УДК 517.9

В. А. Соболев

Интегральные многообразия, сингулярные возмущения и оптимальное управление

В настоящей работе метод интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского [1, 2] применяется для исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, y, \varepsilon),\ x \in R^m,\ \varepsilon \dot{y} = g(t, x, y, \varepsilon),\ y \in R^n, \tag{1}$$

где векторные функции f и g определены и имеют достаточное количество ограниченных частных производных по всем переменным в некоторой области, ε — малый параметр. Такие системы, обычно называемые сингулярно возмущенными [3], возникают при изучении широкого круга задач механики [4, 5], автоматического управления [6, 7], химической кинетики [8]. Основные трудности, возникающие при анализе прикладных задач такого типа, связаны с высокой размерностью и наличием разномасштабных переменных. В таких ситуациях весьма эффективным аппаратом исследования является метод интегральных многообразий Боголюбова — Митропольского.

В работах [9, 10] метод интегральных многообразий применялся для декомпозиции (расщепления) систем с сингулярными возмущениями, возникающих в задачах автоматического управления и теории гироскопических систем, в работе [11] проводилось расщепление систем с медленно меняющейся фазой в окрестности инвариантного тора. Вопросы расщепления систем обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались, например, в работах [12—15].

В данной работе декомпозиция уравнений (1) осуществляется путем введения новых переменных v и z по формулам

$$x = \varphi(t, v, \varepsilon) + \Phi(t, v, z, \varepsilon), \tag{2}$$

$$y = \psi(t, v, \varepsilon) + \Psi(t, v, z, \varepsilon), \tag{3}$$

где φ, ψ, Φ, Ψ — некоторые гладкие функции. В результате получаем систему уравнений

$$\dot{v} = F(t, v, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\varepsilon\dot{z} = G(t, v, z, \varepsilon). \tag{5}$$

Если Φ, Ψ и G обращаются в нуль при $z = 0$ и $\det G_z(t, v, 0, 0) = 0$, то естественно называть v медленной переменной, а z — строго быстрой переменной. Формулы (2), (3) показывают, что переменные x и y могут быть представлены в виде суммы медленных слагаемых φ, ψ и быстрых слагаемых Φ, Ψ.

Предположим, что для системы (1) выполняются следующие условия.

I. Уравнение $g(t, x, y, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(t, x)$, $t \in R$, $x \in R^m$.

II. В области $t \in R$, $x \in R^m$, $\| y - h_0(t, x) \| \leqslant \rho$ функции h_0, f и g равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до $(k + 3)$-го порядка включительно ($k \geqslant 0$).

III. Корни характеристического уравнения $\lambda_i(t, x)$ матрицы $A(t, x) = g_y(t, x, h_0(t, x), 0)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(t, x) \leqslant -2\alpha < 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Тогда формулы (2), (3) можно представить в виде

$$x = v + \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon), \tag{6}$$

$$y = z + h(t, x, \varepsilon), \tag{7}$$

т. е. $\varphi = v$, $\psi = h(t, v, \varepsilon)$, $\Phi = \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon)$, $\Psi = z + h(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) - h(t, v, \varepsilon)$. Здесь h описывает интегральное многообразие медленных движений $y = h(t, x, \varepsilon)$ системы (1), а функция εH — интегральное многообразие быстрых движений $w = \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon)$ вспомогательной системы

$$\dot{v} = F(t, v, \varepsilon), \;\; \varepsilon\dot{z} = Z(t, v + w, z, \varepsilon), \;\; \dot{w} = W(t, v, w, z, \varepsilon), \tag{8}$$

где $F(t, v, \varepsilon) = f(t, v, h(t, v, \varepsilon), \varepsilon)$, $Z(t, x, z, \varepsilon) = g(t, x, z + h(t, x, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon h_x(t, x, \varepsilon) f(t, x, z + h(t, x, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon h_t(t, x, \varepsilon)$, $W = f(t, v + w, z + h(t, v + w, \varepsilon), \varepsilon) - F(t, v, \varepsilon)$.

В результате преобразования (6), (7) система (1) приводится к виду (4), (5), где $G(t, v, z, \varepsilon) = Z(t, v + \varepsilon H, z, \varepsilon)$.

