УДК 517.9

И. О. Парасюк

Коизотропные инвариантные торы гамильтоновых систем квазиклассической теории движения электрона проводимости

Исследуются квазиклассические уравнения движения электрона проводимости в электрическом и магнитном поле. Показано, что для однородных полей движение может происходить по четырехмерным коизотропным инвариантным торам в шестимерном фазовом пространстве. Методами КАМ-теории исследовано движение в слабо неоднородных полях.

Досліджуються квазікласичні рівняння руху електрона провідності в електричному і магнітному полях. Показано, що для однорідних полів рух може відбуватись по чотиривимірних коізотропних інваріантних торах у шестивимірному фазовому просторі. Методами КАМ-теорії досліджено рух у слабо неоднорідних полях.

1. Постановка задачи и основные результаты. Настоящая работа посвящена исследованию гамильтоновой системы

$$\dot{P} = -\partial\mathcal{H}(P, x)/\partial x, \quad \dot{x} = \partial\mathcal{H}(P, x)/\partial P \tag{1}$$

с функцией Гамильтона вида

$$\mathcal{H}(P, x) = \varepsilon(P - A(x, \mu)) + \mu U(x) - \langle E, x\rangle,$$

где $P = (P_1, P_2, P_3) \in R^3_{(P)}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3_{(x)}$, $\varepsilon(P): R^3_{(P)} \to R$, $U(x): R^3_{(x)} \to R$, $A(x, \mu): R^3_{(x)} \times R_{(\mu)} \to R^3_{(P)}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в R^3. Предполагается, что $U(x)$ — периодическая функция относительно решетки Γ, образованной в $R^3_{(x)}$ базисными векторами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (или некоторой ее подрешетки), $\varepsilon(P)$ — периодическая функция относительно обратной решетки Γ^*, образованной в $R^3_{(P)}$ векторами $\Gamma_1^*, \Gamma_2^*, \Gamma_3^*$ ($\langle \Gamma_i, \Gamma_j^*\rangle = \delta_{ij}$), μ — малый параметр. Системы такого вида возникают в теории твердого тела при использовании классических представлений для изучения движения электрона проводимости во внешних полях. При этом A (x,

μ) интерпретируется как векторный потенциал магнитного поля $H(x, \mu) = \operatorname{rot} A$, E — внешнее однородное электрическое поле, $\mu U(x)$ — возмущение поля кристаллической решетки, не учтенное законом дисперсии $\varepsilon(P)$ [1, 2].

Рассмотрим случай, когда магнитное поле почти однородно, т. е. $H(x, \mu) = \overline{H} + \mu \tilde{H}(x)$, $\overline{H} = \text{const}$, составляющая $\tilde{H}(x)$ периодична относительно Γ и имеет нулевое среднее по элементарной ячейке решетки, а электрическое поле E ортогонально полю $\overline{H}$. Не ограничивая общности считаем, что $\Gamma_i = 2\pi e_i$, где e_i — i-й орт в $R^3_{(x)}$. При $\mu = 0$ уравнения (1) легко интегрируются [1].

В настоящей работе для определенного класса поверхностей Ферми, задаваемых в $R^3_{(P)}$ уравнением $\varepsilon(P) = \text{const}$, будет дано следующее описание невозмущенного движения. Фазовое пространство, интерпретируемое как многообразие $R^3_{(p)} \times T^3_{(x)}$, где $T^3_{(x)} = R^3_{(x)}/\Gamma$ — трехмерный тор, содержит в себе области, расслаиваемые двухпараметрическим семейством четырехмерных торов. Движение на этих торах квазипериодично и в общем случае обладает четырьмя независимыми частотами. Таким образом, имеет место ситуация, существенно отличная от классических случаев интегрируемых систем, когда размерность инвариантных торов не превышает половины размерности фазового пространства. Применение в этой ситуации метода ускоренной сходимости [3—5] и результатов работ [6, 7] позволяет доказать теорему о сохранении большинства четырехмерных торов при малых значениях μ, а также выяснить ряд особенностей движения системы (1).

