УДК 517.5

А. К. Кушпель

К оценке поперечников классов гладких функций в пространстве L_q

Получены точные по порядку оценки поперечников классов бесконечно дифференцированных функций.

Одержані точні по порядку оцінки поперечників класів нескінченно диференційованих функцій.

Обозначим через W_p^k класс функций f, представимых в виде свертки

$$f(\cdot) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K(\cdot - \tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \quad \|\varphi\|_p \leqslant 1,$$

где $s[K(\tau)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(k\tau - \beta\pi/2)$. Рассмотрим случай, когда $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$.

Пусть X — банахово пространство, C — центральносимметричный компакт в X, L_n — подпространство размерности n. Величину $d_n(C, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{u \in C} \inf_{v \in L_n} \|u - v\|_X$ называют колмогоровским поперечником множества C в X (см. например, [1]).

В [2] показано, что

$$d_{2n-1}(W_p^k, L_q) \overset{\mathrm{df}}{=} d_{2n-1}(\psi, \beta, p, q) \ll$$

$$\ll \begin{cases} e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/q)_+}, & 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2, \\ 1 \leqslant q < p < \infty, & 2 \leqslant p < q < \infty, \\ e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/2)}, & 1 < p \leqslant 2 < q < \infty. \end{cases} \tag{1}$$

В настоящей статье на базе метода, примененного в [3], получены оценки снизу поперечников классов W_p^k. Метод оценки снизу поперечников основывается на исследовании категорных поперечников $\chi_N(\psi, \beta, p, q)$, введенных В. М. Тихомировым. При этом, используя, по существу, одну и ту же конструкцию, удается получить окончательные в смысле порядка оценки на классах целых, аналитических, бесконечнодифференцируемых функций, а также на классах функций конечной гладкости при различных соотношениях между p и q. На первом этапе рассматривается след множества W_p^K на подпространстве $\mathscr{T}_{2n+1} : W_p^K \cap \mathscr{T}_{2n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} W_{p,n}^K$. Затем выпуклое тело $W_{p,n}^K$ приближается многогранником $Q_n(K, p) = \mathrm{conv}\{t_n^{(1)}, \ldots, t_n^{(m)}\}$, где $t_n^{(1)}, \ldots, t_n^{(m)}$ — полиномы специального вида, $t_n^{(k)} \in W_{p,n}^K$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Очевидно, $\overline{W}_n^K \supset Q_n(K, p)$. Далее, исследуем величину $\eta_n = \inf\{F(\pi), \pi \in \mathrm{P}(\mathscr{T}_{2n+1})\}$, где $F(\pi) = \sup\{\|x\|, x \in Q(K, p) \cap \pi\}$, π — прямая проективного пространства $\mathrm{P}(\mathscr{T}_{2n+1})$. В ряде случаев (например, когда $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r \geqslant 1$) величина η_n дает точную по порядку оценку снизу для поперечника $\chi_{2n}(\psi, \beta, p, q)$. На втором этапе, с учетом известных оценок для полиномов Рудина — Шапиро $\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(0) e^{ikt} \right\|_\infty \leqslant C n^{1/2}$, где $\theta \in [0, 1]$, а $r_k(\cdot)$ — функции Радемахера, либо неравенства Хинчина

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} c_k r_k(\theta) \right|^p d\theta \right)^{1/p} \leqslant \left((p/2 + 1) \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \right)^{1/2}, \qquad p > 0,$$

строится случайное множество $\sigma_n \in \mathrm{P}(\mathscr{T}_{2n+1})$, имеющее достаточно высокую (в смысле Люстерника — Шнирельмана) категорию относительно $\mathrm{P}(\mathscr{T}_{2n+1})$ такое, что величина $\eta(\sigma_n) = \inf\{F(\pi), \pi \in \sigma_n\}$, реализует соответствующую оценку снизу для поперечника $\chi_{2n}(\psi, \beta, p, q)$. В ряде случаев величина $\eta(\sigma_n)$ по порядку больше, чем η_n и реализует точную по порядку оценку снизу для поперечника.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\psi_1(k) = e^{-\alpha k^r}$, *тогда*

$$d_{2n}(\psi_1, \beta, p, q) \geqslant \chi_{2n}(\psi_1, \beta, p, q) \gg$$

$$\gg \begin{cases} e^{-\alpha n^r}, & 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty, \quad 2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty; \\ e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/q)}, & 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2; \\ e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/2)}, & 1 \leqslant p \leqslant 2 < q \leqslant \infty. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и оценок (1) находим

$$d_{2n}(\psi_1, \beta, p, q) \asymp \chi_{2n}(\psi_1, \beta, p, q) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} e^{-\alpha n^r}, & 1 \leqslant p = q \leqslant \infty, \quad 2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty, \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 2 \leqslant p \leqslant q < \infty; \\ e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/2)}, & 1 \leqslant p \leqslant 2 < q < \infty, \\ e^{-\alpha n^r} n^{(1-r)+(1/p-1/q)}, & 1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2. \end{cases}$$

В связи с теоремой 1 отметим, что В. Н. Темляков сообщил автору другой способ доказательства оценок снизу для поперечников $d_{2n}(\psi_1, \beta, p, q)$ при $2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant 2 < q \leqslant \infty$.

1. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 304 с.
2. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q. — Киев, 1987. — 54 с. — (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.44).
3. *Кушпель А. К.* Поперечники классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 1989. — 41, № 4. — С. 576—579.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 23.11.89