УДК 517.946+517.9+517.836

А. К. Прикарпатский

Элементы теории интегрируемости дискретных динамических систем

1. Пусть на бесконечномерном пространстве $M \simeq \mathbb{R}^{m\times\infty}$ бесконечных последовательностей $M \ni u = \{\ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots\}$ задана нелинейная дискретная динамическая система

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

где $K: M \to T(M)$ — гладкий по Фреше нелинейный локальный функционал на M, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционная переменная. Установим эффективные критерии, дающие возможность алгоритмически определить, является ли заданная на M динамическая система (1) вполне интегрируемым потоком. С этой целью введем ряд определений [1, 2].

Определение 1. *Линейный оператор* $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ *называется имплектическим на* M, *если определена скобка Пуассона* $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mathrm{grad}_n(\cdot), \mathcal{L}\,\mathrm{grad}_n(\cdot)\rangle$, *где* $\mathrm{grad}_n(\cdot) = \frac{\delta}{\delta u_n}(\cdot)$, $n \in \mathbb{Z}$ — *оператор вариационной производной Эйлера на множестве* $\mathcal{D}(M)$ *гладких по Фреше функционалов.*

Замечание 1. Скобка $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}}$ на $\mathcal{D}(M)$ является скобкой Пуассона, если она удовлетворяет тождеству Якоби [1, 2].

Определение 2. *Линейный оператор* $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ *называется нетеровым, если он удовлетворяет условию*

$$\mathcal{L}'\cdot K - \mathcal{L}K'^* - K'\cdot\mathcal{L} = 0, \tag{2}$$

где $K': T(M) \to T(M)$ — *производная Фреше локального функционала* $K: M \to T(M)$, $K'^*: T^*(M) \to T^*(M)$ — *его сопряжение относительно билинейной формы* $(\cdot,\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle(\cdot)_n, (\cdot)_n\rangle$ *на* $T^*(M)\times T(M)$.

Определение 3. *Динамическая система* (1) *называется гамильтоновой, если справедливо равенство*

$$u_t = -\mathcal{L}\,\mathrm{grad}\,H = K[u], \tag{3}$$

где $H \in \mathcal{D}(M)$ — *функция Гамильтона.*

Замечание 2. Имплектический оператор $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ кососимметричен, а также для (3) — нетеров. Если существует обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}: T(M) \to T^*(M)$, то его называют симплектическим, а сам оператор $\mathcal{L}$ — косимплектическим. При этом оператор $\mathcal{L}^{-1}: T(M) \to T^*(M)$ удовлетворяет дуальному к (2) уравнению нетеровости вида

$$(\mathcal{L}^{-1})' \cdot K + K'^* \cdot \mathcal{L}^{-1} + \mathcal{L}^{-1} K' = 0. \tag{4}$$

Так как необходимым условием интегрируемости динамической системы (1) является наличие достаточного количества законов сохранения, легко устанавливается [3] следующая теорема типа П. Лакса.

Теорема 1. *Дискретная динамическая система* (1) *на M обладает законами сохранения тогда и только тогда, когда разрешимо уравнение*

$$\varphi_t + K'^* \cdot \varphi = 0 \tag{5}$$

в классе локальных «градиентных» функционалов $\varphi \in T^*(M)$, для которых выполнено соотношение $\varphi'^* = \varphi'$.

2. Аналогично методике работы [2] устанавливаем, что уравнение (5) допускает решение $\varphi = \varphi(\lambda) \in T^*(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ — параметр, в виде

$$\varphi = (1, b_1, \ldots, b_{m-1})^\tau \prod_{j=-\infty}^{n} \sigma_j [u; \lambda] \exp [\omega (t; \lambda)]. \tag{6}$$

Здесь $\omega(t; \lambda)$ — «дисперсионная» функция, причем функционалы $b_k = b_k [u; \lambda]$, $k = \overline{1, m-1}$; $\sigma_n [u; \lambda]$, $n \in \mathbb{Z}$, допускают асимптотическое при $|\lambda| \to \infty$ разложение

$$b_k \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} b_k^{(j)} [u] \lambda^{-j}, \quad \sigma_n \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sigma_n^{(j)} [u] \lambda^{-j+s}, \tag{7}$$

где $\mathbb{Z}_+ \ni s < \infty$ — некоторое фиксированное целое число. Подстановка выражений (6), (7) в (5) приводит [2, 4 — 7] к набору рекуррентных соотношений на функционалы $b_k^{(j)} [u]$, $k = \overline{1, m-1}$, и $\sigma_n^{(j)} [u]$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, однозначно их определяющих.