Существование и гладкость интегрального многообразия $y = h(t, x, \varepsilon)$ следуют из результатов работ [2, 16]. Функция h может быть найдена с любой степенью точности в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра из уравнения $\varepsilon h_t + \varepsilon h_x f(t, x, h, \varepsilon) = g(t, x, h, \varepsilon)$ путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε [4, 5, 17].

Для доказательства существования интегрального многообразия $w = \varepsilon H(t, v, z, \varepsilon)$ системы (8) нужно представить функцию Z в виде $Z = A(t, v) z + Z_1(t, v, w, z, \varepsilon)$, где $A = g_y(t, v, h_0(t, v), 0)$, $Z_1 = Z(t, v + w, z, \varepsilon) - A(t, v) z$.

Для векторных функций W и Z_1 справедливы неравенства

$$\|W(t, v, w, z, \varepsilon)\| \leqslant c(\|z\| + \|w\|), \quad \|Z_1(t, v, w, z, \varepsilon)\| \leqslant c\|z\|(\|z\| + \varepsilon),$$

$$\|W(t, v, w, z, \varepsilon) - W(t, v_1, z_1, w_1, \varepsilon)\| \leqslant c[(\|\bar{z}\| + \|\bar{w}\|)\|v - v_1\| + \|z - z_1\| + \|w - w_1\|], \quad \|Z_1(t, v, w, z, \varepsilon) - Z_1(t, v_1, w_1, z_1, \varepsilon)\| \leqslant c(\varepsilon + \|\bar{z}\| + \|\bar{w}\|)[\|\bar{z}\|\|v - v_1\| + \|z - z_1\| + \|w - w_1\|],$$

где $\|\bar{z}\| = \max\{\|z\|, \|z_1\|\}$, $\|\bar{w}\| = \max\{\|w\|, \|w_1\|\}$, $c > 0$. Эти оценки верны при $\|\bar{z}\| \leqslant \rho_1 \leqslant \rho$, $\|\bar{w}\| \leqslant \rho_2$ и следуют из теоремы о среднем и дифференциальных свойств W и Z_1.

Пусть $\Omega = \{(t, v, z, \varepsilon): v \in R^m, 0 \leqslant \|z\| \leqslant \rho_1, t \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\}$. Введем в рассмотрение класс M функций H, действующих из Ω в R^m и удовлетворяющих неравенствам $\|H(t, v, z, \varepsilon)\| \leqslant a\|z\|$, $\|H(t, v, z, \varepsilon) - H(t, v, z_1, \varepsilon)\| \leqslant b_1\|z - z_1\|$, $\|H(t, v, z, \varepsilon) - H(t, v_1, z, \varepsilon)\| \leqslant b_2\|z\|\|v - v_1\|$.

Класс M является полным метрическим пространством с метрикой $d(H, H_1) = \sup[\|H(t, v, z, \varepsilon) - H_2(t, v, z, \varepsilon)\|/\|z\|]$, где супремум вычисляется по Ω при $z \neq 0$ и фиксированном ε.

Функция H удовлетворяет операторному уравнению

$$H(\tau, v_0, z_0, \varepsilon) = S(H)(\tau, v_0, z_0, \varepsilon), \tag{9}$$

где оператор S задается соотношением $S(H)(\tau, v_0, z_0, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^\infty W(t, v(t), z(t), \varepsilon)\, dt$. Здесь $v(t)$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию $v(\tau) = v_0$, а $z(t)$ — решение начальной задачи $\varepsilon\dot{z} = A(t, v(t))z + Z_1(t, v(t), \varepsilon H, z, \varepsilon)$, $z(\tau) = z_0$, где $H = H(t, v(t), z, \varepsilon)$. Сходимость несобственного интеграла обеспечивается оценкой

$$\|z(t)\| \leqslant K\|z_0\|\exp(-\beta(t - \tau)/\varepsilon) \tag{10}$$

для решений этого уравнения ($K \geqslant 0$, $t \geqslant \tau$, $\beta > 0$). Оценка (10) следует из неравенства $\|U(t, s, \varepsilon)\| \leqslant K\exp(-\alpha(t - s)/\varepsilon)$ ($\beta < \alpha$, $t \geqslant s$) для фундаментальной матрицы $U(t, s, \varepsilon)$ линейной системы $\varepsilon\dot{z} = A(t, v(t))z$, $U(s, s, \varepsilon) = I$ [2].

