УДК 517.9

До Конг Хань

Факторизация передаточных функций. I. (+). Регулярная факторизация

В первой части работы обобщается понятие (+).регулярной факторизации на случай n множителей.

Теорема 1. *Факторизация* $\Theta = \Theta_n \Theta_{n-1} \ldots \Theta_1$ (+). *регулярна* $\Leftrightarrow [\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + \Theta_n \Theta_{n-1} \varphi_{n-2} + \ldots + \Theta_n \Theta_{n-1} \ldots \Theta_2 \varphi_1 = 0,\ (\varphi_k, \psi_k) \in X(\Theta_k), \Rightarrow \varphi_k = 0]$, *где* $X(\Theta_k)$ — *простра ıство Надя — Фояша.*

Получен критерий сохранения минимальности при синтезе консервативных систем рассеяния.

В першій частині роботи узагальнюється поняття (+).регулярної факторизації на випадок n співмножників.

Теорема 1. *Факторизація* $\Theta = \Theta_n \Theta_{n-1} \ldots \Theta_1$ (+). *регулярна* $\Leftrightarrow [\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + \Theta_n \Theta_{n-1} \varphi_{n-2} + \ldots + \Theta_n \Theta_{n-1} \ldots \Theta_2 \varphi_1 = 0,\ (\varphi_k, \psi_k) \in X(\Theta_k), \Rightarrow \varphi_k = 0]$, *де* $X(\Theta_k)$ — *простір Надя — Фояша.*

Одержано критерій збереження мінімальності при синтезі консервативних систем розсіяння.

Проблема факторизации играет важную роль в ряде вопросов анализа и приложений. Задачам факторизации посвящена обширная литература [1—5]. Рассмотрим факторизации, оставляющие инвариантными некоторые качественные свойства линейных систем (управляемость, наблюдаемость, минимальность) при соответствующем каскадном соединении. Минимальная факторизация передаточных функций конечномерных линейных систем рассмотрена в [5]. Методы и результаты этого направления исследования трудно распространить на бесконечномерные системы. В [6—8] эта проблема рассматривалась для сжимающих аналитических в единичном круге оператор-функций с помощью понятия $(+)$.регулярной факторизации. Целью настоящей статьи является развитие этих результатов. В первой части понятие $(+)$.регулярной факторизации распространяется на случай n множителей. Результаты и методы, изложенные в этой части, будут использованы во второй части для получения необходимых и достаточных условий минимальности при синтезе пассивных систем рассеяния [8, 9].

Рассмотрим линейную стационарную систему $\alpha = (X, U, V, A, B, C, D)$ с дискретным временем $x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$, $v_n = Cx_n + Du_n$, где X, U, V — сепарабельные гильбертовы пространства, $A \in [X, X]$, $B \in [U, X]$, $C \in [X, V]$, $D \in [U, V]$, где через $[X, Y]$ обозначается совокупность линейных ограниченных операторов из X в Y.

Подпространства $X^y = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} A^n BU$, $X^H = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} A^{*n} C^* V$ называются соответственно управляемым и наблюдаемым, система α называется управляемой (наблюдаемой, минимальной), если $X^y = X$ ($X^H = X$, $X^y = X = X^H$). Функция $\Theta_\alpha(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$ называется передаточной функцией системы α.

Если блочный оператор $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : X \oplus U \to X \oplus V$ является унитарным, то система α называется консервативной системой рассеяния [9]. Простая, т. е. $X^y \vee X^H = X$, консервативная система рассеяния определяется своей передаточной функцией с точностью до унитарной эквивалентности [2, 3]. Передаточная функция произвольной пассивной системы рассеяния принадлежит классу $B(U, V)$ [9] всех аналитических в единичном круге функций $\Theta(z) : U \to V$, $\|\Theta(z)\| \leqslant 1$.