Замечание 3. В случае неинтегрируемости динамической системы (1) указанная выше рекуррентная последовательность решений не имеет. Если же среди множества функционалов $\{\sigma_n^{(j)} [u] : j \in \mathbb{Z}_+\}$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$ имеется только конечное число нетривиальных, то эта ситуация моделирует [2, 7] случай, когда динамическая система (1) линеаризуется конечным числом нелинейных преобразований.

Если динамическая система (1) допускает решение уравнения (5) в виде (6), (7), тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Функционал $\gamma(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \ln \sigma_j [u; \lambda]$ является производящей функцией законов сохранения динамической системы* (1).

Доказательство немедленно следует из (6) после перехода к пределу $n \to \infty$ при условии быстрого убывания по $n \in \mathbb{Z}$ $(\sup_{n \in \mathbb{Z}} |n|^k |u_n| < \infty$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+)$ точек многообразия M.

3. Пусть функционал $H \in \mathcal{D}(M)$ принадлежит множеству $\operatorname{span}_{\mathbb{R}^1} \{\gamma_j \in \mathcal{D}(M) : j \in \mathbb{Z}_+\}$, где $\gamma(\lambda) \simeq \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{-j+s} \gamma_j$ при $|\lambda| \to \infty$, а также существует такое решение $\mathcal{L}: T^*(M) \to T(M)$ уравнения нетеровости (2), что выполнено условие (3). Предположим также, что существует другое нетривиальное решение $\mathcal{M}: T^*(M) \to T(M)$ уравнения нетеровости (2) такое, что рекурсионный оператор $\Lambda = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{M}: T^*(M) \to T^*(M)$ наследственный [8], т. е. имплектическая $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$-пара согласована на M, причем дискретно-операторная размерность оператора Λ минимальна. Тогда существует такое число $\mathbb{Z}_+ \ni q < \infty$, что выполнено равенство

$$\lambda^q \mathcal{L} \operatorname{grad} \gamma(\lambda) = \mathcal{M} \operatorname{grad} \gamma(\lambda) \tag{8}$$

для всех $\lambda \in \mathbb{R}^1$. В случае дискретных динамических систем условие вида (8) было ранее получено в работе [1]. Таким образом, в силу соотношения (8) справедлива теорема.

Теорема 3. *Иерархия законов сохранения $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, является функционально независимой на M и инволютивной относительно двух скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{L}}$ и $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}$.*

Доказательство следует из соотношения $\{\gamma(\lambda), \gamma(\mu)\}_{\mathcal{L}} = \{\gamma(\lambda), \gamma(\mu)\}_{\mathcal{M}} = 0$ для всех $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^1$.

Следствие 1. *Динамическая система* (1) *на M является бигамильтоновым потоком.*

4. В силу бесконечномерности многообразия M, следуя работе [9], установим критерии полной интегрируемости динамической системы (1). Пусть $\Lambda(M) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^j(M)$ — алгебра Грассмана дифференциальных форм на M. Тогда следующий комплекс точен (лемма Пуанкаре) для всех $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^j(M) \xrightarrow{d} \Lambda^{j+1}(M) \xrightarrow{d} \ldots, \tag{9}$$

причем $\frac{d}{dn} d = d \frac{d}{dn}$, где $\frac{d}{dn} := i_{\frac{d}{dn}} d + d i_{\frac{d}{dn}}$ — производная Ли в направлении векторного поля $\frac{d}{dn} \in \mathcal{T}(M)$, где для любого элемента $f_n \in \Lambda^0(M)$ $\frac{d}{dn} f_n = f_{n+1} - f_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Легко установить, что для любого элемента $\omega_n \in \Lambda(M)$ справедливо равенство

$$\frac{\delta}{\delta u_n} \frac{d}{dn} \omega_n = 0. \tag{10}$$

Теорема 4 [9, 10]. *Пусть $\mathfrak{L}_n[u] \in \Lambda^0(M)$ — гладкий по Фреше локальный функционал на M. Тогда существует такая 1-форма $\omega_n^{(1)} \in \Lambda^1(M)$, что справедливо равенство*

$$d\mathfrak{L}_n[u] = \frac{\delta \mathfrak{L}_n[u]}{\delta u_n} du_n + \frac{d}{dn} \omega_n^{(1)} \tag{11}$$

для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство (11) проводится прямым вычислением операции $d: \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ на элементе $\mathfrak{L}_n[u] \in \Lambda^0(M)$.

