УДК 517.5

Н. В. Зорий

Экстремальные длины и гриновы емкости конденсаторов

Установлено равенство между гриновой емкостью конденсатора и 2-модулем надлежащего семейства кривых.

Встановлена рівність між гріновою емністю конденсатора і 2-модулем відповідної сім'ї кривих.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, — область с классической функцией Грина $g(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in D$ [1]; D_* — ее одноточечная компактификация; $E^+, E^- \subset D$ — непустые замкнутые в D множества без иррегулярных точек, удовлетворяющие условию $\sup\limits_{x \in E^+, y \in E^-} g(x, y) < \infty$; $E = (E^+, E^-; D)$ — конденсатор в D с «пластинами» E^+ и E^- [2]. В настоящей работе установлено равенство между гриновой емкостью конденсатора E и 2-модулем семейства кривых, соединяющих E^+ и E^- в D_*.

Приведем необходимые определения. Для конденсатора E обозначим через $\mathfrak{N}^1(E)$ класс всех борелевских зарядов ν с жордановым разложением $\nu = \nu^+ - \nu^-$, у которых ν^+ и ν^- — единичные меры, сосредоточенные соответственно на E^+ и E^-. Положим $V(E) := \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} \mathcal{J}(\nu)$, где $\mathcal{J}(\nu) := \iint\limits_{D \times D} g(x, y)\, d\nu(x)\, d\nu(y)$ — гринова энергия заряда ν [1]. Величину $\operatorname{cap} E := V(E)^{-1}$ назовем гриновой емкостью конденсатора E.

Пусть γ — кривая в $\mathbb{R}^p$; $\gamma : (\tau_1, \tau_2) \to \mathbb{R}^p$, $\tau_1, \tau_2 \in [-\infty, +\infty]$, — некоторая ее параметризация. Будем писать $\gamma \subset Q$ (Q — множество из $\mathbb{R}^p$), если $|\gamma| := \{x : x = \gamma(t)\} \subset Q$. Все рассматриваемые в работе кривые γ предполагаются локально спрямляемыми и такими, что сужение $\gamma(t)$ на всякий интервал отлично от постоянного отображения.

Пусть Γ — некоторое семейство, каждый элемент l которого является конечным или счетным набором кривых $l_i \subset \mathbb{R}^p$. Элементы множества Γ будем называть составными кривыми, а для их обозначения будем применять следующую условную запись: $l = \bigcup\limits_i l_i$. Пусть $\mathcal{F}(\Gamma)$ — совокупность всех борелевых функций $\rho : \mathbb{R}^p \to [0, +\infty]$, удовлетворяющих условию $\int\limits_l \rho ds := \sum\limits_i \int\limits_{l_i} \rho ds \geqslant 1$ $\forall l \in \Gamma$. Величину

$$M_2(\Gamma) := \inf_{\rho \in \mathcal{F}(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho^2 dm_p$$

(m_p — p-мера Лебега) называют 2-модулем семейства Γ.

Пусть $\omega := D_* \setminus D$; $O \in D$ — произвольная фиксированная точка; $\langle D_*, \mathcal{T}\rangle$ — топологическое пространство с топологией $\mathcal{T}$, база которой состоит из множеств $\mathcal{V}_\varepsilon(x)$, $x \in D_*$, $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{V}_\varepsilon(\omega) := \{y \in D : g(y, O) < \varepsilon\} \cup \{\omega\}$ и $\mathcal{V}_\varepsilon(x) := \{y \in D : g(y, x) > \varepsilon^{-1}\}$, $x \neq \omega$. Скажем, что кривая $\gamma \subset D$ соединяет множества Q_1 и Q_2, $Q_1, Q_2 \subset D_*$, если замыкание множества $|\gamma|$ в топологии $\mathcal{T}$ имеет непустые пересечения и с Q_1, и с Q_2. Совокупность всех кривых $\gamma \subset D$, соединяющих Q_1 и Q_2, обозначим через $\Gamma(Q_1, Q_2; D)$.

