УДК 517.9

*Ю. В. Теплинский, Н. С. Цыгановский*

# Об одной периодической задаче управления для дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей

Рассмотрено дифференциальное уравнение $dx/dt = \varepsilon f(t, x)$ с импульсным воздействием $\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x)$ в пространстве ограниченных числовых последовательностей, где $f(t, x)$, $H_i(t, x)$ — $T$-периодические счетномерные вектор-функции, $\varepsilon$ — положительный параметр. Приведены условия существования управления $(\mu_1, \mu_2)$ такого, что решение уравнения $dx/dt = \varepsilon f(t, x) - \mu_1$ с импульсным воздействием $\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x) - \mu_2$, принимающее при $t = \tau$ значение $x = x_0$, является $T$-периодическим.

Розглядається диференціальне рівняння $dx/dt = \varepsilon f(t, x)$ з імпульсним впливом $\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x)$ у просторі обмежених числових послідовностей, де $f(t, x)$, $H_i(t, x)$ — $T$-періодичні зчисленновимірні вектор-функції, $\varepsilon$ — додатній параметр. Наведені умови існування управління $(\mu_1, \mu_2)$ такого, що розв'язок рівняння $dx/dt = \varepsilon f(t, x) - \mu_1$ з імпульсним впливом $\Delta x|_{t-t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x) - \mu_2$, що приймає при $t = \tau$ значення $x = x_0$, є періодичним.

Хорошо известно [1, 2], что в теории интегральных многообразий и, в частности, тороидальных многообразий важное место отводится вопросам существования и построения периодических решений дифференциальных уравнений стандартного вида с малым параметром в правой части.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $dx/dt = \varepsilon f(t, x)$ с импульсным воздействием $\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots)$ принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots\}$, $f(t, x)$ и $H_i(t, x)$ — счетномерные периодические по $t$ с периодом $T$ ($T$-периодические) вектор-функции, определенные в некоторой области $D^*: (t, x) \in R^1 \times D = (-\infty, +\infty) \times \{x \in \mathfrak{M} \mid \|x\| \leqslant R = \text{const}\}$, $\varepsilon$ — малый положительный параметр

В этой работе мы приводим условия существования управления $(\mu_1, \mu_2)$ такого, что решение уравнения

$$dx/dt = \varepsilon f(t, x) - \mu_1 \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x) - \mu_2, \tag{2}$$

принимающее при $t = \tau$ значение $x = x_0$ является $T$-периодическим. Относительно функций $H_i$ и моментов $t_i$ предположим, что $H_{i+d} = H_i$, $t_{i+d} - t_i = T$, где $d$ — целое положительное число.

Пусть функция $f(t, x)$ в области $D^*$ удовлетворяет условиям:

а) непрерывна по $t$;

б) удовлетворяет условию Липшица по $x$, т. е.

$$\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})\| \leqslant L \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|, \quad L = \text{const} > 0, \quad \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D;$$

в) $\|f(t, 0)\| \leqslant P = \text{const} < \infty$.

Тогда [3] в области $D^*$ для уравнения $dx/dt = f(t, x)$ справедлива теорема Коши существования и единственности решения $x(t, \tau, x_0)$ с начальными условиями $\tau$, $x_0$, представимого в виде

$$x(t, \tau, x_0) = x_0 + \int_\tau^t f(s, x(s, \tau, x_0))\, ds.$$

При ограниченных по норме вектор-функциях скачка $H_i$ это дает возможность записать решение уравнения (1) с импульсами (2) в виде

$$x(t, \tau, x_0) = x_0 + \int_\tau^t [\varepsilon f(s, x(s, \tau, x_0)) - \mu_1]\, ds + \sum_{\tau < t_i < t} [\varepsilon H_i(t_i, x(t_i, \tau, x_0)) - \mu_2]. \tag{3}$$

Отметим, что функция $f(t, x)$, обладающая свойствами а)—в), непрерывна по обоим аргументам и ограничена по норме в области $D^*$.