Следствие 2. *Векторное поле $d/dn \in \mathcal{T}(M)$ является гамильтоновым на M относительно симплектической структуры $\Lambda^2(M) \ni \omega_n^{(2)} = d\omega_n^{(1)}$ на критическом подмногообразии $\overline{M} = \left\{u \in M : \frac{\delta \mathfrak{L}_n[u]}{\delta u_n} = 0,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Действительно, равенства $d^2 \mathfrak{L}_n[u] = 0$ и (11) дают $\frac{d}{dn} \omega_n^{(2)} = -d\left(\frac{\delta \mathfrak{L}_n[u]}{\delta u_n}\right) \wedge du_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $\frac{d}{dn} \omega_n^{(2)} = 0$ на подмногообразии критических точек $\overline{M} \subset M$ функционала $\mathfrak{L}_n[u] \in \Lambda^0(M)$.

Пусть $M_N \subset M$ — подмногообразие критических точек функционала $\mathcal{D}(M) \ni \mathfrak{L}^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} c_j \gamma_j$, где $c_j \in \mathbb{R}^1$, $j = \overline{0, N}$, — некоторые постоянные числа. Так как $\gamma_j \in \mathcal{D}(M)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, — законы сохранения динамической системы (1), то многообразие $M_N \subset M$ инвариантно относительно (1) для всех $N \in \mathbb{Z}_+$. В силу тождества $\frac{\delta}{\delta u_n} \frac{du_n}{dn} \frac{\delta}{\delta u_n} = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой локальный функционал $h_n^{(N)}[u] \in \Lambda^0(M)$, что $-\frac{d}{dn} h_n^{(N)}[u] = \frac{du_n}{dn} \times$

$\times \dfrac{\delta \mathfrak{L}_n^{(N)}[u]}{\delta u_n}$, где $\mathfrak{L}^{(N)} = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_n^{(N)}[u]$. Тем самым на подмногообразии $M_N \subset M$ $\dfrac{dh_n^{(N)}[u]}{dn} = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $h_n^{(N)}[u] \in \Lambda^0(M_N)$ — закон сохранения векторного поля $\dfrac{d}{dn} \in \mathscr{T}(M_N)$, совпадающий [9, 10] с его гамильтонианом. Вводя канонические координаты [10 — 12], можно показать, что на $M_N \subset M$ симплектическая форма $\omega_n^{(2)} \in \Lambda^2(M)$ невырождена и замкнута.

5. Пусть теперь $f_n^{(N)}[u] \in \Lambda^0(M)$ — локальный функционал на M, удовлетворяющий условию

$$\langle \mathrm{grad}_n \mathfrak{L}^{(N)}, \mathscr{L}\, \mathrm{grad}_n H \rangle = \frac{d}{dn} f_n^{(N)}[u]. \tag{12}$$

Элемент $f_n^{(N)}[u] \in \Lambda^0(M)$ необходимо существует ввиду равенства $\{\mathfrak{L}^{(N)}, H\}_{\mathscr{L}} = 0$ на M. Из условия (12) немедленно находим, что динамическая система (1) на $M_N \subset M$ является конечномерной гамильтоновой системой относительно построенной выше симплектической структуры $\omega_n^{(2)} \in \Lambda^2(M_N)$, причем выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} u_n = \{f_n^{(N)}[u], u_n\}_\omega = K_n[u], \tag{13}$$

где $\{\cdot, \cdot\}_\omega$ — скобка Пуассона на $M_N \subset M$. Тем самым $f_n^{(N)}[u] \in \Lambda^0(M)$ — функция Гамильтона для векторного поля $d/dt \in \mathscr{T}(M)$. В этом можно убедиться, заметив, что на M_N поле $d/dt \in \mathscr{T}(M)$ имеет следующее [9] каноническое представление: $d/dt = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \langle K_n, \partial/\partial u_u \rangle$, причем, очевидно, векторные поля d/dt и $d/dn \in \mathscr{T}(M)$ коммутируют. Если же, наоборот, на $M_N \subset M$ мы установим равенство (13), инвариантное относительно набора чисел $\{c_j \in \mathbb{R}^1 \colon j = \overline{0, N}\}$ для всех $N \in \mathbb{Z}_+$, то исходная динамическая система (1) на M необходимо гамильтонова.

