УДК 517.928

Е. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Морд. ун-т, Саранск)

Прямой метод Ляпунова в теории асимптотической эквивалентности дифференциальных уравнений

В терминах прямого метода Ляпунова даны достаточные условия асимптотической эквивалентности дифференциальных уравнений.

В термінах прямого методу Ляпунова наведені достатні умови асимптотичної еквівалентності диференціальних рівнянь.

В работах [1—3] рассмотрены методы асимптотического интегрирования возмущенных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра. Значение этих методов можно подчеркнуть хотя бы тем, что они в себе содержат метод усреднения как частный случай. Однако главная трудность применения этой теории связана с получением оценок для производных по начальной точке и параметру от решений некоторых вспомогательных уравнений. В настоящей работе эти оценки выражены в терминах прямого метода Ляпунова.

Рассмотрим множество Ξ дифференциальных уравнений вида

$$dx/dt = f(t, x, \varepsilon),$$

где $f \in C([T, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n)$. Пусть уравнения $dx/dt = f_1(t, x, \varepsilon)$ и $dy/dt = f_2(t, y, \varepsilon)$ принадлежат этому множеству, A и B — множества всех ограниченных решений соответствующих уравнений, когда верхняя граница зависит лишь от начальных данных:

$$A = \{x(t:t_0, x_0, \varepsilon) : \|x(t:t_0, x_0, \varepsilon)\| \leqslant K_1(t_0, x_0),\ t_0 \geqslant T,\ x_0 \in R^n\},$$

$$B = \{y(t:t_0, y_0, \varepsilon) ; \|y(t:t_0, y_0, \varepsilon)\| \leqslant K_2(t_0, y_0),\ t_0 \geqslant T,\ y_0 \in R^n\}.$$

Будем говорить, что эти уравнения асимптотически эквивалентны, если $\forall x(t:t_0, x_0, \varepsilon) \in A$ $\exists y(t:t_0, y_0, \varepsilon) \in B$ такое, что при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$x(t:t_0, x_0, \varepsilon) = y(t:t_0, y_0, \varepsilon) + o(1) \qquad (2)$$

при $t \to +\infty$ и наоборот, $\forall y(t:t_0, y_0, \varepsilon) \in B$ $\exists x(t:t_0, x_0, \varepsilon) \in A$ такое, что также при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедлива асимптотическая формула (2).

Рассмотрим уравнения

$$dx/dt = f(t, x, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon), \qquad (3)$$

$$dx/dt = f(t, x, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon), \qquad (4)$$

$$dz/dt = f(t, z, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) + g(t, z, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon), \qquad (5)$$

где $f \in C([T, +\infty) \times R^n \times S_c \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $S_c = \{z : z \in R^m,\ \|z\| \leqslant c,\ 0 \leqslant c < +\infty\}$, $\psi \in C^{(1,0)}([T, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], S_c)$, $g \in C([T, +\infty) \times R^n \times S_c \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, для некоторой последовательности $s_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \psi(s_k, \varepsilon) = \lambda^*(\varepsilon)$, существуют непрерывные матрицы Якоби $f_x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_\lambda \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$, $\lambda \overset{\text{def}}{=} \psi(\tau, \varepsilon)$. При $c = +\infty$ и $\lambda^*(\varepsilon) = \infty$ будем считать, что $\lim\limits_{k\to+\infty} f(t, x, \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) = f_2(t, x, \varepsilon)$, $f_1 \in C([T, +\infty) \times R^n \times (0, \varepsilon_0], R^n)$, $f(t, x, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} f_1(t, x, \varepsilon)$ при всех $T \leqslant t < +\infty$, $x \in R^n$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Еще предположим, что уравнения (4) и (5) принадлежат множеству Ξ.

Пусть $x(t) \overset{\text{def}}{=} x(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (3) с начальными данными (τ, γ), $x(t:\tau, \gamma, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon)$ — решение уравнения (4), $z(t:\tau, \gamma, \varepsilon)$ — решение уравнения (5). Из условий вытекает, что там, где существует решение $x(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$, существуют производные $\dfrac{\partial x}{\partial \gamma}(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$ и $\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}(t:\tau, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)$. В работах [1 — 3] даны условия асимптотической эквивалентности уравнений (4) и (5), которые выражены через эти производные, находящиеся под знаками несобственных интегралов. Отсюда следует, что для практики необходимо знание оценок для функций $\left\|\dfrac{\partial x}{\partial \gamma}\right\|_{R^n}$ и $\left\|\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right\|_{R^m}$.