Будем говорить, что составная кривая l соединяет E^+ и E^- с помощью точки ω, если $l = l_+ \cup l_-$ и $l_+ \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D)$, $l_- \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D)$. Совокупность всех составных кривых, соединяющих E^+ и E^- с помощью ω, обозначим $\Gamma_\omega(E^+, E^-)$.

Если для составной кривой $l \in \Gamma_\omega(E^+, E^-)$ существуют такие параметризации ее составляющих $l_+ : (\tau_1, \tau_2) \to D$ и $l_- : (\tau_2, \tau_3) \to D$, что в $\langle D_*, \mathcal{T}\rangle$ выполняются равенства

$$\lim_{t\to\tau_2,\, t<\tau_2} l_+(t) = \omega = \lim_{t\to\tau_2,\, t>\tau_2} l_-(t),$$

то условимся говорить, что l продолжима до кривой в D_*. Совокупность всех тех $l \in \Gamma_\omega(E^+, E^-)$, которые продолжимы до кривых в D_*, обозначим через $\Gamma^0_\omega(E^+, E^-)$.

Положим

$$\Gamma_E := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma_\omega(E^+, E^-),\ \Gamma^0_E := \Gamma(E^+, E^-; D) \cup \Gamma^0_\omega(E^+, E^-).$$

Тогда $\Gamma^0_E \subset \Gamma_E$ и, следовательно [3],

$$M_2(\Gamma^0_E) \leqslant M_2(\Gamma_E). \tag{1}$$

В принятых условиях и обозначениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Верно равенство*

$$M_2(\Gamma_E) = a_p \operatorname{cap} E, \tag{2}$$

где a_p — умноженная на $p-2$ площадь единичной гиперсферы в $\mathbb{R}^p$.

Теорема 1′. *Пусть выполнено условие $m_p(D) < \infty$. Тогда*

$$M_2(\Gamma^0_E) = M_2(\Gamma_E) = a_p \operatorname{cap} E. \tag{2'}$$

Теоремы 1 и 1′ остаются справедливыми, если в семействах Γ_E и Γ^0_E рассматривать только аналитические кривые.

Доказательство. Предположим сначала, что множество $E^+ \cup E^-$ компактно в D (такой конденсатор E называют компактным). Как известно [2, 4], в классе $\mathfrak{N}^1(E)$ существует и единствен заряд $\lambda \equiv \lambda_E$, удовлетворяющий условию $\mathcal{J}(\lambda) = V(E)$. Нам понадобятся следующие свойства его гринова потенциала [4]

$$\mathcal{U}^\lambda(x) := \int_D g(x, y)\, d\lambda(y), \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

Пусть $(\nu_1, \nu_2) := \iint_{D\times D} g(x, y)\, d\nu_1(x)\, d\nu_2(y)$ — взаимная гринова энергия зарядов ν_1 и ν_2. Потенциал $\mathcal{U}^\lambda(x)$ непрерывен в $\overline{\mathbb{R}^p} := \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$, гармоничен в $Z := D \setminus (E^+ \cup E^-)$, субгармоничен в $D \setminus E^+$, супергармоничен в $D \setminus E^-$ и удовлетворяет соотношениям

$$(\lambda^-, \lambda) \leqslant \mathcal{U}^\lambda(x) \leqslant (\lambda^+, \lambda) \quad \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

$$\mathcal{U}^\lambda(x) = \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) & \forall x \in E^+, \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall x \in E^-, \end{cases}$$

причем $-\infty < (\lambda^-, \lambda) \leqslant 0 \leqslant (\lambda^+, \lambda) < +\infty$. Заметим, что $\mathcal{J}(\lambda) = (\lambda^+, \lambda) - (\lambda^-, \lambda)$ и $\mathcal{J}(\lambda) \geqslant \max\{(\lambda^+, \lambda), -(\lambda^-, \lambda)\}$.

