

УДК 512.546

С. П. Панасюк

Метризуемость в пространстве подгрупп группы Ли

Доказано, что пространство замкнутых подгрупп разрешимой связной группы Ли в топологии Вьеториса метризуемо полной метрикой. Показано, что обратный результат неверен.

Доведено, що простір замкнених підгруп розв'язуваної зв'язної групи Лі в топології В'єториса метризується повною метрикою. Показано, що обернений результат хибний.

В настоящей статье доказано, что пространство замкнутых подгрупп разрешимой связной группы Ли в топологии Вьеториса метризуемо полной

© С. П. ПАНАСЮК. 1990

метрикой. Результат этой работы анонсирован в тезисах доклада [1] (о возможных применениях его см. [2, 3]).

Под группой Ли понимаем локально компактную группу, допускающую аналитическую структуру над полем \mathbb{R} вещественных чисел. Если G — группа Ли, то G_0 — связная компонента группы G , $l(G)$ — ее алгебра Ли, $\exp : l(G) \rightarrow G_0$ — экспоненциальное отображение. $\mathfrak{L}(G)$ — пространство замкнутых подгрупп топологической группы G , предбазу топологии которого образуют множества

$$D_1(U) = \{H \in \mathfrak{L}(G) \mid H \subseteq U\},$$

$$D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G) \mid H \cap V \neq \emptyset\},$$

где U и V пробегает открытые подмножества группы G [4]. Если S — подмножество G , не обязательно открытое, то символ $D_1(S)$ будем использовать в том же значении. Под подгруппой всегда понимаем замкнутую подгруппу.

По вопросам, касающимся топологических групп и неоговоренным в тексте, см. монографию [5].

Пусть $\mathfrak{K}(G)$ — множество компактных подгрупп группы G , и $\mathfrak{N}(G)$ — множество некомпактных подгрупп. Очевидно,

$$\mathfrak{L}(G) = \mathfrak{K}(G) \sqcup n \mathfrak{K}(G).$$

Т е о р е м а. Если G — группа Ли, удовлетворяющая условиям: а) множество $\mathfrak{K}(G)$ замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$; б) для любой подгруппы $H \in n \mathfrak{K}(G)$, группа H/H_0 — конечнопорождена, H_0 — связная компонента подгруппы H , то пространство $\mathfrak{L}(G)$ метризуемо полной метрикой.

Доказательство. Так как G — локально компактная группа, множество $\mathfrak{K}(G)$ открыто в $\mathfrak{L}(G)$ и в силу условия а) множества $\mathfrak{K}(G)$ и $n \mathfrak{K}(G)$ — открыто замкнуты в $\mathfrak{L}(G)$. Поэтому достаточно показать, что метризуемы множества $\mathfrak{K}(G)$ и $n \mathfrak{K}(G)$ в отдельности.

I. Множество $\mathfrak{K}(G)$ метризуемо и полно по Чеху. G — о-компактная локально компактная группа, так как G/G_0 конечнопорождена и, следовательно, счетна (с 1-й аксиомой счетности). Тогда G обладает счетной базой $\{O_i\}_{i=1}^{\infty}$ открытых подмножеств. Но в этом случае $\mathfrak{K}(G)$ обладает счетной открытой базой из элементов вида $D_1(U_i) \cap D_2(O_{i_1}) \cap \dots \cap D_2(O_{i_n})$, где $O_{i_k} \in \{O_j\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, n$, U_i — конечные объединения элементов $\{O_j\}_{j=1}^{\infty}$. Кроме того, множество $\mathfrak{K}(G)$ локально компактно [6, с. 387], поэтому оно регулярно и метризуемо [6, с. 387] и полно по Чеху.

II. Множество $n \mathfrak{K}(G)$ метризуемо. Воспользуемся теоремой Бинга [6, с. 418] и построим открытую σ -дискретную базу в $n \mathfrak{K}(G)$. Заметим, что $n \mathfrak{K}(G)$ (как и $\mathfrak{L}(G)$) регулярно, поскольку $\mathfrak{L}(G)$ — подпространство экспоненты 2^G [6, с. 364].