Теорема 1. *Пусть* $V = C([T, +\infty) \times R^n \times [T, +\infty) \times [T, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], R^1_+)$, $R^1_+ = [0, +\infty)$ *и*: a) $\|\varphi(\tau_1, \varepsilon) - \varphi(\tau_2, \varepsilon)\|_{R^m} + \|x - y\| \leqslant V(t, x - y, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) \leqslant K(\|\varphi(\tau_1, \varepsilon) - \varphi(\tau_2, \varepsilon)\|_{R^m} + \|x - y\|)$ $\forall t \geqslant T$, τ_1, $\tau_2 \in [T, +\infty)$, x, $y \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и некотором* $K > 1$; в) $|V(t, r_1, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) - V(t, r_2, \tau_1, \tau_2, \varepsilon)| \leqslant K\|r_1 - r_2\|$ $\forall t \geqslant T$, r_1, $r_2 \in R^n$, τ_1, $\tau_2 \in [T, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$; с) $D^+V \geqslant cV$, *где* $c \in R^1_+$, $D^+V \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h\to+0} \sup\limits_h \Big\{\dfrac{1}{h}(V(t + h, x - y + hf(t, x, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) - hf(t, y, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon), \tau_1, \tau_2, \varepsilon) - V(t, x - y, \tau_1, \tau_2, \varepsilon))\Big\}$ $\forall t \geqslant T$, $x, y \in R^n$, $\tau_1, \tau_2 \in [T, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varphi(\tau, \varepsilon) = R[\psi(\tau, \varepsilon)]$, $R \in C(S_c, R^m)$, $\|R(z_1, \varepsilon) - R(z_2, \varepsilon)\|_{R^m} \leqslant K_1\|z_1 - z_2\|_{R^m}$ *при любых* z_1, $z_2 \in S_c$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $K_1 > 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(s_k, \varepsilon) = \lambda_1^*(\varepsilon)$, $\|\lambda_1^*(\varepsilon)\|_{R^m} < +\infty$. *Тогда*

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial \gamma}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right\| \leqslant Ke^{c(t-t_0)},$$

$$\left\|\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon)\right\|_{R^m} \leqslant K_0 e^{c(t-t_0)}$$

$$\forall t_0 \geqslant t \geqslant T, \quad \gamma \in R^n, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad K_0 = KK_1.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения $dx/dt = f(t, x, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon)$, $dy/dt = f(t, y, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon)$ и решения $x(t) = x(t:t_0, \gamma_1, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon)$, $y(t) = y(t:t_0, \gamma_2, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon)$. Пусть $V'_+ \overset{\text{def}}{=} V'_+(t, x(t) - y(t), \tau_1, \tau_2, \varepsilon)$ — правая верхняя производная Дини функции $V(t, x(t) - y(t), \tau_1, \tau_2, \varepsilon)$ в произвольной точке $t \in [T, +\infty)$ и $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда

$$V(t + h, x(t + h) - y(t + h), \tau_1, \tau_2, \varepsilon) - V(t, x - y, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) \leqslant V(t + h, x - y + hf(t, x, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) - hf(t, y, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon), \tau_1, \tau_2, \varepsilon) - V(t, x - y, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) + Kh\|R_1(t, x, h) - R_2(t, y, h)\|,$$

где R_1 и R_2 стремятся к нулю одновременно с h. Поэтому $V'_+ \leqslant D^+V$. Аналогичными рассуждениями получим $V'_+ \geqslant D^+V$. Поэтому $V'_+ = D^+V$.

Пусть $\tau_1 = \tau_2$. Тогда, интегрируя неравенство с) от t до t_0, где $x - y = x(t:t_0, \gamma_1, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:t_0, \gamma_2, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon)$, $t_0 \geqslant t$, получаем

$$\| x(t:t_0, \gamma_1, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:t_0, \gamma_2, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant K e^{c(t-t_0)} \| \gamma_1 - \gamma_2 \|, \quad t_0 \geqslant t.$$

Отсюда $\left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right\| \leqslant K e^{c(t-t_0)}$, $t_0 \geqslant t$, $\tau = \tau_1$.

Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\tau_1 \neq \tau_2$. Тогда, интегрируя неравенство с) от t до t_0, где $x - y = x(t:t_0, \gamma, \psi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) - y(t:t_0, \gamma, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon)$, $t_0 \geqslant t$, получаем

$$\| x(t:t_0, \gamma, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon) - y(t:t_0, \gamma, \psi(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant K e^{c(t-t_0)} \| \varphi(\tau_1, \varepsilon) - \varphi(\tau_2, \varepsilon) \|_{R^m} \leqslant K K_1 e^{c(t-t_0)} \| \psi(\tau_1, \varepsilon) - \psi(\tau_2, \varepsilon) \|_{R^m}, \quad t_0 \geqslant t.$$

Отсюда $\left\| \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right\| \leqslant K_0 e^{c(t-t_0)}$, $t_0 \geqslant t$, $K_0 = K K_1$.

В некоторых случаях необходимы оценки производных при $t \geqslant t_0$ [2,3].

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *п.* с) *справедлив с неравенством* $D^+V \leqslant cV$. *Тогда* $\left\| \frac{\partial x}{\partial \gamma}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon) \right\| \leqslant K e^{c(t-t_0)}$, $\left\| \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t:t_0, \gamma, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \right\|_{R^m} \leqslant K_0 e^{c(t-t_0)}$ $\forall t \geqslant t_0 \geqslant T$, $\gamma \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Доказательство проводится по такой же схеме, что и доказательство теоремы 1.