2. Коизотропные инвариантные торы невозмущенной системы. При переходе к переменной $p' = P - A$ система (1) принимает вид

$$\dot{p}' = [\partial\varepsilon/\partial p' \times H] + E - \mu \partial U/\partial x, \quad \dot{x} = \partial\varepsilon/\partial p'. \qquad (2)$$

С магнитным полем $H = (H_1, H_2, H_3)$ естественным образом связывается замкнутая 2-форма $h^2 = H_1 dx_2 \wedge dx_3 + H_2 dx_3 \wedge dx_1 + H_3 dx_1 \wedge dx_2$. Если теперь на многообразии $M^6 = R^3_{(p')} \times T^3_{(x)}$ задать симплектическую структуру посредством 2-формы $\omega^2 = \Sigma dp'_i \wedge dx_i + h^2$, то окажется, что система (2) на симплектическом многообразии (M^6, ω^2) является локально гамильтоновой с многозначным гамильтонианом $\varepsilon(p') - \langle E, x\rangle + \mu U(x)$ [2]. (Поскольку $\varepsilon(p')$ и $H(x, \mu)$ — периодические функции, то уравнения (2) задают векторное поле на шестимерном торе $T^3_{(p')} \times T^3_{(x)}$. Однако нам удобно рассматривать его накрытие M^6.)

Как известно [8], форму h^2 можно представить в виде $h^2 = \overline{h}^2 + \mu d\tilde{a}$, где $\overline{h}^2 = \overline{H}_1 dx_2 \wedge dx_3 + \overline{H}_2 dx_3 \wedge dx_1 + \overline{H}_3 dx_1 \wedge dx_2$, $\tilde{a} = \Sigma \tilde{A}_i(x)\, dx_i$, причем $\operatorname{rot} \tilde{A}(x) = \tilde{H}(x)$, $\tilde{A}(x) = (\tilde{A}_1(x), \tilde{A}_2(x), \tilde{A}_3(x))$. Введем новый импульс $p = p' + \mu \tilde{A}(x)$. Тогда $\omega^2 = \Sigma dp_i \wedge dx_i + \overline{h}^2$, а многозначный гамильтониан примет вид

$$\varepsilon(p - \mu\tilde{A}(x)) - \langle E, x\rangle + \mu U(x). \qquad (3)$$

Для скобки Пуассона, порожденной ω^2, выполняются соотношения

$$\{p_1, p_2\} = \overline{H}_3, \ \{p_1, p_3\} = -\overline{H}_2, \ \{p_2, p_3\} = \overline{H}_1, \qquad (4)$$
$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{x_i, x_j\} = 0.$$

Проанализируем теперь уравнения невозмущенного движения. Покажем, что в некоторых областях пространства импульсов можно построить координаты J, I, $\psi \mid \operatorname{mod} 2\pi$ так, чтобы уравнения невозмущенного движения имели вид

$$\dot{J} = 0, \ \dot{I} = 0, \ \dot{\psi} = \omega(J, I), \ \dot{x} = \xi(J, I, \psi)$$

и, следовательно, легко интегрировались.

Так как по предположению $\langle E, \overline{H}\rangle = 0$, то, введя скорость дрейф $v_{EH} = \langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{-1} [E \times \overline{H}]$, получим равенство $E = -[v_{EH} \times \overline{H}]$, а тогда пр $\mu = 0$ уравнения для импульса примут вид

$$\dot{p} = [\partial\varepsilon^*/\partial p \times \overline{H}], \qquad (…$$

где $\varepsilon^*(p) = \varepsilon(p) - \langle v_{EH}, p\rangle$. Уравнения невозмущенного движения с уч том (4) запишутся в виде

$$\dot{p} = \{p, \varepsilon^*(p)\},\ \dot{x} = \{x, \varepsilon^*(p)\} + v_{EH}. \qquad (…$$

Скобка $\{\cdot, \cdot\}$ превращает $R^3_{(p)}$ в пуассоново многообразие. Проекция и пульса на магнитное поле $J(p) = \langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{-1/2} \langle \overline{H}, p\rangle$ аннулирует эту скобк т. е.