Если решение $x^0(t, \tau, x_0)$ $T$-периодично, то $x^0(\tau + T, \tau, x_0) = x^0(\tau, \tau, x_0) = x_0$ и, подставляя в равенство (3) вместо $t$ выражение $\tau + T$, получаем равенство

$$\int_\tau^{\tau+T} [\varepsilon f(s, x(s, \tau, x_0)) - \mu_1]\, ds + \sum_{\tau < t_i < \tau+T} [\varepsilon H_i(t_i, x(t_i, \tau, x_0)) - \mu_2] = 0,$$

которое обеспечивается при значениях

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(s, x(s, \tau, x_0))\, ds,$$
$$\mu_2 = \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau < t_i < \tau+T} H_i(t_i, x(t_i, \tau, x_0)), \quad p = \frac{d}{T}. \tag{4}$$

Однако $\mu_1$ и $\mu_2$ пока что найти невозможно, ибо решение $x^0(t, \tau, x_0)$ неизвестно. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Пусть вектор-функции $f(t)$ и $H_i(t)$ непрерывны на отрезке $\tau \leqslant t \leqslant \tau + T$ и удовлетворяют условию*

$$\max_{t \in [\tau, \tau+T]} \{\|f(t)\|, \|H_i(t)\|\} = M = \mathrm{const} > 0.$$

*Тогда*

$$\left\| \int_\tau^t \left( f(t) - \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(s)\, ds \right) dt + \sum_{\tau < t_i < t} \left( H_i(t_i) - \frac{1}{pT} \sum_{\tau < t_i < \tau+T} H_i(t_i) \right) \right\| \leqslant M\alpha(t) \tag{5}$$

*для всех $t \in [\tau, \tau + T]$, где* $\alpha(t) = 2(1 + p)(t - \tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right)$.

Доказательство леммы непосредственно следует из оценок

$$\left\| \int_\tau^t \left[ f(t) - \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(s)\, ds \right] dt + \sum_{\tau < t_i < t} \left[ H_i(t_i) - \frac{1}{pT} \sum_{\tau < t_i \leqslant \tau+T} H_i(t_i) \right] \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \int_\tau^t f(s)\, ds - \frac{t-\tau}{T} \int_t^{\tau+T} f(s)\, ds \right\| + \left\| \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{\tau < t_i \leqslant t} H_i(t_i) - \frac{t-\tau}{T} \sum_{t < t_i \leqslant \tau+T} H_i(t_i) \right\| \leqslant \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \int_\tau^t \|f(s)\|\, ds +$$
$$+ \frac{t-\tau}{T} \int_t^{\tau+T} \|f(s)\|\, ds + \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \sum_{\tau < t_i \leqslant t} \|H_i(t_i)\| +$$
$$+ \frac{t-\tau}{T} \prod_{t < t_i \leqslant \tau+T} \|H_i(t_i)\| \leqslant 2M \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right)(t - \tau) + 2pM \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \times$$
$$\times (t - \tau) = M \cdot 2(1 + p)(t - \tau)\left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) = M \cdot \alpha(t). \tag{6}$$

Для отыскания решения $x^0(t, \tau, x_0)$ предлагается следующий итерационный процесс:

$$x_{m+1}(t,\tau,x_0)=x_0+\varepsilon\int_\tau^t\left[f(t,x_m(t,\tau,x_0))-\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}f(s,x_m(s,\tau,x_0))\,ds\right]dt+$$
$$+\varepsilon\sum_{\tau<t_i\leqslant t}\left[H_i(t_i,x_m(t_i,\tau,x_0))-\frac{1}{pT}\sum_{\tau<t_i\leqslant\tau+T}H_i(t_i,x_m(t_i,\tau,x_0))\right]. \quad (7)$$

О его сходимости к нужному периодическому решению уравнения (1) с импульсами (2) и существовании единственного управления $(\mu_1,\mu_2)$, при котором достигается это решение, говорит следующий результат.

Теорема. *Пусть вектор-функции $f(t,x)$, $H_i(t,x)$, определенные в области $D^*$, удовлетворяют условиям:*

1) $\max\limits_{t\in[\tau,\tau+T]}\{\|f(t,x)\|,\|H_i(t,x)\|\}=M=\text{const}<\infty$;

2) $\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{\bar{x}})\|\leqslant L\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|,\ \|H_i(t,\bar{x})-H_i(t,\bar{\bar{x}})\|\leqslant L\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|$,

*где* $0<L=\text{const}<\infty$, $\bar{x},\bar{\bar{x}}\in D$;

3) *непрерывны и $T$-периодичны по $t$;*

4) $H_{i+d}=H_i,\quad t_{i+d}-t_i=T,\quad d\in N$.

*Тогда существует единственное управление $(\mu_1,\mu_2)$ такое, что уравнение (1) с импульсами (2) имеет $T$-периодическое решение $x^0(t,\tau,x_0)$, удовлетворяющее начальному условию*

$$x^0(\tau,\tau,x_0)=x_0,\ \text{а}\ x_0\in D_f=\left\{x\in\mathfrak{M}\,|\,\|x\|\leqslant R-\varepsilon(p+1)\frac{T}{2}M\right\}\subset D.$$

Доказательство. Очевидно, что условия теоремы влекут за собой выполнение условий а)—в) для функции $f(t,x)$ в области $D^*$. Покажем, что последовательность $\{x_m(t,\tau,x_0)\}$, определенная соотношением (7), равномерно ограничена, т. е. $x_m(t,\tau,x_0)\in D$ при любом натуральном $m$, если $x_0\in D_f$.