1. $(+)$.Р е г у л я р н а я ф а к т о р и з а ц и я. Пусть функция $\Theta(z) \in B(U_1, U_{n+1})$ представима в виде

$$\Theta(z) = \Theta_n(z)\Theta_{n-1}(z) \ldots \Theta_1(z), \tag{1}$$

где $\Theta_k(z) \in B(U_k, U_{k+1})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда отображение

$$Z^+ : \Delta h \to (\Delta_n \Theta_{n-1}\Theta_{n-2} \ldots \Theta_1 h,\ \Delta_{n-1}\Theta_{n-2}\Theta_{n-3} \ldots \Theta_1 h, \ldots, \Delta_1 h), \tag{2}$$

где $\Delta_k = (I - \Theta_k^* \Theta_k)^{1/2}$, $h \in L_2^+(U_1)$, является изометрическим отображением линеала $\Delta L_2^+(U_1)$ в $\overline{\Delta_n L_2^+(U_n)} \oplus \overline{\Delta_{n-1} L_2^+(U_{n-1})} \oplus \ldots \oplus \overline{\Delta_1 L_2^+(U)}$. Продолжая (2) по непрерывности, получаем изометрическое отображение Z^+: $\overline{\Delta L_2^+(U_1)} \to \overline{\Delta_n L_2^+(U_n)} \oplus \overline{\Delta_{n-1} L_2^+(U_{n-1})} \oplus \ldots \oplus \overline{\Delta_1 L_2^+(U_1)}$.

О п р е д е л е н и е 1. *Факторизацию* (1) *назовем* $(+)$.*регулярной, если порождаемое ею отображение* Z^+ *унитарно, т. е.* $\overline{\{(\Delta_n \Theta_{n-1}\Theta_{n-2} \ldots \Theta_1 h, \ldots, \Delta_1 h) : h \in L_2^+(U_1)\}} = \overline{\Delta_n L_2^+(U_n)} \oplus \ldots \oplus \overline{\Delta_1 L_2^+(U_1)}$.

Л е м м а 1. *Факторизация* (1) *тогда и только тогда* $(+)$.*регулярна, когда из* $\Theta_1^* \Theta_2^* \ldots \Theta_{n-1}^* \Delta_n f_n + \Theta_1^* \Theta_2^* \ldots \Theta_{n-2}^* \Delta_{n-1} f_{n-1} + \ldots + \Delta_1 f_1 \in L_2^-(U_1)$ *при* $f_k \in \overline{\Delta_k L_2^+(U_k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *следует* $f_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Для $\Theta(z) \in B(U_k, U_{k+1})$ рассмотрим модельное пространство Надя—Фояша вида $X(\Theta_k) = [L_2^+(U_{k+1}) \oplus \overline{\Delta_k L_2(U_k)}] \ominus \{(\Theta_k w, \Delta_k w) : w \in L_2^+(U_k)\}$, т. е. $X(\Theta_k)$ состоит из всевозможных пар (φ_k, ψ_k) таких, что

$$\varphi_k \in L_2^+(U_{k+1}), \quad \psi_k \in \overline{\Delta_k L_2(U_k)}, \quad \xi_k \equiv \Theta_k^* \varphi_k + \Delta_k \psi_k \in L_2^-(U_k). \tag{3}$$

Теорема 1. *Для того чтобы факторизация* (1) *была* (+)*.регулярной, необходимо и достаточно, чтобы соотношение*

$$\varphi_n + \Theta_n\varphi_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}\varphi_{n-2} + \ldots + \Theta_n\Theta_{n-1}\ldots\Theta_2\varphi_1 = 0 \qquad (4)$$

при условиях

$$(\varphi_k, \psi_k) \in X(\Theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5)$$

выполнялось лишь для $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть факторизация (1) (+). регулярна и имеют место равенства (4), (5).

Введем в рассмотрение элементы

$$h_k = \varphi_k + \Theta_k\varphi_{k-1} + \Theta_k\Theta_{r-1}\varphi_{k-2} + \ldots + \Theta_k\Theta_{k-1}\ldots\Theta_2\varphi_1, \qquad (6)$$

$$f_k = Pr_{\overline{\Delta_k L_2^+(U_k)}}\psi_k + \Delta_k h_{k-1}, \qquad (7)$$

$$g_k = \Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\ldots\Theta_{n-1}^*\Delta_n f_n + \Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\ldots\Theta_{n-2}^*\Delta_{n-1}f_{n-1} + \ldots$$
$$\ldots + \Theta_k^*\Delta_{k+1}f_{k+1} + \Delta_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8)$$

Условимся, что все элементы с индексами, отличными от $1, 2, \ldots, n$, равны 0.