$$\{p, J(p)\} = 0 \qquad \forall p \in R^3_{(p)}. \qquad (…$$

Поэтому плоскость $J(p) = \mathrm{const}$ является симплектическим многообразие Вводя новые переменные $z_1 = \langle E, E\rangle^{-1} \langle E, p\rangle$, $z_2 = \langle v_{EH}, p\rangle$, $z_3 = J(p)$, учетом (5), (7) получаем

$$\{z_1, z_2\} = \langle \partial z_1/\partial p,\ [\partial z_2/\partial p \times \overline{H}]\rangle = \langle E, E\rangle^{-1} \langle E, [v_{EH} \times \overline{H}]\rangle = -1,$$

$$\{z_i, z_3\} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следовательно, система (5) примет вид

$$\dot{z}_1 = \{z_1, \varepsilon^*\} \equiv -\partial\varepsilon^*/\partial z_2,\ \dot{z}_2 = \{z_2, \varepsilon^*\} \equiv \partial\varepsilon^*/\partial z_1,\ \dot{z}_3 = 0. \qquad (…$$

На плоскости $z_3 = c$ имеем стандартную гамильтонову систему с функци гамильтона $\varepsilon^*|_{z_3=c}$.

Предположим теперь, что для некоторого открытого множества зн чений параметров c и c_1 линии уровня $\varepsilon^*|_{z_3=C} = c_1$ замкнуты. Это услов выполняется для широкого класса законов дисперсии $\varepsilon(p)$. Тогда, к известно [9], можно построить локально взаимно однозначную замену п ременных

$$z_1 = L_1(J, I, \psi),\ z_2 = L_2(J, I, \psi),\ z_3 = J. \qquad (…$$

где функции L_1, L_2 периодичны по ψ с периодом 2π так, чтобы I и ψ на пло кости $z_3 = c$ представляли собой переменные «действие — угол» для сист мы с гамильтонианом $\varepsilon^*|_{z_3=c}$, т. е. в силу (9) выполнялись соотношен

$$\varepsilon^* = k^*(J, I),\ \{\psi, I\} = 1. \qquad (1…$$

В новых переменных уравнения (6) принимают вид

$$\dot{J} = 0,\ \dot{I} = 0,\ \dot{\psi} = \partial k^*(J, I)/\partial I \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \omega(J, I),$$

$$\dot{x} = \{x, \varepsilon^*\} + v_{EH} \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \xi(J, I, \psi).$$

Таким образом, инвариантное многообразие $J = \mathrm{const}$, $I = \mathrm{const}$ являет четырехмерным тором $S^1 \times T^3_{(x)}$, где $S^1 = \{\psi \mid \mathrm{modd}\, 2\pi\}$. Поскольку $\{J, I\} = 0$, то этот тор является коизотропным (инволютивным).

3. Переменные типа «действие—угол» для невоз мущенной системы. Построим теперь координаты, в которых тр ектория невозмущенного движения представляет собой прямолинейну обмотку четырехмерного тора.

Поток системы $\dot{z}_1 = -\partial I/\partial z_2$, $\dot{z}_2 = \partial I/\partial z_1$, где $I = I(z_1, z_2, z_3)$ выраж но из соотношений (9), при $z_3 = J$ имеет вид $z_i = L_i(J, I, \psi + t)$, $i = 1,$ Поэтому

В силу (11) имеем

$$\{x, I\} = \Sigma \frac{\partial I}{\partial z_i} \{x, z_i\} = \frac{\partial L_2}{\partial \psi} \langle E, E\rangle^{-1} E - \frac{\partial L_1}{\partial \psi} v_{EH} + w(J, I, \psi)\overline{H},$$

где w — выражение для $\dfrac{\partial I}{\partial z_3}\langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{-1/2}$ в координатах J, I, ψ. Представим функцию w в виде суммы $\overline{w}(J, I) + \tilde{w}(J, I, \psi)$, где среднее второго слагаемого по ψ равно 0. Теперь построим координаты $\varphi' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ следующим образом:

$$\varphi' = x + L_1 v_{EH} - L_2 \langle E, E\rangle^{-1} E - \int\limits_0^{\psi} \tilde{w} d\psi. \tag{12}$$

Тогда $\{\varphi', I\} = \overline{w}(J, I)\overline{H}$.