Докажем неравенство

$$M_2(\Gamma_E) \leqslant a_p \operatorname{cap} E. \tag{3}$$

Пусть $u(x) := (\operatorname{cap} E)\, \mathcal{U}^{\lambda}(x)$, $\rho_0(x)$ — функция, равная $|\operatorname{grad} u(x)|$ для $x \in \in Z$ и нулю для $x \notin Z$. Покажем, что

$$\rho_0 \in \tilde{\mathcal{F}}(\Gamma_E). \tag{4}$$

Пусть $l \subset Z$ — некоторая кривая. В силу принятых предположений существует параметризация $l: (\tau_1, \tau_2) \to Z$ кривой l, удовлетворяющая условию $\int\limits_{l|[t_1, t_2]} ds = t_2 - t_1 \quad \forall t_1, t_2, \ \tau_1 < t_1 < t_2 < \tau_2$. При этом сужения функций $l(t)$ и $u(l(t))$ на $[t_1, t_2]$ абсолютно непрерывны и $|dl/dt| = 1$ почти всюду на $[t_1, t_2]$. Отсюда находим

$$\int\limits_{l} \rho_0\, ds \geqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} |\operatorname{grad} u(l(t))| \left|\frac{dl}{dt}\right| dt \geqslant \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{du(l(t))}{dt}\, dt \right| =$$

$$= |u(l(t_1)) - u(l(t_2))| \quad \forall t_1, t_2 \in (\tau_1, \tau_2). \tag{5}$$

Пусть $\gamma \in \Gamma(E^+, E^-; D)$; $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Из приведенных свойств потенциала $\mathcal{U}^{\lambda}(x)$ следует существование окрестностей Θ_+ и Θ_- множеств E^+ и E^-, в которых верны неравенства

$$u(x) > (\lambda^+, \lambda) \operatorname{cap} E - \varepsilon \ \ \forall x \in \Theta_+, \quad u(x) < (\lambda^-, \lambda) \operatorname{cap} E + \varepsilon \ \ \forall x \in \Theta_-,$$

а из определения семейства $\Gamma(E^+, E^-; D)$ и отделимости E^+ и E^- — существование дуги γ_ε кривой γ такой, что $\gamma_\varepsilon \subset Z$ и множества $|\gamma_\varepsilon| \cap \Theta_+$, $\gamma_\varepsilon | \cap \Theta_-$ непусты. Из (5) получаем $\int\limits_{\gamma} \rho_0 ds \geqslant \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \rho_0 ds \geqslant [(\lambda^+, \lambda) - (\lambda^-, \lambda)] \times \times \operatorname{cap} E - 2\varepsilon = 1 - 2\varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε находим $\rho_0 \in \tilde{\mathcal{F}}(\Gamma(E^+, E^-; D))$.

Аналогично убеждаемся, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho_0 ds \geqslant \begin{cases} (\lambda^+, \lambda) \operatorname{cap} E & \forall \gamma \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D), \\ -(\lambda^-, \lambda) \operatorname{cap} E & \forall \gamma \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D). \end{cases}$$

Следовательно, верно (4).

Пользуясь известным представлением интеграла гриновой энергии через интеграл Дирихле [1], из (4) получаем

$$M_2(\Gamma_E) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho_0^2(x)\, dm_p(x) \leqslant (\operatorname{cap} E)^2 \int\limits_{D} |\operatorname{grad} \mathcal{U}^{\lambda}(x)|^2\, dm_p(x) =$$

$$= a_p (\operatorname{cap} E)^2 \mathcal{J}(\lambda) = a_p \operatorname{cap} E.$$

Неравенство (3) доказано. Из (1) и (3) находим $M_2(\Gamma_E^0) \leqslant a_p \operatorname{cap} E$.