Приведем рекуррентные соотношения

$$h_k = \varphi_k + \Theta_k h_{k-1}, \qquad (9)$$

$$g_k = \Theta_k^* g_{k+1} + \Delta_k f_k. \qquad (10)$$

Обозначим $\psi_k^+ = Pr_{\overline{\Delta_k L_2^+(U_k)}}\psi_k$, тогда

$$\psi_k = \psi_k^+ + \psi_k^-, \quad \psi_k^- \perp \overline{\Delta_k L_2^+(U_k)}. \qquad (11)$$

Далее по индукции в направлении убывания индексов нетрудно записать следующие формулы:

$$g_k = h_{k-1} + (\xi_k - \Delta_k\psi_k^-) + \Theta_k^*(\xi_{k+1} - \Delta_{k+1}\psi_{k+1}^-) + \ldots$$
$$\ldots + \Theta_k^*\Theta_{k+1}^*\ldots\Theta_{n-1}^*(\xi_n - \Delta_n\psi_n^-), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12)$$

В частности,

$$g_1 = (\xi_1 - \Delta_1\psi_1^-) + \Theta_1^*(\xi_2 - \Delta_2\psi_2^-) + \ldots + \Theta_1^*\Theta_2^*\ldots\Theta_{n-1}^*(\xi_n - \Delta_n\psi_n^-). \qquad (13)$$

Из (11) следует, что $\Delta_k\psi_k^- \in L_2^-(U_k)$, а отсюда с учетом (3)

$$g_1 \in L_2^-(U_1). \qquad (14)$$

В силу (6)—(8), (14) получаем, что элементы f_k удовлетворяют соотношениям леммы 1 и, следовательно,

$$f_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (15)$$

Покажем теперь, что $\varphi_k = 0$. Из (7), (15) имеем

$$0 = \Delta_n f_n = (g_n) = h_{n-1} + (\xi_n - \Delta_n\psi_n^-). \qquad (16)$$

Поскольку $h_{n-1} \in L_2^+(U_n)$, $\xi_n - \Delta_n\psi_n^- \in L_2^-(U_n)$, то последнее равенство дает

$$h_{n-1} = 0, \quad \xi_n - \Delta_n\psi_n^- = 0. \qquad (17)$$

Далее из (10), (12), (15)—(17) $0 = \Delta_{n-1}f_{n-1} = h_{n-2} + (\xi_{n-1} - \Delta_{n-1}\psi_{n-1}^-)$ и по тем же причинам получаем $h_{n-2} = 0$, $\xi_{n-1} - \Delta_{n-1}\psi_{n-1}^- = 0$. Продолжая этот процесс, учитывая (4), в результате имеем $h_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, что вместе с (9) дает $\varphi_k = 0$, $k = 1, 2 \ldots, n$.

Достаточность. Пусть $f_k \in \overline{\Delta_k L_2^+ U_k)}$ такие, что $\Theta_1^* \Theta_2^* \dots \Theta_{n-1}^* \Delta_n f_n + \Theta_1^* \Theta_2^* \dots \Theta_{n-2}^* \Delta_{n-1} f_{n-1} + \dots + \Delta_1 f_1 \in L_2^- (U_1)$. По элементам f_k строим g_k по формуле (8). Далее рекуррентно положим

$$\varphi_1 = Pr_{L_2^+(U_2)} g_2, \quad \varphi_k = Pr_{L_2^+(U_{k+1})} g_{k+1} - (\Theta_k \varphi_{k-1} + \Theta_k \Theta_{k-1} \varphi_{k-2} + \dots$$

$$\dots + \Theta_k \Theta_{k-1} \dots \Theta_2 \varphi_1), \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad \psi_k = f_k - \Delta_k (\varphi_{k-1} + \Theta_{k-1} + \varphi_{k-2} + \Theta_{k-1} \Theta_{k-2} \varphi_{k-3} + \dots + \Theta_{k-1} \Theta_{k-2} \dots \Theta_2 \varphi_1), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно,

$$\varphi_k \in L_2^+ (U_{k+1}), \quad \psi_k \in \overline{\Delta_k L_2^+ (U_k)}. \tag{18}$$

Введем обозначения

$$s_k = \Theta_k \varphi_{k-1} + \Theta_k \Theta_{k-1} \varphi_{k-2} + \dots + \Theta_k \Theta_{k-1} \dots \Theta_2 \varphi_1, \tag{19}$$

$$g_{k+1}^- = Pr_{L_2^-(U_{k+1})} g_{k+1}, \tag{20}$$

что позволяет записать

$$\varphi_k = g_{k+1} - g_{k+1}^- - s_k, \tag{21}$$

$$\psi_k = f_k - \Delta_k (\varphi_{k-1} + s_{k-1}). \tag{22}$$

Учитывая соотношения (10) и (19) — (22), имеем

$$\Theta_k^* \varphi_k + \Delta_k \psi_k = g_k^- - \Theta_k^* g_{k+1}^- \in L_2^- (U_k), \tag{23}$$

что вместе с (18) означает $(\varphi_k, \psi_k) \in X(\Theta_k)$.