Группа G метризуема. Пусть $\rho : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ — какая-нибудь фиксированная левонвариантная метрика на G . Экспоненциальное отображение $\exp : l(G) \rightarrow G_0$ на некоторой окрестности нуля W_0 индуцирует гомеоморфизм на некоторую окрестность V_0 единицы G и вводит на ней нормальные координаты [7]. Можно считать, что V_0 — компакт. Определим V_m как кубическую относительно нормально координат окрестность единицы e такую, что $V_m \subseteq \{x \in G \mid \rho(e, x) < 1/m\}$. Всякая подгруппа H из G сепарабельна. Для каждой $H \in n \mathfrak{K}(G)$ фиксируем счетное всюду плотное множество $\{h_i^H\}_{i=1}^{\infty}$ в H .

Пусть $\varphi : H \rightarrow H/H_0$ — естественный гомоморфизм и $a_1^H, \dots, a_n^H \in H$ таковы, что H/H_0 порождается $\varphi(a_1^H), \dots, \varphi(a_n^H)$, т. е. $H/H_0 = \langle \varphi(a_1^H), \dots, \varphi(a_n^H) \rangle$ (условие б), n зависит от H). Для каждой $H \in n \mathfrak{K}(G)$ определим $d(H) \in \mathbb{R}$, как

$$\inf_{x \in \bar{V}_0 \cap (H \setminus H_0)} \inf_{y \in H_0 \cap \bar{V}_0} \rho(x, y),$$

если $H \cap V_0 \neq H_0 \cap V_0$, и $d(H) = 2$, если $H \cap V_0 = H_0 \cap V_0$. Для любой

подгруппы $H \in n\mathfrak{K}(G)$ $d(H) > 0$. Действительно, если $d(H) = 0$, то существует последовательность из $H \setminus H_0$, сходящаяся к e . Однако, H_0 открыта в H — противоречие.

Пусть $\mathfrak{E}_m = \{H \in n\mathfrak{K}(G) \mid d(H) > 1/m\}$. Если $H \in \mathfrak{E}_m$, то $H_0 \cap V_m$ — локальное линейное пространство в нормальных координатах. Положим $r = r(H) = \dim(H_0 \cap V_m)$ $y_{m,1}^H, \dots, y_{m,r}^H$ — линейно независимые векторы из $H_0 \cap V_m$ и V_m^H — такая окрестность единицы, что $y_{m,k}^H V_m^H \subseteq V_m$, $k = \overline{1, r}$, и из $z_k \in y_{m,k}^H V_m^H$, $k = \overline{1, r}$, следует, что z_1, \dots, z_r линейно независимы (V_m — локальное линейное пространство в нормальных координатах).

Для каждого $H \in \mathfrak{E}_m$ положим

$$\mathfrak{A}_m(H) = n\mathfrak{K}(G) \cap D_1(H) \cap D_2(y_{m,1}^H V_m^H) \cap \dots \cap D_2(y_{m,r}^H V_m^H) \cap \\ \cap D_2(a_1^H V_m) \cap \dots \cap D_2(a_n^H V_m) \cap D_2(h_1^H V_m) \cap \dots \cap D_2(h_m^H V_m).$$

Множество $\mathfrak{A}_m(H)$ открыто в $n\mathfrak{K}(G)$, так как $D_1(H) \cap n\mathfrak{K}(G)$ открыто [4].

Покажем, что $\bigcup_{m=1}^{\infty} \{\mathfrak{A}_m(H) \mid H \in \mathfrak{E}_m\}$ — σ -дискретная база пространства $n\mathfrak{K}(G)$. Семейство $\gamma_m = \{\mathfrak{A}_m(H) \mid H \in \mathfrak{E}_m\}$ дискретно, m — фиксировано.

1. Если $H^1 \neq H^2$; $H^1, H^2 \in \mathfrak{E}_m$, то $\mathfrak{A}_m(H^1) \cap \mathfrak{A}_m(H^2) = \emptyset$.