Все дальнейшие рассуждения необходимы для доказательства неравенства

$$M_2(\Gamma_E) \geqslant a_p \operatorname{cap} E \tag{6}$$

и в случае выполнения условия $m_p(D) < \infty$ — неравенства

$$M_2(\Gamma_E^0) \geqslant a_p \operatorname{cap} E. \tag{7}$$

Пусть конденсатор E удовлетворяет следующему условию (*): все компоненты связности множества Z, которые граничат в D_* с ω, граничат в D только с E^+ (только с E^-). Из результатов работ [4, 5] следует, что в этом случае величина $a_p \operatorname{cap} E$ равна 2-емкости конденсатора $(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ (определение этой характеристики см., например, в [6]). Используя известное представление 2-емкостей конденсаторов через экстремальные длины [6], получаем $a_p \operatorname{cap} E = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p))$. Но в силу условия (*) для всякой кривой $\gamma \in \Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ найдется ее дуга, принадлежащая семейству $\Gamma(E^+, E^-; D)$. Отсюда с помощью известных свойств модулей [3] находим $M_2(\Gamma_E) \geqslant M_2(\Gamma_E^0) \geqslant M_2(\Gamma(E^+, E^-; D)) = M_2(\Gamma(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)) = a_p \operatorname{cap} E$. Следовательно, верно (6) и (7). (Заметим, что при условии (*) неравенство (7), а значит, и равенства (2′) установлены без дополнительного требования $m_p(D) < \infty$. Можно также видеть, что в этом случае справедливость равенств (2′) не нарушится, если отказаться от принятых в начале работы условий регулярности.)

Всюду далее будем считать, что условие (*) не выполняется. Тогда [4] $(\lambda^+, \lambda) > 0$, $(\lambda^-, \lambda) < 0$. Отсюда ввиду свойства непрерывности $\mathcal{U}^\lambda(x)$ находим, что множество $U_0 := \{x \in D : \mathcal{U}^\lambda(x) = 0\}$ замкнуто в D и отделимо от $E^+ \cup E^-$, а каждая связная компонента S_i открытого множества $D \setminus U_0$ имеет непустое пересечение либо только с E^+, либо только с E^-. Пусть U_+ (аналогично U_-) — объединение всех тех S_i, которые имеют непустое пересечение с E^+ (соответственно с E^-). Тогда множества U_0, U_+ и U_- попарно не пересекаются и в объединении дают все D, причем $U_+ \supset E^+$, $U_- \supset E^-$. Из свойств суб- и супергармоничности $\mathcal{U}^\lambda(x)$ соответственно на U_- и U_+ находим

$$\mathcal{U}^\lambda(x) > 0 \quad \forall x \in U_+, \quad \mathcal{U}^\lambda(x) < 0 \quad \forall x \in U_-.$$

Точку $z \in Z$ назовем критической, если $\operatorname{grad} \mathcal{U}^\lambda(z) = 0$. Множество всех критических точек $z \in Z$ обозначим символом X, а множество всех критических значений $\{\mathcal{U}^\lambda(z), z \in X\}$ — символом Y. Пусть $\mathcal{E}_q$, $q \in \mathbb{R}$, — эквипотенциальное множество $\{x \in \mathbb{R}^p : \mathcal{U}^\lambda(x) = q\}$. Известно, что если потенциал $\mathcal{U}^\lambda(x)$ в произвольно малой окрестности точки $x_0 \in Z \setminus X$ не равен тождественно постоянной, то эквипотенциальное множество $\mathcal{E}_{\mathcal{U}^\lambda(x_0)}$ локально в x_0 совпадает с некоторым аналитическим $(p-1)$-мерным многообразием.

Примем следующее определение. Пусть $F_1, F_2 \subset \overline{\mathbb{R}^p}$ — непустые отделимые множества, причем F_2 содержит в себе бесконечно удаленную точку. Пусть, далее, $h \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутая гиперповерхность, т. е. [3] компактная $(p-1)$-мерная липшицева поверхность, не обязательно связная. Будем говорить, что h отделяет F_1 от F_2, если множество $\overline{\mathbb{R}}^p \setminus h$ представимо в виде объединения двух непересекающихся открытых в $\overline{\mathbb{R}}^p$ множеств Θ_1 и Θ_2, где $\Theta_1 \supset F_1$ и $\Theta_2 \supset F_2$, причем все компоненты связности (ограниченного) множества Θ_1 попарно отделимы. Совокупность всех замкнутых гиперповерхностей $h \subset \mathbb{R}^p$, отделяющих F_1 от F_2, обозначим через $H(F_1, F_2)$.