С другой стороны, соотношение (21) при $k = n$ дает (4). Следовательно,

$$\varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{24}$$

Из (18), (23), (24) следует $\psi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Отсюда $f_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, что, в силу леммы 1, доказывает теорему.

2. (—).Регулярная факторизация. Аналогично рассматривается отображение $Z^- : \Delta_* h \to (\Delta_{n*} h, \Delta_{n-1*} \Theta_n^* h, \dots, \Delta_{1*} \Theta_2^* \Theta_3^* \dots \Theta_n^* h)$, где $\Delta_* = (I - \Theta\Theta^*)^{1/2}$, $h \in L_2^- (U_{n+1})$. Если после продолжения по непрерывности получим унитарный оператор $Z^- : \overline{\Delta_* L_2^- (U_{n+1})} \to \overline{\Delta_{n*} L_2^- (U_{n+1})} \oplus \overline{\Delta_{n-1*} L_2^- (U_n)} \oplus \dots \oplus \overline{\Delta_{1*} L_2^- (U_2)}$, то факторизацию (1) будем называть (—).регулярной.

Для $\Theta_k (z) \in B (U_k, U_{k+1})$, наряду с $X(\Theta_k)$ рассмотрим модельное пространство $X_* (\Theta_k) = [L_2^- (U_k) \oplus \overline{\Delta_{k*} L_2 (U_{k+1})}] \ominus \{(\Theta_k^* u, \Delta_{k*} u) : u \in L_2^- (U_{k+1})\}$. Нетрудно проверить, что пространство $X_* (\Theta_k)$ можно получить из $X(\Theta_k)$ с помощью следующего унитарного оператора: $W : (\varphi_k, \psi_k) \to (\Theta_k^* \varphi_k + \Delta_k \psi_k, \Delta_{k*} \varphi_k - \Theta_k \psi_k)$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы факторизация* (1) *была* (—).*регулярной, необходимо и достаточно, чтобы соотношение* $\xi_1 + \Theta_1^* \xi_2 + \Theta_1^* \Theta_2^* \xi_3 + \dots + \Theta_1^* \Theta_2^* \dots \Theta_{n-1}^* \xi_n = 0$ *при* $(\xi_k, \eta_k) \in X_* (\Theta_k)$, *что возможно лишь при* $\xi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

3. (±). Регулярная факторизация и минимальность консервативных систем рассеяния. Поскольку простая консервативная система рассеяния определяется своей передаточной функцией с точностью до унитарной эквивалентности, то по заданной передаточной функции $\Theta (z)$ удобно рассмотреть следующую модельную простую консервативную систему рассеяния (см. [2, 3]) $X = X(\Theta)$, $A (\varphi, \psi) = \bar{\zeta} (\varphi (\zeta) - \varphi (0), \psi (\zeta))$, $Bu = \bar{\zeta} ((\Theta (\zeta) - \Theta (0)) u, \Delta (\zeta) u)$, $C (\varphi, \psi) = \varphi (0)$, $D = \Theta (0)$, $|\zeta| = 1$.

Пусть $\Theta_k (z) \in B (U_k, U_{k+1})$ и $\alpha (\Theta_k)$ — соответствующая модельная консервативная система рассеяния.

Лемма 2. *Для каскадного соединения* $\alpha = \alpha(\Theta_n)\alpha(\Theta_{n-1})\ldots\alpha(\theta_1)$ *имеют место следующие формулы:*

$$X \ominus X^y = \{(\varphi_1, \psi_1) \oplus (\varphi_2, \psi_2) \oplus \ldots \oplus (\varphi_n, \psi_n) \in X(\Theta_1) \oplus X(\Theta_2) \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus X(\Theta_n) : \xi_1 + \Theta_1^*\xi_2 + \Theta_1^*\Theta_2^*\xi_3 + \ldots + \Theta_1^*\Theta_2^* \ldots \Theta_{n-1}^*\xi_n = 0\},$$
$$X \ominus X^H = \{(\varphi_1, \psi_1) \oplus (\varphi_2, \psi_2) \oplus \ldots \oplus (\varphi_n, \psi_n) \in X(\Theta_1) \oplus X(\Theta_2) \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus X(\Theta_n) : \varphi_n + \Theta_n\varphi_{n-1} + \Theta_n\Theta_{n-1}\varphi_{n-2} + \ldots + \Theta_n\Theta_{n-1} \ldots \Theta_2\varphi_1 = 0\}$$

(см. доказательство теоремы 8.1 *в* [2]).