Действительно, если $H^3 \in \mathfrak{A}_m(H^1) \cap \mathfrak{A}_m(H^2)$, $r_1 = r(H^1)$, $r_2 = r(H^2)$, то существует набор $z_1, z_r \in H^3 \cap V_m$ такой, что $z_k \in y_{m,k}^{H^1} V_m^{H^1}$ и $\{z_k\}$ — линейно независимы в V_m , $k = \overline{1, r_1}$. Тогда $z_k \in H_0^1 \cap H_0^2$, $k = \overline{1, r_1}$, и $H_0^1 \cap V_m \subseteq H_0^2 \cap V_m$. Отсюда $H_0^1 \subseteq H_0^2$, так как $H_0^1 \cap V_m$ порождает H_0^1 , $i = \overline{1, 2}$. Аналогично, $H_0^2 \subseteq H_0^1$ и $H_0^1 = H_0^2$. Существует $t_k \in a_k^{H^1} V_m \cap H^3$, $k = \overline{1, n(H^1)}$ и, поскольку $H^3 \subseteq H^1 \cap H^2$ и $H_0^1 = H_0^2$, $a_k^{H^1} \in H^2$ и $H^1 \subseteq H^2$. Точно также $H^1 \supseteq H^2$ и $H^1 = H^2$. Получено противоречие.

2. Пусть группа $X \in n\mathfrak{K}(G)$ произвольна и фиксирована. Если $X \in \mathfrak{A}_m(H)$ для некоторого $H \in \mathfrak{E}_m$, то $\mathfrak{A}_m(H)$ — окрестность X , не пересекающаяся ни с какой другой окрестностью $\mathfrak{A}_m(H')$, $H' \in \mathfrak{E}_m$, $H' \neq H$ (см. 1). Пусть теперь $X \notin \mathfrak{A}_m(H)$ для любого $H \in \mathfrak{E}_m$. Если m_1 — такое целое число, что $X \in \mathfrak{E}_{m_1}$ и $m_1 > m$, то положим $\mathfrak{A}(X) = \mathfrak{A}_{m_1}(X)$. Если $\mathfrak{A}(X) \cap \mathfrak{A}_m(H) \neq \emptyset$ для некоторого $H \in \mathfrak{E}_m$, то $H \cap X \in \mathfrak{A}(X) \cap \mathfrak{A}_m(H)$. Тогда $X_0 \subseteq H_0$, как и в п. 1. Действительно, $X_0 \cap V_m$, и $H_0 \cap V_m \subseteq H_0 \cap V_m$ — локальные линейные подпространства V_m . Существуют $z_1, \dots, z_l \in X \cap H \cap V_m$, — базис линейного подпространства $V_m \cap X_0$. Поскольку $z_k \in H \cap V_m$, $H_0 \cap V_m$, $k = \overline{1, l}$, и $H_0 \cap V_m$ — локальное линейное пространство, $X_0 \cap V_m \subseteq H_0 \cap V_m$, и $X_0 \subseteq H_0$. Но тогда $a_i^X V_m \cap H \neq \emptyset$ и $a_i^X \in H$, $i = \overline{1, n}$. Отсюда $X \subseteq H$ и $X \in \mathfrak{A}_m(H)$, — противоречие. Тем самым показана дискретность семейства γ_m и замкнутость каждого $\mathfrak{A}_m(H)$ (в частности, еще раз доказана (вполне) регулярность пространства $n\mathfrak{K}(G)$).

Семейство $\bigcup_{m=1}^{\infty} \{\mathfrak{A}_m(H) \mid H \in \mathfrak{E}_m\}$ — база $n\mathfrak{K}(G)$. Пусть $Y \in n\mathfrak{K}(G)$ и $\mathfrak{A}(Y) = n\mathfrak{K}(G) \cap D_1(Y) \cap D_2(W_1) \cap \dots \cap D_2(W_s)$ — произвольная базисная окрестность Y в $n\mathfrak{K}(G)$. Существуют m и $h_{i_1}^Y, \dots, h_{i_s}^Y$ такие, что $1/m < d(Y)$, $i_j \leq m$ и $h_{i_j}^Y V_m^Y \subseteq W_j$, $j = \overline{1, s}$. Тогда $\mathfrak{A}_m(Y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathfrak{A}_i(H) \mid H \in \mathfrak{E}_i\}$ и $Y \in \mathfrak{A}_m(Y) \subseteq \mathfrak{A}(Y)$.

Итак, по теореме Бинга пространство $n\mathfrak{K}(G)$ метризуемо.