Множества $(0, (\lambda^+, \lambda)) \setminus Y$ и $((\lambda^-, \lambda), 0) \setminus Y$ непусты, что следует, например, из теоремы Келлога [7]. Пусть $\alpha \in (0, (\lambda^+, \lambda)) \setminus Y$ и $\beta \in ((\lambda^-, \lambda), 0) \setminus Y$ — фиксированные числа. Из отмеченных свойств потенциала $\mathcal{U}^\lambda(x)$ легко получить следующее утверждение:

$$\mathcal{E}_\alpha \in H(E^+, \overline{\mathbb{R}}^p \setminus U_+), \quad \mathcal{E}_\beta \in H(E^-, \overline{\mathbb{R}}^p \setminus U_-). \tag{8}$$

Для борелевского множества K, лежащего в $\mathcal{E}_\alpha$ или в $\mathcal{E}_\beta$, обозначим $\Pi(K) := \int\limits_K |\operatorname{grad} \mathcal{U}^\lambda| \, d\sigma$ (интегрирование производится по соответствующей поверхностной мере). В силу (8) имеем

$$\Pi(\mathcal{E}_\alpha) = \Pi(\mathcal{E}_\beta) = a_p. \tag{9}$$

Пусть $x = \boldsymbol{x}(z, t)$ — решение задачи Коши

$$dx/dt = v(x), \quad x|_{t=0} = z,$$

где $z \in Z$ и $v(x) := \operatorname{grad} \mathcal{U}^\lambda(x)$, $x \in Z$. Известно, что такое решение существует и единственно. Обозначим через $\tau^-(z)$ и $\tau^+(z)$ соответственно левый и правый конец максимального открытого интервала, на который функция $x(z, t)$ продолжима в Z непрерывно по t. При $z \in X$ верно $x(z, t) = z\ \forall t \in (-\infty, +\infty)$. При $z \notin X$ функция $x(z, t)$, $t \in (\tau^-(z), \tau^+(z))$, определяет аналитическую кривую L_z. Кривая L_z не содержит в себе точек из X и не имеет точек самопересечения. Заметим также, что функция $\mathcal{U}^\lambda(x(z, t))$ строго возрастает, и поэтому существуют пределы

$$u^+(z) := \lim_{t \to \tau^+(z)} \mathcal{U}^\lambda(x(z, t)), \quad u^-(z) := \lim_{t \to \tau^-(z)} \mathcal{U}^\lambda(x(z, t)).$$

Пусть $Q \subset D_*$ — множество. Будем писать $z(x, t) \to Q$ при $t \to t_0$, если для всякого открытого в $\mathcal{T}$ множества Θ, содержащего Q, верно $x(z, t) \in \Theta$ для всех t, достаточно близких к t_0.

Следующие леммы доказываются с использованием тех же идей, что и лемма 5 из [3].

Лемма 1. *Пусть* $z \in U_+ \cup U_0$, $\mathcal{U}^\lambda(z) < (\lambda^+, \lambda)$. *Тогда в случае* $\tau^+(z) < +\infty$ *верно* $x(z, t) \to E^+$ *при* $t \to \tau^+(z)$, *а в случае* $\tau^-(z) > -\infty$ *верно либо* $x(z, t) \to \{\omega\}$, *либо* $x(z, t) \to E^-$ *при* $t \to \tau^-(z)$.

Лемма 1′. *Пусть* $z \in U_- \cup U_0$, $\mathcal{U}^\lambda(z) > (\lambda^-, \lambda)$. *Тогда в случае* $\tau^-(z) > -\infty$ *верно* $x(z, t) \to E^-$ *при* $t \to \tau^-(z)$, *а в случае* $\tau^+(z) < +\infty$ *верно либо* $x(z, t) \to E^+$, *либо* $x(z, t) \to \{\omega\}$ *при* $t \to \tau^+(z)$.