Докажем, что функция $\overline{w}$ не зависит от I. Действительно, в силу тождества Якоби имеем

$$\{\{\varphi', I\}, \psi\} + \{\{I, \psi\}, \varphi'\} + \{\{\psi, \varphi'\}, I\} \equiv 0.$$

Учитывая, что вектор-функция $\chi(J, I, \psi) = \{\psi, \varphi'\}$ не зависит от φ', получаем равенство

$$-\frac{\partial \overline{w}}{\partial I}\overline{H} + \frac{\partial \chi}{\partial \psi} = 0,$$

из которого следует, что каждое из входящих в него слагаемых равно нулю. Поэтому $\overline{w} = \overline{w}(J)$.

Полагая $y_1 = I - \int\limits_0^J \overline{w}(\tau)\, d\tau + \langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{1/2} J$, получаем

$$\{\varphi', y_1\} = \{\varphi', I\} - \overline{w}(J)\{\varphi', J\} + \langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{1/2}\{\varphi', J\} = \overline{H}.$$

Наконец, положим

$$\varphi = (\varphi', \psi),\ \varkappa_1 = (\overline{H}, 1) \in R^4,\ y_2 = \langle \overline{H}, \overline{H}\rangle^{1/2} J.$$

Тогда получим

$$\{y_1, y_2\} = 0, \quad \{\varphi, y_1\} = \varkappa_1,\ \{\varphi, y_2\} = (\overline{H}, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa_2.$$

Представим теперь уравнения невозмущенного движения в координатах (y, φ). Невозмущенный гамильтониан представим в виде $\varepsilon^*(p) + \langle v_{EH}, p\rangle - \langle E, x\rangle$. Учитывая (6), находим, что локально гамильтонова система с гамильтонианом $\langle v_{EH}, p\rangle - \langle E, x\rangle$ в координатах (p, x) имеет вид $\dot{p} = 0$, $\dot{x} = v_{EH}$, а в координатах (J, I, ψ, x) — соответственно $\dot{J} = 0$, $\dot{I} = 0$, $\dot{\psi} = 0$, $\dot{x} = v_{EH}$. Учитывая (12), в координатах (y, φ) имеем $\dot{y} = 0$, $\dot{\varphi} = b$, где $b = (v_{EH}, 0) \in R^4$. Пусть $k(y)$ — выражение для ε^* в координатах y. Теперь окончательно получаем, что уравнения (6) в координатах (y, φ) имеют вид

$$\dot{y} = 0,\ \dot{\varphi} = \frac{\partial k(y)}{\partial y_1}\varkappa_1 + \frac{\partial k(y)}{\partial y_2}\varkappa_2 + b, \tag{13}$$

что и требовалось показать.

4. КАМ-теория возмущенного движения. Всюду ниже будем предполагать, что функции $\tilde{H}(x)$, $U(x)$ аналитичны в некоторой комплексной окрестности пространства $R^3_{(x)}$, а функция $\varepsilon(p)$ — в некоторой комплексной окрестности пространства $R^3_{(p)}$, причем построенные по этой функции координаты (y, φ) аналитичны в области $G_y \times U_\rho$, где G_y — выпуклая область в $\mathbb{C}^2$, $\operatorname{Re} G_y \stackrel{\text{def}}{=} G \neq \varnothing$, $U_\rho = \{\varphi \in \mathbb{C}^4 \mid |\operatorname{Im}\varphi_j| < \rho,\ j = 1, \dots, 4\}$.

Теорема. *Пусть функция ε^* удовлетворяет условиям невырожденности*

$$|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1\partial y}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1\partial y_2} & \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_2^2}\end{pmatrix}|\geqslant\tau>0\qquad\forall y\in G,\tag{14}$$