III. Пространство $n\mathfrak{K}(G)$ полно по Чеху.

Воспользуемся критерием полноты по Чеху [6, с. 297, теорема 3.9.2] и несколько видоизменим построение σ -дискретной базы в пространстве $n\mathfrak{K}(G)$. Покажем, что для каждого m $\gamma_m = \{\mathfrak{A}_m(H) \mid H \in \mathfrak{E}_m\}$ можно вложить в открытое покрытие γ_m^0 из непересекающихся множеств пространства $n\mathfrak{K}(G)$ такое, что каждый элемент этого покрытия принадлежит некоторому $\gamma_s = \{\mathfrak{A}_s(H) \mid H \in \mathfrak{E}_s\}$.

Пусть $n = \dim G = \dim G_0$. Предположим, что для некоторого целого $k_0 \leq n$ построена такая минимальная дизъюнктивная система $\gamma_m^{k_0}$ открытых множеств $n\mathfrak{R}(G)$, что $\gamma_m^{k_0} \supseteq \gamma_m$, $\gamma_m^{k_0} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\mathfrak{A}_i(H) \mid H \in \mathfrak{S}_i\}$ и для любого целого $k \in [k_0, n]$ и любой подгруппы $H \in n\mathfrak{R}(G)$ такой, что $\dim H_0 = k$ существует $C_\alpha \in \gamma_m^{k_0}$ такое, что $H \in O_\alpha$. (На начальном шаге $k_0 = n$ полагаем $\gamma_m^{k_0} = \gamma_m$, считая, что $d(G) > 1$.) Построим $\gamma_m^{k_0-1}$, $k_0 \geq 1$. Пусть $H \in n\mathfrak{R}(G)$, $\dim H_0 = k_0 - 1$. Если $H \notin O_\alpha$ для любого $O_\alpha \in \gamma_m^{k_0}$, то найдем m_1 такое, что $H \in \mathfrak{S}_{m_1}$, $m_1 > m$ и положим $\mathfrak{A}(H) = \mathfrak{A}_{m_1}(H)$. Тогда $\mathfrak{A}(H)$ не пересекается ни с одним $O_\alpha \in \gamma_m^{k_0}$. Действительно, если $\mathfrak{A}(H) \cap O_\alpha \neq \emptyset$, $O_\alpha = \mathfrak{A}(Y)$, для некоторого $Y \in n\mathfrak{R}(G)$, $\mathfrak{A}(Y) \in \{\mathfrak{A}_s(H) \mid H \in \mathfrak{S}_s\}$, то либо $H_0 \subseteq Y_0$, либо $Y_0 \subseteq H_0$. Если $H_0 \subseteq Y_0$, то $H \subseteq Y$ и $H \in O_\alpha$ — противоречие. Если $Y_0 \subseteq H_0$, то $1/m > d(Y)$, т. е. $Y \notin \mathfrak{S}_m$ и, по предположению, $\dim Y_0 \geq k_0$, что невозможно ($1/m > d(Y)$), так как $Y \in D_2(y_{m_1, k}^H, V_{m_1}^H)$, $k = 1, \overline{r}(H)$, и, если $Y_0 = H_0$, то $Y = H$. Далее, если $H^1, H^2 \in n\mathfrak{R}(G)$, $\dim H_0^1 = \dim H_0^2 = k_0 - 1$, то из $\mathfrak{A}(H^1) \cap \mathfrak{A}(H^2) \neq \emptyset$ следует $H_0^1 = H_0^2$ (если $H_0^1 \subseteq H_0^2$, то $H_0^1 = H_0^2$, так как размерности $\dim H_0^1$ и $\dim H_0^2$ равны) и, значит, $H^1 = H^2$, как и выше. Положим $\gamma_m^{k_0-1} = \gamma_m^{k_0} \cup \{\mathfrak{A}(H) \mid \dim H_0 = k_0 - 1 \text{ и } H \in n\mathfrak{R}(G) \setminus \bigcup_{O_\alpha \in \gamma_m^{k_0}} O_\alpha\}$. Оче-