Аналогично [3] рассмотрим преобразование $\varphi_\alpha : (\xi, t) \to x(\xi, t)$ между $\mathcal{E}_\alpha \times \mathbb{R}$ и Z. Пусть Δ_α и G_α — соответственно область определения и область значений для φ_α. Множества Δ_α и G_α открыты, а отображение φ_α взаимно однозначно, непрерывно по (ξ, t) и имеет непрерывные частные производные по каждому аргументу. Если $t' = (t_1, \dots, t_{p-1})$ — множество локальных параметров аналитической гиперповерхности $\mathcal{E}_\alpha$, а σ_α — поверхностная мера на $\mathcal{E}_\alpha$, то якобиан J_α преобразования φ_α имеет вид [3]

$$J_\alpha = |v(\xi)|\, d\sigma_\alpha(\xi)/dt',$$

а элемент объема для $x \in G_\alpha$ в координатах (ξ, t) — вид

$$dx = J_\alpha dt' dt = |v(\xi)|\, d\sigma_\alpha(\xi)\, dt.$$

Заменяя α на β, получаем определения объектов φ_β, Δ_β, G_β, σ_β и J_β.

Множество $G_\alpha \cap G_\beta$ открыто и обладает следующим свойством: если $z \in G_\alpha \cap G_\beta$, то линия тока вектора v, проходящая через точку z, полностью лежит в $G_\alpha \cap G_\beta$. Действительно, для $z \in G_\alpha \cap G_\beta$ существуют $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$ и $\eta \in \mathcal{E}_\beta$ такие, что $z \in |L_\xi| \subset G_\alpha$ и $z \in |L_\eta| \subset G_\beta$. По теореме единственности имеем $L_z = L_\xi = L_\eta$ и, следовательно, $L_z \subset G_\alpha \cap G_\beta$. Применяя теорему Гаусса к множеству $G_\alpha \cap G_\beta$, получаем

$$\Pi(\mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta) = \Pi(\mathcal{E}_\beta \cap G_\alpha). \tag{10}$$

Пусть A_1 (соответственно A_2) — множество всех тех $\xi \in \mathcal{E}_\alpha$, для которых $L_\xi \in \Gamma(E^+, \{\omega\}; D)$ (соответственно, $L_\xi \in \Gamma(E^+, E^-; D)$). Тогда

$$u^+(\xi) = (\lambda^+, \lambda) \quad \forall \xi \in A_1 \cup A_2, \quad u^-(\xi) = \begin{cases} 0 & \forall \xi \in A_1, \\ (\lambda^-, \lambda) & \forall \xi \in A_2. \end{cases} \tag{11}$$

Справедливы включения

$$A_1 \subset \mathcal{E}_\alpha \setminus G_\beta, \quad A_2 \subset \mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta. \tag{12}$$

Действительно, если $\xi_0 \in A_2$, то множество $|L_{\xi_0}| \cap \mathcal{E}_\beta$ содержит некоторую (единственную) точку η_0. Но тогда $L_{\xi_0} = L_{\eta_0}$ и $\xi_0 \in |L_{\eta_0}| \subset G_\beta$. С другой стороны, если $\xi_1 \in \mathcal{E}_\alpha \cap G_\beta$, то $\xi_1 \in |L_{\eta_1}|$ для некоторого $\eta_1 \in \mathcal{E}_\beta$ и, значит, $u^-(\xi_1) \leqslant \beta < 0$. Следовательно, $\xi_1 \notin A_1$.

Докажем равенство

$$\sigma_\alpha(A_1 \cup A_2) = \sigma_\alpha(\mathcal{E}_\alpha). \tag{13}$$

Пусть $\{D_k\}$ — упорядоченная по включению последовательность ограниченных областей, исчерпывающих D, $Z_k := D_k \setminus (E^+ \cup E^-)$, $G_\alpha^{(k)} := G_\alpha \cap \cap Z_k$. Будем считать k настолько большим, чтобы $D_k \supset \{x \in D : \mathcal{U}^\lambda(x) \geqslant \geqslant \alpha\} \cup E^-$. Для $\xi \in \mathscr{E}_\alpha$ обозначим через $\tau_k^-(\xi)$ и $\tau_k^+(\xi)$ соответственно левый и правый концы максимального открытого интервала, на который $x(\xi, t)$ продолжима непрерывно в Z_k. Тогда $\tau_k^+(\xi) = \tau^+(\xi)$ $\forall \xi \in \mathscr{E}_\alpha$ и

$$\int_{\mathscr{E}_\alpha} |v(\xi)| [\tau^+(\xi) - \tau_k^-(\xi)]\, d\sigma_\alpha(\xi) \leqslant m_p(G_\alpha^{(k)}) < +\infty. \tag{14}$$