Оценим разность:

$$\|x_{m+1}(t,\tau,x_0)-x_0\|\leqslant\varepsilon\left\|\int_\tau^t\left[f(t,x_m(t,\tau,x_0))-\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T}f(s,x_m(s,\tau,x_0))\,ds\right]dt+\right.$$
$$\left.+\varepsilon\sum_{\tau<t_i\leqslant t}\left[H_i(t_i,x_m(t_i,\tau,x_0))-\frac{1}{pT}\sum_{\tau<t_i\leqslant\tau+T}H_i(t_i,x_m(t_i,\tau,x_0))\right]\right\|. \quad (8)$$

Воспользовавшись леммой, получаем

$$\|x_{m+1}(t,\tau,x_0)-x_0\|\leqslant\varepsilon\cdot M\cdot\alpha(t)=2\varepsilon M(1+p)(t-\tau)\left(1-\frac{t-\tau}{T}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon M(1+p)\frac{T}{2}$$

для всех $m=1,2,3,\ldots$. Отсюда

$$\|x_1-x_0\|\leqslant\varepsilon\cdot2(p+1)(t-\tau)\left(1-\frac{t-\tau}{T}\right)M\leqslant\varepsilon(p+1)\frac{T}{2}M,$$

т. е. $x_1(t,\tau,x_0)\in D$ при $x_0\in D_f$ и $\varepsilon\leqslant\dfrac{R-\|x_0\|}{(p+1)\frac{T}{2}M}$. Если $x_{m-1}(t,\tau,x_0)\in D$, то из (8) в силу леммы следует

$$\|x_m(t,\tau,x_0)-x_0\|\leqslant\varepsilon(p+1)\frac{T}{2}M, \quad (9)$$

т. е. $x_m(t,\tau,x_0)\in D$. По методу полной математической индукции заключаем, что рассматриваемая последовательность равномерно ограничена. Покажем теперь, что она равномерно сходится. Для этого оценим по норме разность $x_{m+1}(t, \tau, x_0) - x_m(t, \tau, x_0)$. Из соотношения (7), учитывая условие 2 теоремы, получаем

$$\| x_{m+1}(t, \tau, x_0) - x_m(t, \tau, x_0) \| \leqslant \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) L\varepsilon \int_\tau^t \| x_m(s, \tau, x_0) -$$

$$- x_{m-1}(s, \tau, x_0) \| ds + \frac{t-\tau}{T} L\varepsilon \int_t^{\tau+T} \| x_m(s, \tau, x_0) - x_{m-1}(s, \tau, x_0) \| ds +$$

$$+ \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) L\varepsilon \sum_{\tau < t_i \leqslant t} \| x_m(t_i, \tau, x_0) - x_{m-1}(t_i, \tau, x_0) \| +$$

$$+ \frac{t-\tau}{T} L\varepsilon \sum_{t < t_i \leqslant \tau+T} \| x_m(t_i, \tau, x_0) - x_{m-1}(t_i, \tau, x_0) \|. \tag{10}$$

Из соотношения (10), учитывая оценку (9), получаем

$$\| x_2(t, \tau, x_0) - x_1(t, \tau, x_0) \| \leqslant ML\varepsilon^2 \cdot \frac{T}{2} \cdot 2(p+1)^2 (t-\tau) \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \leqslant$$

$$\leqslant ML\varepsilon^2 (p+1)^2 \cdot \frac{T^2}{4} = \frac{M}{L} \left(\frac{L\varepsilon T(p+1)}{2}\right)^2. \tag{11}$$

Предполагая, что

$$\| x_m(t, \tau, x_0) - x_{m-1}(t, \tau, x_0) \| \leqslant \frac{M}{L} \left(\frac{L\varepsilon T(p+1)}{2}\right)^m, \tag{12}$$

из неравенства (10) с учетом оценки (12) находим

$$\| x_{m+1}(t, \tau, x_0) - x_m(t, \tau, x_0) \| \leqslant \frac{M}{L} \left(\frac{L\varepsilon T(p+1)}{2}\right)^{m+1}. \tag{13}$$

Таким образом, по методу полной математической индукции оценка (13) справедлива при всех $m = 1, 2, 3, \ldots$. Обозначим

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, \tau, x_0) = x^0(t, \tau, x_0) \tag{14}$$