Рассмотрим теперь критическое подмногообразие $M_N^* \subset M$, ассоциированное с $M_N \subset M$ по правилу $u \in M_N^*$, если и только если

$$\frac{\delta \mathfrak{L}_n^{(N)*}[u]}{\delta u_n} = 0, \tag{14}$$

где $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{L}_n^{(N)*}[u] = \mathfrak{L}^{(N)*} = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j \gamma_{j-q}$. Если $\omega_n^{(2)*} \in \Lambda^2(M)$ — соответствующая симплектическая структура на $M_N^* \subset M$, то можно установить, является ли на M_N^* векторное поле $d/dt \in \mathscr{T}(M)$ гамильтоновым, т. е. существует ли локальный функционал $f_n^{(N)*}[u] \in \Lambda^0(M)$ такой, что справедливо равенство вида (13): $\dfrac{d}{dt} u_n = \{f_n^{(N)*}[u], u_n\}_{\omega^*}$, где $\{\cdot, \cdot\}_{\omega^*}$ — соответствующая скобка Пуассона, для всех $N \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае можно утверждать, что исходная динамическая система (1) на M бигамильтонова, так как в случае существования второго имплектического оператора $\mathscr{M} \colon T^*(M) \to T(M)$ из соотношения вида (12) $\langle \mathrm{grad}_n \mathfrak{L}_n^{(N)*}, \mathscr{M}\, \mathrm{grad}_n \overline{H} \rangle = \dfrac{d}{dn} f_n^{(N)*}[u]$, где $\mathrm{grad}\, \overline{H} = \mathscr{M}^{-1} K \in T^*(M)$, следует бигамильтоновость динамической системы (1). Кроме того, мы убеждаемся, что для бигамильтоновой динамической системы (1) существует новая бесконечная иерархия инвариантных и функционально независимых функционалов $\{f_n^{(N)}[u] \colon N \in \mathbb{Z}_+\}$. Если к тому же выполнено условие полноты $T^*(M) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}^1} \{\mathrm{grad}_n \gamma_j \in T^*(M) \colon j \in \mathbb{Z}_+\}$, то динамическая система (1) на M будет [9] вполне интегрируемым по Лиувиллю гамильтоновым потоком.

6. Для примера рассмотрим нелинейную дискретную динамическую систему Шредингера [1, 13]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi_n &= i(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) - i|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) \\ \frac{d}{dt}\psi_n^* &= -i(\psi_{n+1}^* - 2\psi_n^* + \psi_{n-1}^*) + i|\psi_n|^2(\psi_{n+1}^* + \psi_{n-1}^*) \end{aligned}\right\} = K_n[\psi, \psi^*], \quad (15)$$

где $u = (\psi, \psi^*) \in M \simeq \mathbb{C}^{2\times\infty}$ — быстроубывающее по $n \in \mathbb{Z}$ бесконечномерное пространство, $t \in \mathbb{R}^1$. Динамическая система (15) бигамильтонова [1], причем имплектическая $(\mathscr{L}, \mathscr{M})$-пара имеет вид

$$\mathscr{L} = \begin{Vmatrix} 0 & ih_n \\ -ih_n & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathscr{M} = \begin{Vmatrix} (h_n - \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n^*)E & (\psi_n^2 + \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n)E^{-1} \\ \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n^*E & -(1 + \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n)E^{-1} \end{Vmatrix} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n & h_n - \psi_n\partial_n^{-1}\psi_n^* \\ 1 + \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n & -(\psi_n^* + \psi_n^*\partial_n^{-1}\psi_n^*) \end{Vmatrix}, \quad (16)$$