Обозначим $A_+ := \{\xi \in \mathscr{E}_\alpha : \tau^+(\xi) = +\infty\}$, $A_- := \bigcup\limits_k A_-^{(k)}$, где $A_-^{(k)} := \{\xi \in \mathscr{E}_\alpha : \tau_k^-(\xi) = -\infty\}$. Из соотношений (14) находим

$$\sigma_\alpha(A_+ \cup A_-) = 0. \tag{15}$$

Верно включение $\mathscr{E}_\alpha \setminus (A_+ \cup A_-) \subset A_1 \cup A_2$. Действительно, если $\xi \in \mathscr{E}_\alpha \setminus \setminus (A_+ \cup A_-)$, то в силу леммы 1 $x(\xi, t) \to E^+$ при $t \to \tau^+(\xi)$ и верно одно из двух: либо L_ξ неограничено в D, либо L_ξ содержится в некотором $G_\alpha^{(k_0)}$, и тогда $\tau^-(\xi) = \tau_{k_0}^-(\xi) > -\infty$. В первом случае имеем $\xi \in A_1$, а во втором (в силу леммы 1′) — $\xi \in A_2$. Из доказанного включения и равенства (15) получаем (13).

Аналогично, пусть B_1 (соответственно B_2) — множество всех тех $\eta \in \in \mathscr{E}_\beta$, для которых $L_\eta \in \Gamma(E^-, \{\omega\}; D)$ (соответственно, $L_\eta \in \Gamma(E^-, E^+; D)$). Тогда верны утверждения

$$u^+(\eta) = \begin{cases} 0 & \forall \eta \in B_1, \\ (\lambda^+, \lambda) & \forall \eta \in B_2, \end{cases} \quad u^-(\eta) = (\lambda^-, \lambda) \ \ \forall \eta \in B_1 \cup B_2, \tag{16}$$

$$B_1 \subset \mathscr{E}_\beta \setminus G_\alpha, \quad B_2 \subset \mathscr{E}_\beta \cap G_\alpha, \tag{17}$$

$$\sigma_\beta(B_1 \cup B_2) = \sigma_\beta(\mathscr{E}_\beta). \tag{18}$$

Пусть $z \in Z \setminus X$, $f : Z \to \mathbb{R}$ — борелевская функция. Обозначим

$$T(f, z) := \int_{\tau^-(z)}^{\tau^+(z)} f(x(z, t))\, dt.$$

Справедливо равенство

$$T(|v|^2, z) = u^+(z) - u^-(z) \quad \forall z \in Z \setminus X. \tag{19}$$

Пусть ρ — произвольная фиксированная метрика из класса $\mathscr{F}(\Gamma_E)$. Тогда

$$T(\rho |v|, z) = \int_{L_z} \rho\, ds \geqslant 1 \quad \forall z \in A_2 \cup B_2. \tag{20}$$

Учитывая соотношения (11), (16) и (19), из (20) в результате применения неравенства Буняковского — Шварца находим

$$T(\rho^2, z) \geqslant \operatorname{cap} E \quad \forall z \in A_2 \cup B_2. \tag{21}$$

Далее, пусть $\xi \in A_1$, $\eta \in B_1$. Составная кривая $L_\xi \cup L_\eta$ принадлежит классу Γ_E, поэтому $T(\rho |v|, \xi) + T(\rho |v|, \eta) \geqslant 1$. Несложные выкладки, включающие замену переменных и применение неравенства Буняковского — Шварца, показывают, что

$$[T(\rho^2, \xi) + T(\rho^2, \eta)]\,[T(|v|^2, \xi) + T(|v|^2, \eta)] \geqslant 1.$$

Пользуясь соотношениями (11), (16), (19) и учитывая произвольность точек $\xi \in A_1$, $\eta \in B_1$, находим

$$a + b \geqslant \operatorname{cap} E, \tag{22}$$

где $a := \inf\limits_{\xi \in A_1} T(\rho^2, \xi)$, $b := \inf\limits_{\eta \in B_1} T(\rho^2, \eta)$.