а вектор $\overline{H}$ — условиям несоизмеримости: существует $\gamma>0$ такое, что $|k_1\overline{H}_1+k_2\overline{H}_2+k_3\overline{H}_3+k_4|\geqslant\gamma(\Sigma|k_i|)^{-4}$ $\forall k_i\in\mathbb{Z}$, $\Sigma|k_i|\neq0$. Тогда при всех достаточно малых значениях $\mu>0$ всякому $\varphi_0\in R^4$ можно поставить в соответствие такое множество $G_{\varphi_0}\subset G$, что $\operatorname{mes}G_{\varphi_0}\geqslant\operatorname{mes}G-\delta(\mu)$ и если $y_0\in G_{\varphi_0}$, то в координатах (y,φ) решение системы (1) с начальными условиями (y_0,φ_0) представимо в виде

$$y=y_*+f(\omega_*t),\ \varphi=\varphi_*+\omega_*t+g(\omega_*t).$$

Здесь $f(\varphi)$, $g(\varphi)$ — 2π-периодические вещественно-аналитические в полосе $U_{\frac{1}{4}\rho}$ функции, для которых $|f(\varphi)|<c\mu$, $|g(\varphi)|<c\mu$; y_*, φ_* — векторы, для которых $|y_0-y_*|<c\mu$, $|\varphi_0-\varphi_*|<c\mu$; вектор ω_* представим в виде

$$\omega_*=\varkappa_1\lambda_{1*}+\varkappa_2\lambda_{2*}+b,\tag{15}$$

где λ_{1*}, $\lambda_{2*}\in R$ таковы, что $\left|\lambda_{j*}-\dfrac{\partial\varepsilon^*}{\partial y_j}\right|_{y=y_0}|<c\mu$, $j=1,2$, и $(k,\omega_*)\neq0$ $\forall k\in\mathbb{Z}^4\setminus\{0\}$. Константа c не зависит от y_0, φ_0, μ, а положительная функция $\delta(\mu)$ стремится к нулю вместе с μ.

Доказательство. К исследуемой системе применимы результаты работ [6, 7], в которых, в частности, показано, что для любого $i=1,2,\ldots$ на некотором множестве $G_i\times U_i\subset G_y\times U_\rho$ определена замена переменных $(y,\varphi)=\Phi_i(y_i,\varphi_i)$, отличающаяся от тождественной на величину порядка $O(\mu)$ (причем оценка для такой разности является равномерной по i), приводящая исследуемую систему к виду

$$\dot{y}_i=O(\mu^{(1+\alpha)^i}),\ \dot{\varphi}_i=\sum_{j=1}^{2}\varkappa_j(\lambda_j(y_i)+\lambda_{ji}(y_i,\mu))+b+O(\mu^{(1+\alpha)^i}),$$

где $\lambda_j(y)=\partial\varepsilon^*/\partial y_j=\partial k/\partial y_j$, $\lambda_{ji}(y_i,\mu)=O(\mu)$, $0<\alpha<1$. При этом используется тот факт, что в нашем случае возмущение является глобально гамильтоновым и, следовательно, вектор b не зависит от i, а также то обстоятельство, что векторное поле с любым однозначным гамильтонианом $l(y)$, не зависящим от φ, имеет вид $\dot{y}=0$; $\dot{\varphi}=\varkappa_1\,\partial l(y)/\partial y_1+\varkappa_2\,\partial l(y)/\partial y_2$

При $i\to\infty$ возможен предельный переход и теорема оказывается справедливой, если положить

$$G_{\varphi_0}=\Phi_\infty(\operatorname{Re}(G_\infty\times U_\infty))|_{\varphi=\varphi_0},\ (y_*,\varphi_*)=\Phi_\infty^{-1}(y_0,\varphi_0),$$

$$\lambda_{j*}=\lambda_j(y_*)+\lambda_{j\infty}(y_*,\mu),\qquad j=1,2.$$

Легко видеть, что условие (14) гарантирует выполнение условий невырожденности работ [6, 7]. Оценка меры множества G_{φ_0} проводится так же, как и в [6]. Теорема доказана.

Замечание. Вместо условия (14) можно потребовать выполнение более слабого условия

$$|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varepsilon^*}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varepsilon^*}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1^2} & \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1\partial y_2}\end{pmatrix}|+|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varepsilon^*}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varepsilon_*}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_1\partial y_2} & \dfrac{\partial^2\varepsilon^*}{\partial y_2^2}\end{pmatrix}|\geqslant\tau>0.$$

5. **Следствия.** а). Для любого движения с начальными условиями φ_0, $y_0\in G_{\varphi_0}$ проекция кинематического импульса $p'=P-A(x,\mu)$