видно, $\gamma_m^{k_0-1}$ удовлетворяет всем условиям индукции. В частности, γ_m^0 — дизъюнктивное покрытие $n\mathfrak{R}(G)$ такое, что $\gamma_m \subseteq X_m^0 \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \gamma_m$. Покажем теперь, что счетная система открытых покрытий $\{\gamma_m^0\}$ удовлетворяет условию теоремы 3.9.2 [6]. Пусть \mathfrak{F} — центрированное семейство замкнутых в $n\mathfrak{R}(G)$ множеств такое, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ в \mathfrak{F} есть множество, вписанное в некоторый элемент покрытия γ_m^0 . Покажем, что пересечение \mathfrak{F} не пусто, что и завершит доказательство. Семейство \mathfrak{F} можно считать базой некоторого фильтра. Для каждого m найдутся $F \in \mathfrak{F}$ и $O_\alpha = \mathfrak{A}(H^m) \in \gamma_m^0$ такие, что $F \subseteq O_\alpha$. Можно считать, что H^m , $m = 1, 2, \dots$. Начиная с некоторого m $H_0^s = H_0^{s+1}$, $s \geq m$, но тогда $d(H_0^s) \leq d(H^{s+1})$ и $H^s = H^{s+1}$, так как $H^{s+1} \in \gamma_m^0$ при $s \geq m$, т. е. с некоторого m цепочка $H^1 \supseteq H^2 \supseteq \dots \supseteq H^m \supseteq \dots$ стабилизируется. Поскольку $\{\mathfrak{A}_s(H^m)\}_{s=1}^{\infty}$ — база $n\mathfrak{R}(G)$ в точке H^m и для любого s найдется элемент $F \in \mathfrak{F}$ такой, что $F \subseteq \mathfrak{A}_s(H^m)$, имеем $H^m \in \bigcap \mathfrak{F}$.

Итак, пространство $\mathfrak{L}(G)$ метризуемо и полно по Чеху. В силу теоремы 4.3.26 [6, с. 407], пространство $\mathfrak{L}(G)$ метризуемо полной метрикой. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Пусть группа Ли G удовлетворяет условию теоремы. Тогда пространство $\mathfrak{L}(G)$ сильно паракомпактно, а его подпространство $n\mathfrak{R}(G)$ сильно нульмерно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $\mathfrak{R}(G)$ — локально компактный паракомпакт, а значит, сильно паракомпактно [6, с. 487]. Множество $n\mathfrak{R}(G)$ — сильно нульмерно (заметим лишь, что каждое покрытие γ_m^0 состоит из открыто-замкнутых множеств и воспользуемся теоремой 7.3.1 [6, с. 588]), а значит, и сильно паракомпактно [6, с. 588, п. 7.2.Е]. Поскольку $\mathfrak{R}(G)$ и $n\mathfrak{R}(G)$ открыто-замкнуты в $\mathfrak{L}(G)$, доказательство завершено.

С л е д с т в и е 2. Пусть $G = R \times N$, где R — разрешимая связная группа Ли, N — компактная группа Ли. Тогда пространство $\mathfrak{L}(G)$ метризуемо полной метрикой и сильно паракомпактно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполняются ли условия а) и б) теоремы.

а) Множество $\mathfrak{R}(G)$ замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$. Пусть $\{H_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — направленность

компактных подгрупп в $\mathfrak{Q}(G)$, сходящаяся к точке $H \in \mathfrak{Q}(G)$, $\varphi: G \rightarrow G/N = R$ — естественный гомоморфизм. Отображение φ замкнуто, так как N — компакт [5, п. 5.18]. Тогда направленность $\{\varphi(H_\alpha)\}$ сходится к $\varphi(H)$ в $\mathfrak{Q}(R)$ (см. лемму). Отсюда $\varphi(H)$ — компакт (см. [8], R — разрешимая связная группа Ли) и $\varphi^{-1}\varphi(H) = HN$ — компакт в G , т. е. подгруппа H компактна.