В работах [1, 2] в числе ограничений находится трудно проверяемое условие: если $x(s_k:\tau, \gamma, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} x(s_k, \lambda^*(\varepsilon))$, то

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{\tau \leqslant t \leqslant s_k} \| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)),\ \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:\tau, \gamma, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \| = 0. \tag{6}$$

Оказывается, и это условие можно выразить в терминах прямого метода Ляпунова. Покажем это. Пусть $c \neq +\infty$, $\lambda^*(\varepsilon) \neq \infty$. Тогда справедливо равенство $\| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)),\ \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:\tau, \gamma, \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \| = \| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), \lambda^*(\varepsilon) \|$, $\tau \leqslant t \leqslant s_k$. Кроме того, $\| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)),\ \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)),\ \psi(s_{\bar{k}}, \varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant V(t, x - y, s_k, s_{\bar{k}}, \varepsilon) \leqslant K_0 \| \psi(s_k, \varepsilon) - \psi(s_{\bar{k}}, \varepsilon) \| e^{c(t-s)}$, где $s_{\bar{k}}$ — подпоследовательность последовательности s_k. Переходя к пределу при $\bar{k} \to +\infty$ в этом неравенстве, получаем

$$\| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)),\ \psi(s_k, \varepsilon), \varepsilon) - x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant K_0 \| \psi(s_k, \varepsilon) - \lambda^*(\varepsilon) \| e^{c(t-s_k)}.$$

Отсюда следует, что если

$$\lim_{k\to+\infty} \| \psi(s_k, \varepsilon) - \lambda^*(\varepsilon) \|_{R^m} e^{c(t-s_k)} = 0, \quad \tau \leqslant t \leqslant s_k, \tag{7}$$

то условие (6) выполняется.

Если допустим $\psi(s_k, \varepsilon) = s_k$, то

$$\| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), s_k, \varepsilon) - x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), s_{\bar{k}}, \varepsilon) \| \leqslant K \| \varphi(s_k, \varepsilon) - \varphi(s_{\bar{k}}, \varepsilon) \|_{R^m} \cdot e^{c(t-s_k)},$$

где $s_{\bar{k}}$ — подпоследовательность последовательности s_k.

Тогда получим

$$\| x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon)), s_k, \varepsilon) - x(t:s_k, x(s_k, \lambda^*(\varepsilon]), \lambda^*(\varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant K \| \varphi(s_k, \varepsilon) - \lambda_1^*(\varepsilon) \|_{R^m} \cdot e^{c(t-s_k)}.$$

Поэтому в этом случае условие (7) имеет вид

$$\lim_{k\to+\infty} \| \varphi(s_k, \varepsilon) - \lambda_1^*(\varepsilon) \|_{R^m} e^{c(t-s_k)} = 0, \quad \tau \leqslant t \leqslant s_k. \tag{8}$$

Сформулируем условия асимптотической эквивалентности уравнений (4) и (5).

Теорема 3. *Пусть для уравнений* (3) *и* (4) *существует функция* $V(t, x-y, \tau_1, \tau_2, \varepsilon)$, *удовлетворяющая условиям теоремы* 1. *Кроме того, выполняется условие* (7) *или* (8), $\| g(t, z, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon) \| \leqslant \lambda(t, \|z\|, \varepsilon)$, $\lambda \in C([T, +\infty) \times R_+^1 \times (0, \varepsilon_0], R_+^1)$, $\lambda(t, r_1, \varepsilon) \leqslant \lambda(t, r_2, \varepsilon)$ *при* $r_1 \leqslant r_2$ *и любых* $t \in [T, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тогда если $I(t, k, \varepsilon) = e^{ct} \int\limits_t^{+\infty} e^{-cs} (\lambda(s, k, \varepsilon) + \dot{\psi}(s, \varepsilon))\, ds$ *существует при любых* $t \in [T, +\infty)$, $k \in R_+^1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $I(t, k, \varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$ *равномерно относительно* t *при любом* $k \in R_+^1$, $I(t, k, \varepsilon) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *и любых фиксированных* $k \in R_+^1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *то уравнения* (4) *и* (5) *асимптотически эквивалентны.*

Доказательство. Здесь выполняются все условия теоремы 1 из работы [3], которая подробно доказана в работе [2].

1. *Basti M.* On asymptotic equivalence between two nonlinear parametric systems with a small parameter // J. Math. Anal. and Appl.— 1984.— 99, N 1.— P. 65—79.
2. *Качественные* и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений / Е. В. Воскресенский, Е. Н. Артемьева, В. А. Белоглазов, С. М. Мурюмин.— Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1988.— 188 с.
3. *Воскресенский Е. В.* Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 12.— С. 72—74.

Получено 27,11.89