Из теоремы 1 и леммы 2 следует теорема.

Теорема 3. *Пусть* α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *—произвольные простые консервативные системы рассеяния с передаточными функциями* $\Theta_k(z)$. *Пусть далее* $\alpha = \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ *и* X^H, X_k^H *— соответствующие наблюдаемые подпространства для* α, α_k. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *факторизация* (1) (+)*.регулярна;* 2) $X^H = X_1^H \oplus X_2^H \oplus \ldots \oplus X_n^H$.

Из теоремы 2 и леммы 2 вытекает теорема.

Теорема 4. *Пусть* α_k, α *— такие же, как и в теореме* 3 *и* X_k^y, X^y *— соответствующие управляемые подпространства. Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *факторизация* (1) (—). *регулярна;* 2) $X^y = X_1^y \oplus X_2^y \oplus \ldots \oplus X_n^y$.

Из теорем 3 и 4 имеем следующий критерий минимальности консервативных систем рассеяния при синтезе.

Теорема 5. *Пусть* α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *— управляемые (соответственно наблюдаемые, минимальные) консервативные системы рассеяния. Для того чтобы система* $\alpha = \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$ *была управляемой (соответственно наблюдаемой, минимальной), необходимо и достаточно, чтобы соответствующая факторизация передаточных функций*

$$\Theta(z) = \Theta_n(z)\,\Theta_{n-1}(z)\ldots\Theta_1(z) \tag{25}$$

была (—).регулярной (соответственно (+).регулярной, одновременно (+).регулярной и (—).регулярной).

Следствие. *Если факторизация* (1) (+)*.регулярна (соответственно* (—)*.регулярна), то* (+)*.регулярна (соответственно* (—)*.регулярна) также следующая «усеченная» факторизация:* $\Phi(z) = \Theta_i(z)\,\Theta_{i-1}(z)\ldots\Theta_s(z)$, $n \geqslant 1 > s \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть α_k — простые консервативные системы рассеяния с передаточными функциями $\Theta_k(z)$ и $\alpha = \alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1$, $\beta = \alpha_i\alpha_{i-1}\ldots\alpha_s$. Поскольку $\alpha = \alpha_n \ldots \alpha_{i+1}\beta\alpha_{s-1}\ldots\alpha_1$, то всегда имеем

$$X_\alpha^H \subset X_{\alpha_n}^H \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_{i+1}}^H \oplus X_\beta^H \oplus X_{\alpha_{s-1}}^H \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_1}^H \subset X_{\alpha_n}^H \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus X_{\alpha_{i+1}}^H \oplus X_{\alpha_i}^H \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_s}^H \oplus X_{\alpha_{s-1}}^H \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_1}^H.$$

В силу (+).регулярности факторизации (1) эти вложения являются в действительности равенствами. Отсюда $X_\beta^H = X_{\alpha_i}^H \oplus X_{\alpha_{i-1}}^H \oplus \ldots \oplus X_{\alpha_s}^H$ что, по теореме 3, означает (+). регулярность факторизации (25).

1. *Бродский М. С., Лившиц М. С.* Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // Успехи мат. наук.— 1958.— **13**, вып. 1.— С. 3—85.
2. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции // Успехи мат. наук.— 1978.— **33**, вып. 4.— С. 146—168.
3. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Мир, 1970.— 431 с.
4. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук.— 1986.— **41**, вып. 1.— С. 4—55.
5. *Bart H., Gohberg I., Kaashoek M. A.* Minimal factorization of matrix and operator functions.— Birkhauser: Verlag, 1979.— 227 c.
6. *До Конг Хань.* О регулярной факторизации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 12. — С. 14—16.

7. *До Конг Хань.* О вполне неунитарности сжатий // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1979.— Вып. 31.— С. 49—55.
8. *До Конг Хань.* К теории факторизации передаточных функций пассивных систем рассеяния // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1989.— № 10.— С. 9—11.
9. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20**, № 2.— С. 211—228.

Вьетнам

Получено 17.03.89