б) Группа H/H_0 конечнопорождена для любой $H \in n\mathfrak{K}(G)$. Пусть $H \in n\mathfrak{K}(G)$. Тогда $\varphi(H) = HN/N \subseteq R$. Так как группа R разрешима, $\varphi(H)/\varphi(H_0)$ — конечнопорождена [9, предложение 3.8]. Пусть a_1, \dots, a_n — такой набор элементов из H , что $\langle \varphi(H)_0, \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \rangle = \varphi(H)$. Так как φ — замкнутое отображение $\varphi(H)_0 = \varphi(H_0)$ [5, п. 7.12]. По первой теореме об изоморфизме [5, п. 5.33] $HN/N \cong H/(H \cap N)$ и можно считать $\varphi: H \rightarrow H/(H \cap N)$. Группа $H \cap N/(H \cap N)_0$ конечна и пусть b_1, \dots, b_m — такой набор элементов из $H \cap N$, что $\langle (H \cap N)_0, b_1, \dots, b_m \rangle = H \cap N$. Покажем, что подгруппа $H' = \langle H_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n \rangle$ совпадает с H . Так как $H \cong (H \cap N)_0$, $H' \cong H \cap N$ и $H' \cong H_0 (H \cap N)$. Если $a \in H$, то $a \in a H_0 (H \cap N)$ и $\varphi(a) \in \varphi(a) \varphi(H_0 (H \cap N)) = \varphi(a) \times \varphi(H_0) \subseteq \varphi(H') \Rightarrow a \in H' (H \cap N) \subseteq H'$. Включение $H' \subseteq H$ очевидно. Следствие доказано.

В доказательстве следствия использована следующая лемма, сформулированная И. В. Протасовым.

Лемма. Пусть G — топологическая группа, N — инвариантная подгруппа группы G такая, что пространство G/N нормально, $\varphi: G \rightarrow G/N$ — естественный гомоморфизм. Тогда отображение $\Phi: \mathfrak{Q}(G) \rightarrow \mathfrak{Q}(G/N)$, $\Phi(H) = \varphi(H)$, непрерывно.

Доказательство. Пусть $\{H_\alpha\}_{\alpha \in J} \rightarrow H$ в $\mathfrak{Q}(G)$ и $\mathfrak{U}^* = D_1(U) \cap D_2(V_1) \cap \dots \cap D_2(V_k)$ — окрестность $\Phi(H)$ в $\mathfrak{Q}(G/N)$. Тогда $\varphi(H) \subseteq U$ и существует открытое подмножество W в G/N такое, что $\varphi(H) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq U$.

Пусть $\mathfrak{U} = D_1(\varphi^{-1}(W)) \cap D_2(\varphi^{-1}(V_1)) \cap \dots \cap D_2(\varphi^{-1}(V_k))$ — окрестность H в $\mathfrak{Q}(G)$. Начиная с некоторого $\alpha_0 \in J$, $H_\alpha \in \mathfrak{U} \Rightarrow \varphi(H_\alpha) \subseteq W$, $\varphi(H_\alpha) \cap V_i \neq \emptyset$ для $i = \overline{1, k}$. Но тогда $\Phi(H_\alpha) = \varphi(H_\alpha) \subseteq \overline{W} \subseteq U$ и $\Phi(H_\alpha) \cap V_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1, k}$, т. е. $\{\Phi(H_\alpha)\}_{\alpha \in J} \rightarrow \Phi(H)$. Лемма доказана.

Следствие 2 дает отрицательный ответ на вопрос V.19 из [10].

1. Панасюк С. П. Метризуемость решетки замкнутых подгрупп разрешимых связных групп Ли // XVII Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. — Минск: Ин-т математики АН БССР, 1983. — Ч. 1. — С. 141.
2. Панасюк С. П. О нормальности и метризуемости пространства замкнутых подгрупп групп Ли // V Тирасп. симпоз. по общей топологии и ее прил.: Тез. докл. — Кишинев: Штиинца, 1985. — С. 197.
3. Панасюк С. П. О пространстве замкнутых подгрупп группы Ли // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. — Львов: Ин-т прикл. пробл. математики и механики АН УССР, 1987. — Ч. 2. — С. 214.
4. Протасов И. В. Топологические группы с σ -компактным пространством подгрупп // Укр. мат. журн. — 1985. — 37, № 1. — С. 93—98.
5. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т. — М.: Наука, 1975. — Т. 1. — 654 с.
6. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
7. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982. — 448 с.
8. Панасюк С. П. Абелевы пределы компактных групп в пространстве замкнутых подгрупп // Вычислит. и прикл. математика. — 1988. — Вып. 64. — С. 134—141.
9. Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. — М.: Мир, 1977. — 320 с.
10. Нерешенные задачи топологической алгебры / Отв. ред. В. И. Арнаутов. — Кишинев: Штиинца, 1985. — 40 с.