Используя оценки для функций W и Z_1, нетрудно установить существование таких чисел a, b_1, b_2, что оператор S переводит полное метрическое пространство M в себя и является сжимающим при достаточно малых значениях ε. Следовательно, уравнение (9) имеет в M единственное решение. Существование ограниченных частных производных функции H по t, v, z устанавливается по обычной схеме [2, 17]. Важно отметить, что функция H во многих случаях может быть найдена в виде асимптотического разложения из уравнения $\varepsilon H_t + \varepsilon H_v F(t, v, \varepsilon) + H_z Z(t, v + \varepsilon H, z, \varepsilon) = W(t, v, \varepsilon H, z, \varepsilon)$.

Для доказательства асимптотического характера разложения H достаточно показать, что «остаток» разложения описывает интегральное многообразие соответствующей вспомогательной системы [17].

Преобразование (6), (7) наряду с расщеплением системы (1) путем приведения ее к виду (4), (5) позволяет также расщеплять начальные и краевые условия. Пусть заданы начальные условия $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, тогда из (6), (7) получаются начальные условия $v(t_0) = v_0$, $z(t_0) = z_0$ для уравнений (4), (5), где $z_0 = y_0 - h(t_0, x_0, \varepsilon)$, а вектор v_0 удовлетворяет уравнению $v_0 = x_0 - \varepsilon H(t_0, v_0, z_0, \varepsilon)$ и может быть найден из него в виде разложения по степеням ε.

В качестве примера рассмотрим векторное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon\ddot{x} + A(t, x, \varepsilon)\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{11}$$

где $A = A_0(t, x) + \varepsilon A_1(t, x)$, $f = f_0(t, x) + \varepsilon f_1(t, x)$. Если компоненты f_0, f_1, A_0, A_1 ограничены вместе с достаточным количеством частных производных по t и x, корни характеристического уравнения для $-A_0$ удовлетворяют условию III, то для системы в нормальной форме $\dot{x} = y$, $\varepsilon\dot{y} = -A(t, x, \varepsilon)y + f(t, x, \varepsilon)$ справедливы предположения I—III и преобразование вида (6), (7) приводит ее к следующему виду:

$$\dot{v} = h(t, v, \varepsilon),\ \varepsilon\dot{z} = -[A(t, v + \varepsilon H, \varepsilon) - \varepsilon h_x(t, v + \varepsilon H, \varepsilon)]z. \tag{12}$$

Коэффициенты асимптотических разложений $h = h^0(t, x) + \varepsilon h^1(t, x) + \varepsilon^2 \ldots$, $\varepsilon H = \varepsilon H^1(t, v, z) + \varepsilon^2 \ldots$ задаются формулами $h^0 = A_0^{-1}(t, x) f_0(t, x)$, $h^1 = A_0^{-1}(t, x)[f_1(t, x) - h_t^0 - h_x^0 h^0]$, $H^1 = -A_0^{-1}(t, v) z$.

Если для уравнения (11) заданы начальные условия $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, то для уравнений (12) получаем $z(t_0) = z_0(\varepsilon) = z_{00} + \varepsilon z_{01} + \varepsilon^2 \ldots$, где $z_{00} = \dot{x}_0 - h^0(t_0, x_0)$, $z_{01} = -h^1(t_0, x_0)$; $v(t_0) = v_0(\varepsilon) = v_{00} + \varepsilon v_{01} + \varepsilon^2 \ldots$, где $v_{00} = x_0$, $v_{01} = A_0^{-1}(t_0, x_0) z_{00}$.