Из цепочки соотношений

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) \geqslant \int\limits_{G_\alpha} \rho(x)^2 dm_p(x) + \int\limits_{G_\beta} \rho(x)^2 dm_p(x) - \int\limits_{G_\alpha \cap G_\beta} \rho(x)^2 dm_p(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{E}_\alpha} T(\rho^2, \xi) \, |v(\xi)| \, d\sigma_\alpha(\xi) + \int\limits_{\mathscr{E}_\beta} T(\rho^2, \eta) \, |v(\eta)| \, d\sigma_\beta(\eta) -$$

$$- \int\limits_{\mathscr{E}_\alpha \cap G_\beta} T(\rho^2, \xi) \, |v(\xi)| \, d\sigma_\alpha(\xi) = \int\limits_{\mathscr{E}_\alpha \setminus G_\beta} T(\rho^2, \xi) \, |v(\xi)| \, d\sigma_\alpha(\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\mathscr{E}_\beta \cap G_\alpha} T(\rho^2, \eta) \, |v(\eta)| \, d\sigma_\beta(\eta) + \int\limits_{\mathscr{E}_\beta \setminus G_\alpha} T(\rho^2, \eta) \, |v(\eta)| \, d\sigma_\beta(\eta),$$

ввиду утверждений (12), (13), (17), (18) и (21) находим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) \geqslant a\Pi(\mathscr{E}_\alpha \setminus G_\beta) + (\operatorname{cap} E)\, \Pi(\mathscr{E}_\beta \cap G_\alpha) + b\Pi(\mathscr{E}_\beta \setminus G_\alpha).$$

И наконец, учитывая (9), (10) и (22), имеем $\int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho(x)^2 dm_p(x) \geqslant a_p \operatorname{cap} E$, что ввиду произвольности функции $\rho \in \mathscr{F}(\Gamma_E)$ доказывает (6).

Пусть $m_p(D) < +\infty$. Неравенство (7) следует из приведенных рассуждений с учетом следующего замечания. В этом случае множество $\{z \in \mathscr{E}_\alpha \cup \cup \mathscr{E}_\beta : \tau^+(z) - \tau^-(z) = +\infty\}$ имеет $(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$-меру, равную нулю, и, следовательно (см. леммы 1 и 1′), для почти всех $\xi \in A_1$ и $\eta \in B_1$ верно $L_\xi \cup \cup L_\eta \in \Gamma_E^0$.

Теоремы 1 и 1′ доказаны для компактного конденсатора. В общем случае рассмотрим последовательность компактных конденсаторов $E_k = (E_k^+, E_k^-; D)$ с регулярными пластинами E_k^+ и E_k^- такими, что $E_k^+ \subset E_{k+1}^+$, $E_k^- \subset E_{k+1}^-$ $\forall k$ и $\bigcup\limits_k E_k^+ = E^+$, $\bigcup\limits_k E_k^- = E^-$. Тогда

$$M_2(\Gamma_{E_k}) = a_p \operatorname{cap} E_k. \tag{23}$$

Из принятых определений видно, что $\Gamma_{E_k} \subset \Gamma_{E_{k+1}}$ $\forall k$ и $\Gamma_E = \bigcup\limits_k \Gamma_{E_k}$. Пользуясь леммами 8 из [2] и 2.3 из [8], путем предельного перехода в (23) получаем (2). Аналогично убеждаемся в справедливости теоремы 1′.

1. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.— М. : Наука, 1966.— 515 с.
2. *Зорий Н. В.* О существовании зарядов с минимальной гриновой энергией для пространственных конденсаторов.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.52).
3. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta math.— 1957.— 98, N 3-4.— P. 171—219.
4. *Зорий Н. В* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Вопросы анализа и дифференциальной топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 39—47.
5. *Зорий Н. В.* Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 5.— С. 565—573.
6. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. mat.— 1975.— 13, N 1.— P. 131—144.
7. *Kellog O. D.* Foundations of potential theory.— Berlin: Springer, 1929.— 384 p.
8. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Mich. Math. J.— 1969.— 16, N 1.— P. 43—51.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 23.06.88