при условии, что

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{2}{LT(p+1)} ; \frac{R - \| x_0 \|}{(p+1)\frac{T}{2} M} \right\}. \tag{15}$$

Поскольку функции $x_m(t, \tau, x_0)$ являются $T$-периодическими, то и предельная функция $x^0(t, \tau, x_0)$ также $T$-периодическая. Переходя в равенстве (7) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что функция $x^0(t, \tau, x_0)$ является $T$-периодическим решением уравнения (1) с импульсами (2). Положим наконец

$$\mu_1(\tau, x_0) = \frac{\varepsilon}{T} \int_\tau^{\tau+T} f(s, x^0(s, \tau, x_0))\, ds = \varepsilon \overline{f(t, x^0(t, \tau, x_0))},$$

$$\mu_2(\tau, x_0) = \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau < t_i < \tau+T} H_i(t_i, x^0(t_i, \tau, x_0)) = \varepsilon \overline{H_i(t_i, \tau, x_0)}$$

и покажем, что при любом другом управлении $(u_1, u_2)$ решение уравнения типа (1) с импульсами (2), проходящее при $t = \tau$ через точку $x_0$, не является $T$-периодическим. Предположим противное. Тогда справедливо равенство

$$x(t, \mu) - x(t, u) = \varepsilon \int_\tau^t [f(s, x(s, \mu)) - \overline{f(s\ x(s, \mu))} - f(s, x(s, u)) +$$

$$+ \overline{f(s, x(s, u))}]\, ds + \varepsilon \sum_{\tau < t_i < \tau + T} [H_i(t_i, x(t_i, \mu)) - \overline{H_i(t_i, x(t_i, \mu))} -$$

$$- H_i(t_i, x(t_i, u)) + \overline{H_i(t_i, x(t_i, u))}],$$

из которого следует

$$\| x(t, \mu) - x(t, u) \| \leqslant \varepsilon L \left[ \left(1 - \frac{t - \tau}{T}\right) \int_{\tau}^{t} \| x(s, \mu) - x(s, u) \| ds + \right.$$

$$+ \frac{t - \tau}{T} \int_{t}^{\tau + T} \| x(s, \mu) - x(s, u) \| ds + \left(1 - \frac{t - \tau}{T}\right) \sum_{\tau < t_i < t} \| x(t_i, \mu) - x(t_i, u) \| +$$

$$+ \frac{t - \tau}{T} \sum_{t < t_i < \tau + T} \| x(t_i, \mu) - x(t_i, u) \| \leqslant \varepsilon L (1 + p) 2 (t - \tau) \left(1 - \frac{t - \tau}{T}\right) \times$$

$$\times \| x(t, \mu) - x(t, u) \| \leqslant \frac{\varepsilon L (1 + p) T}{2} \| x(t, \mu) - x(t, u) \|.$$

Отсюда $\| x(t, \mu) - x(t, u) \| \left(1 - \frac{L(1 + p) T}{2} \varepsilon\right) \leqslant 0$. Из условия (15) следует, что $\| x(t, \mu) - x(t, u) \| = 0$, а значит, $\mu = u$. Пришли к противоречию. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. *Из неравенства* (13) *нетрудно получить оценку точности приближения периодического решения* $x^0(t, \tau, x_0)$ *элементами последовательности* $\{x_m(t, \tau, x_0)\}$, *определенными рекуррентными соотношениями* (7):

$$\| x^0(t, \tau, x_0) - x_m(t, \tau, x_0) \| \leqslant \frac{M}{L} \left(\frac{L \varepsilon T (p + 1)}{2}\right)^m : \left(1 - \frac{L \varepsilon T (p + 1)}{2}\right).$$

Следствие 2. *Управление* $(\mu_1, \mu_2)$ *можно получить следующим образом:*

$$\mu_1 = \lim_{m \to \infty} \frac{\varepsilon}{T} \int_{\tau}^{\tau + t} f(s, x_m(s, \tau, x_0))\, ds,$$

$$\mu_2 = \lim_{m \to \infty} \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau < t_i < t + \tau} H_i(t_i, x_m(t_i, \tau, x_0)).$$

В заключение отметим, что доказанная теорема справедлива и для частного случая конечномерной системы уравнений вида (1), что дает возможность использовать при отыскании управления $(\mu_1, \mu_2)$ в счетномерном случае метод укорочения К. П. Персидского [3]. Положив $H_i = 0$, получаем решение задачи для случая дифференциального уравнения с малым параметром в пространстве $\mathfrak{M}$ без импульсного воздействия.


1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
3. *Персидский К. П.* Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех.— 1959.— Вып. 7.— С. 52—71.


Каменец-Подол. пед. ин-т

Получено 15.01.88