Если заданы краевые условия $c_1 x(0) + \dot{x}(0) = \gamma_1$, $c_2 x(1) + c_3\dot{x}(1) = \gamma_2$, то для уравнений (12) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon)$ получаем расщепленные краевые условия

$$c_3[h^0(1, v(1)) + \varepsilon h^1(1, v(1))] + c_2 v(1) = \gamma_2,\ z(0) = p_0(v(0)) + \varepsilon p_1(v(0)),$$

где $p_0(v) = \gamma_1 - h^0(0, v) - c_1 v$, $p_1(v) = -h^1(0, v) - h_x^0(0, v) H^1(0, v, p_0)$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления с квадратичным критерием качества для линейного векторного уравнения

$$\varepsilon\ddot{x} + A(t)\dot{x} + C(t)x = B(t)u,\ x \in R^n,\ u \in R^m,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J = 0{,}5\, y^T(1) F y(1) + 0{,}5 \int_0^1 [y^T(t) Q(t) y(t) + u^T(t) R(t) u(t)]\, dt.$$

Здесь x — вектор состояния, u — вектор управляющих параметров, F — постоянная матрица, матричные функции A, B, C, Q, R непрерывны вместе с достаточным количеством производных при $t \in [0, 1]$, $R = R^T > 0$,

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix},\ F = F^T = \begin{pmatrix} F_1 & \varepsilon F_2 \\ \varepsilon F_2^T & \varepsilon F_3 \end{pmatrix} \geqslant 0,\ Q = Q^T \begin{pmatrix} Q_1 & \varepsilon Q_2 \\ \varepsilon Q_2^T & \varepsilon Q_3 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что при $\forall t \in [0, 1]$ $\det A(t) \neq 0$, пара $\{A, B\}$ обладает свойством полной управляемости, а пара $\{Q_4, A\}$ — свойством полной наблюдаемости ($Q_4^T Q_4 = Q_3$) [6].

Известно [6], что оптимальное управление в рассматриваемой задаче имеет вид $u = -R^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} B^T \end{pmatrix} K(t)$, где $K = K^T = \begin{pmatrix} K_1 & \varepsilon K_2 \\ \varepsilon K_2^T & \varepsilon K_3 \end{pmatrix}$. Матрица K является решением матричного сингулярно возмущенного уравнения Риккати [6], которое можно представить в виде следующей системы матричных уравнений для блоков матрицы K:

$$\dot{K}_1 = K_2 C + C^T K_2^T + K_2 S K_2^T - Q_1\ (S = BR^{-1}B^T),\ \varepsilon\dot{K}_2 = -K_1 + K_2 A + C^T K_3 + K_2 S K_3 - Q_2,\ \varepsilon\dot{K}_3 = -\varepsilon K_2^T - \varepsilon K_2 + K_3 A + A^T K_3 + K_3 S K_3 - Q_3,$$

$$K_1(1) = F_1,\ K_2(1) = F_2,\ K_3(1) = F_3. \tag{13}$$

При $\varepsilon = 0$ последнее уравнение системы превращается в матричное алгебраическое уравнение Риккати $K_3A + A^TK_3 + K_3SK_3 = Q_3$. В рассматриваемом случае это уравнение имеет единственное положительно определенное решение $K_3 = N = N^T > 0$ такое, что спектр матрицы $L(t) = A + SN$ находится в правой комплексной полуплоскости [6]. Следовательно, для системы матричных дифференциальных уравнений (13) после замены независимой переменной $t \to 1 - t$ выполняются условия I—III и можно осуществить расщепление уравнений и начальных условий. В результате получим следующее представление: $K_1 = V + \varepsilon H(t, V, Z_1, Z_2, \varepsilon)$, $K_{i+1} = Z_i + P_i(t, K_1, \varepsilon)$, $i = 1, 2$.

Для матричных функций P_i справедливы асимптотические представления $P_i = P_i^0(t, K_1) + \varepsilon P_i^1(t, K_1) + \varepsilon^2 \ldots$, $i = 1, 2$, где $P_2^0 = N$, $P_1^0 = (K_1 + Q_2 - C^TN)L^{-1}$, $P_2^1 = P_1^0L^{-1}$, $P_1^1 = [(P_1^0C + (P_1^0C)^T + P_1^0S(P_1^0)^T - Q_1)L^{-1} - C^TP_2^1 - P_1^0SN]L^{-1}$. Ограничиваясь линейными по Z_1, Z_2 членами, можно представить матричную функцию $H^1(t, V, Z_1, Z_2) = H(t, V, Z_1, Z_2, 0)$ в следующем виде: $H^1 = Z_1C_0 + C_0^TZ_1^T - C_0^TZ_2C_0$, где $C_0 = L^{-1}(C + S(P_1^0)^T)$.

