S_k(n) S_l(n).$$

Если $k - l = m$, то

$$\sum_{i=1}^{m} i^m S_m(i) = \frac{1}{2}(S_{2m}(n) + S_m^2(n)).$$

В заключение этого пункта приведем еще несколько интересных тождеств

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^m} \frac{(i+1)^m - (i-1)^m}{(i^2-1)^m} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{n^m (n+1)^m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{(k-1)^m k^i} \binom{m}{i} = 1 - \frac{1}{n^m},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2+1) = (n+1)!\,n.$$

Приведенные выше примеры показывают, что изоморфизм $S: A_* \to A$ лежит в основе многих интересных и важных арифметических и комбинаторных тождеств.

5. Зафиксируем некоторую функцию $\varphi \in A_*$ и определим линейный оператор $R_\varphi: A_* \to A_*$ правилом $R_\varphi(f) = f_*\varphi$.

Теорема. *Оператор* R_φ *обратим тогда и только тогда, когда* $\varphi \in A_*^*$, *при этом* $R_\varphi^{-1} = R_{\varphi^{(-1)}}$.

Доказательство. Рассмотрим композицию $R_\psi \cdot R_\varphi$. Имеем

$$(R_\psi \cdot R_\varphi)(f) = R_\psi(R_\varphi(f)) = R_\varphi(f) * \psi = (f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi) = R_{\varphi * \psi}(f). \tag{10}$$

Итак, $R_\psi \cdot R_\varphi = R_{\varphi * \psi}$. Таким образом $R_\psi \cdot R_\varphi = E$, если и только если $\varphi * \psi = \delta_1$; но тогда $\psi = \varphi^{(-1)}$ и $R_\varphi^{-1} = R_{\varphi^{(-1)}}$.

Замечание. Пусть $R_\Phi(f) = f_\Phi$. Тогда в явном виде формула обращения такова:

$$f(n)=\begin{cases} f(1), \quad n=1, \\ -\dfrac{\varphi(n)}{(S(\varphi))(n)(S(\varphi))(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n} f_\varphi(i) + \\ +f_\varphi(n)\left[\dfrac{1}{\varphi(1)}-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\varphi(i)}{(S(\varphi))(i)(S(\varphi)(i-1)}\right], \ n>1. \end{cases}$$

Например, если, $\varphi=\mathrm{id}$, то

$$f(n)=\begin{cases} f(1), & n=1, \\ -\dfrac{4}{n(n^2-1)}\sum\limits_{i=1}^{n} f_{\mathrm{id}}(i)+f_{\mathrm{id}}(n)\left[1-4\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{1}{i(i^2-1)}\right], & n>1. \end{cases}$$

Следствие. $\{R_\Phi \mid \varphi\in A_*^*\}$ *есть группа относительно операции композиции* $*$.

Семейство операторов $\{R_\varphi\}$ интересно, в частности, тем, что содержит (при $\varphi=1$) преобразование Радона на алгебре функций A_*, связанное с «окружностями» Ω_n^2:

$$\check{f}(n)=\sum_{(x,y)\in\Omega_n^2} f(x). \tag{11}$$

Из сказанного перед этим следует, что преобразование Радона (11) обратимо и формула обращения имеет вид

$$f(n)=\begin{cases} f(1), & n=1, \\ \dfrac{1}{n}\left[\check{f}(n)-\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\check{f}(i)\right], & n>1. \end{cases}$$

Функцию $f\in A_*$ назовем суммируемой, если ряд $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f(i)$ сходится. В этом случае число $\omega(f)=\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f(i)$ будем называть весом функции f.

Пусть σ_* — подалгебра суммируемых функций, $\sigma_*^*=A_*^*\cap\sigma_*$. Нетрудно проверить, что отображение $\omega:\sigma_*\to\mathbb{R}$ есть гомоморфизм алгебр. Таким образом, $\omega(\delta_1)=1$, $\omega(f^{(k)})=(\omega(f))\,F_n\omega(f^{(-1)})=1/\omega(f)$ при условии, что $f\in\sigma_*^*$, $\omega(f)\neq 0$. Пусть $A_*^0=\ker\omega$, т. е. $A_*^0=\{f\in A_*\mid\omega(f)=0\}$.

Теорема. *Для каждой суммируемой функции* $\varphi\in A_*^*$ *подалгебра* A_*^0 *является инвариантной относительно оператора* R_Φ; *если при этом* $\omega(\varphi)\neq 0$, *то* $R_\Phi A_*^0=A_*^0$.

Доказательство. Пусть $f\in A_*^0$. Тогда $\omega(R_\varphi(f))=\omega(f)\,\omega(\varphi)=0$ для всякой суммируемой функции φ Таким образом $R_\varphi A_*^0\subset A_*^0$ Если теперь $\omega(\varphi)\neq 0$, то $\omega(R_\Phi^{-1}(f))=\omega(R_{\varphi(-1)}(f))=\omega(f)/\omega(\varphi)=0$, т. е. $R_\Phi^{-1}A_*^0\subset A_*^0$, откуда $R_\Phi A_*^0\supset A_*^0$. Следовательно, $R_\Phi A_*^0=A_*^0$.

Сопоставляя $\varphi\mapsto R_\varphi$, получаем отображение $R:A_*\to\mathcal{L}(A_*)$, где $\mathcal{L}(A_*)$ — алгебра линейных операторов на A_*. Это отображение является, как это следует из доказанной теоремы, гомоморфизмом, причем $R\mid A_*^*$, очевидно, изоморфизм групп A_*^* и $\mathrm{GL}(\mathcal{L}(A_*))$.

1. *Aizley P.* Identities involving numericial functions // Ars Combinatoria.— 1983.— 18.— P. 81—85.
2. *Urbanik K.* Generalized convolutions, I—III // Stud. math (PRL).— 1984.— **80**, N 2.— P. 167—189.
3. *Волькович В. Э.* Многомерные *B*-устойчивые распределения и реализации обобщенных сверток // Пробл. устойчивости стохастич. моделей.— М., 1984.— С. 40—54.
4. *Смирнов А. К.* Некоторые свойства обобщенных сверток К. Урбаника // Там же.— С. 136—139.

Коломен. пед. ин-т

Получено 10.09.87