где $h_n = 1 - \psi_n^*\psi_n$, $\partial_n^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\sum\limits_{-\infty}^{n-1}(\cdot)_n - \sum\limits_{n}^{\infty}(\cdot)_n\right]$, $E = d/dn + 1$ — оператор сдвига. Бесконечная иерархия $\{\gamma_j \in \mathscr{D}(M) : j \in \mathbb{Z}_+\}$ инволютивных законов сохранения, получаемых из определяющего уравнения (5), имеет вид

$$\gamma_0 = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \ln h_n, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n\psi_{n+1}^*, \quad \gamma_3 = 0,$$

$$\gamma_4 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\psi_{n+1}\psi_{n-1}^*h_n - \frac{1}{2}(\psi_n\psi_{n-1}^*)^2\right], \quad (17)$$

и т. д., причем выполнено соотношение (8) с числом $\mathbb{Z}_+ \ni q = 2$: $\mathscr{L}\lambda^2 \operatorname{grad}\gamma(\lambda) = \mathscr{M}\operatorname{grad}\gamma(\lambda)$, где $\gamma(\lambda) \simeq \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_+} \gamma_j\lambda^{-j}$.

Ввиду полноты [1, 14] иерархии законов сохранения (17) заключаем, что динамическая система (15) вполне интегрируема по Лиувиллю. Кроме того, применяя градиентный [2] алгоритм, обобщенный на дискретный случай, несложно установить, что динамическая система (15) обладает на M стандартным [1, 15] дискретным представлением типа Лакса, оператор $L[u; \lambda]$ которого имет вид

$$L_n[u; \lambda] = \begin{Vmatrix} \lambda & \psi_n \\ \psi_n^* & \lambda^{-1} \end{Vmatrix}, \quad (18)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ — спектральный параметр. Наличие оператора (18) дает возможность предъявить для динамической системы (15) с помощью метода обратной задачи [1, 14—16] широкий класс явных решений, как солитонного, так и конечнозонного типов, важных для приложений.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко В. Г.* Дифференциально-разностные динамические системы, ассоциированные с разностным оператором Дирака, и их полная интегрируемость // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— С. 180—186.
2. *Нелинейная* модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и полная интегрируемость / Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, А. М. Курбатов, В. Г. Самойленко // Теорет. мат. физика.— 1985.— 65, № 2.— С. 271—284.
3. *Lax P. D.* Periodic solutions of Kde V equation // Communs Pure and Appl. Math.—1975. — 28, N 2.— P. 141—188.
4. *Скрипник А. И., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Прямые методы нахождения представлений типа Лакса для динамических систем // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 5.— С. 21—26.
5. *Сидоренко Ю. Н.* Представление Лакса и полная интегрируемость обобщенной нелинейной модели типа Шредингера // Там же.— № 12.— С. 17—20.
6. *Сидоренко Ю. Н.* Гамильтоновость нелинейной модели Боголюбова // Там же.— 1986.— № 3.— С. 240—242.
7. *Сидоренко Ю. Н.* О гамильтоновости некоторых двукомпонентных систем // Статистическая механика и квантовая теория поля / Сб. науч. тр. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та. — 1986.— 150.— С. 102—108.

8. *Fuchssteiner B., Fokas A. S.* Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries // Physica D.— 1981.— **4**, N 1.— P. 47—66.
9. *Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К.* Алгебраическая структура градиентного метода Н. Н. Боголюбова (мл.) в теории нелинейных динамических систем.— Киев, 1986. — 60 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; № 86-53).
10. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Теорема Лиувилля и интегрируемые нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его приложения.— 1979.— **13**, № 1.— С. 8—20.
11. *Maeda S.* Canonical structure and symmetries for discrete systems // Math. Jap.— 1980. — **25**, № 4.— P. 405—420.
12. *Maeda S.* Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space // Ibid.— 1982.— **27**, N 3.— P. 345—356.
13. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Обратная периодическая задача для дискретного приближения нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН СССР.— 1982.— **265**, № 5.— С. 1103—1108.
14. *Gerdjikov V. S., Ivanov M. I., Kulish P. P.* Completely integrability of difference evolutions.— Дубна, 1980.— 20 с.— (Препринт / Объед. ин-т ядер. исслед., № 2-80-882).
15. *Ablowitz M. J., Ladic J. F.* Nonlinear differential—difference equations // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 3.— P. 598—603.
16. *Новиков С. П.* (ред.) Теория солитонов : метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.— 340 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики
АН УССР, Львов

Получено 03.06.86