Матрица V является решением начальной задачи

$$\dot{V} = P_1C + C^TP_1^T + P_1SP_1^T - Q_1,\ P_1 = P_1(t, V, \varepsilon), \tag{14}$$

$$V(1, \varepsilon) = F_1 - \varepsilon H(1, F_1, F_2 - P_1^0(1, F_1),\ F_3 - N(1)) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{15}$$

а матрицы Z_1, Z_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\varepsilon\dot{Z}_1 = Z_1L + C_1^TZ_2 + Z_1SZ_2 - \varepsilon[Z_1C_1 + C_1^TZ_1^T + Z_1SZ_1^T]L^{-1} + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\varepsilon\dot{Z}_2 = Z_2L + L^TZ_2 + Z_2SZ_2 - \varepsilon Z_1^T - \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 \ \ldots\ (C_1 = C + SP_1^T)$$

и начальным условиям $Z_1(1, \varepsilon) = F_2 - P_1^0(1, F_1) - \varepsilon P_1^1(1, F_1) + \varepsilon^2 \ldots$, $Z_2(1, \varepsilon) = F_3 - N(1) - \varepsilon P_2^1(1, F_1) + \varepsilon^2 \ldots$.

В результате получено независимое матричное регулярно возмущенное дифференциальное уравнение (14) с начальным условием (15) для медленной переменной V и система уравнений для строго быстрых матричных переменных Z_1 и Z_2. В случаях, когда быстро затухающими переменными Z_1, Z_2 можно пренебречь, оптимальное управление можно представить в виде $u = -R^{-1}B^T[P_1(t, V, \varepsilon)x + P_2(t, V, \varepsilon)\dot{x}]$, где V — решение задачи (14), (15).

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Метод интегральных многообразий в нелинейной механике // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.— Т. 1.— С. 93—154.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М.: Наука, 1973.— 512 с.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 242 с.
4. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Влияние геометрических и кинетических параметров и диссипации энергии на устойчивость ориентации спутников с двойным вращением // Косм. исслед.— 1976.— **14**, № 3.— С. 366—371.
5. *Соболев В. А., Стрыгин В. В.* О допустимости перехода к процессионным уравнениям гироскопических систем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1978.— № 5.— С. 10—17.
6. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления.— М.: ВИНИТИ, 1982.— С. 3—78.— (Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ; Т. 20).
7. *Kokotovic P. V.* Control theory in the 80's: trends in a feeddack design // Proc. 9th Congress of IFAC. **11**.— P. 16—26.
8. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Декомпозиция жестких систем управления и химической кинетики.— Новосибирск, 1984.—33 с.—(Препринт / СО АН СССР. Ин-т математики; № 55).
9. *Sobolev V. A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // Syst. and Contr. Lett.— 1984.— **5**.— P. 169—179.
10. *Соболев В. А.* Быстрые и медленные движения гироскопических систем // Периодика политехника. Электротехника.— 1985.— **29**, № 1.— С. 57—66.

11. *Самойленко А. М., Свищук М. Я.* О расщеплении системы дифференциальных уравнений с медленно меняющейся фазой в окрестности асимптотически устойчивого инвариантного тора // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 6.— С. 751—756.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1969.— 245 с.
13. *Митропольский Ю. А.* Развитие метода усреднения // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям.— Киев : Наук. думка, 1984.— Т. 1.— С. 23—34.
14. *Самойленко А. М.* О приведении динамической системы в окрестности гладкого инвариантного тора к каноническому виду // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— № 36.— С. 209—233.
15. *Лопатин А. К.* Асимптотическое расщепление систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Кибернетика и вычисл. техника.— 1978.— Вып. 39.— С. 39—45.
16. *Задирака К. В.* О нелокальном интегральном многообразии нерегулярно возмущенной дифференциальной системы // Укр. мат. журн.— 1965.— 17, № 1.— С. 47—63.
17. *Соболев В. А.* К теории интегральных многообразий систем сингулярно возмущенных уравнений // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения.— Куйбышев : Куйбышев. ун-т. 1980.— Вып. 6.— С. 124—147.

Куйбышев. ун-т

Получено 16.06.86