УДК 517

Ю. С. САМОЙЛЕНКО, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев),
В. С. ШУЛЬМАН, канд. физ.-мат. наук (Вологод. политех. ин-т)

О представлениях соотношений вида $i\,[A, B] = f(A) + g(B)$

Доказано, что все нетривиальные представления квадратичного соотношения $i\,[A, B] = f(A) + g(B)$ самосопряженными операторами A, B неограничены, если f и g неотрицательны; при любых f и g это соотношение не имеет нетривиальных конечномерных представлений и фактор-представлений типа II_{I}, но может иметь бесконечномерные неприводимые представления ограниченными операторами.

Доведено, що всі нетривіальні зображення квадратичного співвідношення і $[A, B] = f(A) + g(B)$ самоспряженими операторами необмежені, якщо функції f і g — невід'ємні; при довільних f і g це співвідношення не має нетривіальних скінченновимірних зображень і фактор-зображень типу II_{I}, але може мати нескінченновимірні незвідні зображення обмеженими операторами.

В квантовой физике широко известен феномен неограниченности операторов представления канонических коммутационных соотношений. В ряде работ (см., например, [1—3]) ставится задача изучения представлений других квадратичных соотношений. В работе [3], в частности, высказывалось предположение (доказанное в [4]) об отсутствии нетривиальных представлений соотношения $i\,[A, B] = \alpha\,(A^2 + B^2)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, ограниченными самосопряженными операторами. Здесь будет доказан более общий результат: все нетривиальные представления соотношения

$$i[A, B] = f(A) + g(B) \tag{1}$$

неограничены, если f и g — неотрицательные борелевские функции.

Мы докажем также, что при любых f, g соотношение (1) не имеет нетривиальных конечномерных представлений и фактор-представлений типа II_1, а если хотя бы одна из функций f, g непрерывна в точке 0, то (1) не имеет нетривиальных представлений компактными операторами.

В дальнейшем H — гильбертово пространство произвольной (возможно, конечной) размерности, $\mathcal{L}(H)$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов в H, $K(H)$ — идеал компактных операторов, $\mathfrak{S}^1(H)$ и $\mathfrak{S}^2(H)$ — соответственно идеалы ядерных операторов и операторов Гильберта—Шмидта.

Символом $\sigma(T)$ обозначается спектр оператора $T \in \mathcal{L}(H)$, как обычно T называется квазинильпотентным, если $\sigma(T) = \{0\}$.

1. Отсутствие ограниченных представлений коммутационного соотношения Гейзенберга

$$i[A, B] = I \tag{2}$$

является следствием значительно более общего утверждения (теорема Клейнеке—Широкова, см. [5]), устанавливающего импликацию

$$[A, [A, B]] = 0 \Rightarrow \sigma([A, B]) = \{0\} \tag{3}$$

для любых A, B из $\mathcal{L}(H)$. Одновременно непредставимость (2) ограниченными самосопряженными операторами — следствие импликации

$$[A^*, [A, B]] = 0 \Rightarrow [A, B] = 0, \tag{4}$$

доказанной для широкого класса операторов A, включающего все субнормальные операторы [6] и операторы с ядерной мнимой компонентой [7] (в настоящее время неизвестно, справедлива ли (4) без всяких ограничений — обсуждение этой проблемы имеется в [8]). Полезность (4) можно проиллюстрировать также следующим простым доказательством известной теоремы Фуглида [5] об эквивалентности условий $[A, B] = 0$ и $[A^*, B] = 0$ для нормального оператора A: если $[A, B] = 0$, то $[A^*, [A, B]] = 0$, $[[A^*, A], B] + [A, [A^*, B]] = 0$, $[A, [A^*, B]] = 0$, и в силу (4) $[A^*, B] = 0$.

В этом и двух последующих разделах мы обсудим некоторые аналоги для семейств операторов $\{A_j\}$ и $\{B_k\}$ импликаций (3), (4).

Теорема 1. *Пусть* $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_j\}_{j=1}^n$ — *операторы из* $\mathcal{L}(H)$ *и пусть*

$$\sum_{j=1}^n [A_j, B_j] = T + S, \tag{5}$$

где $[T, A_j^*] = [S, B_j^*] = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. *Если исполняется одно из следующих условий*:

а) $A_j \in \mathfrak{S}^1(H)$, $1 \leqslant j \leqslant n$;
б) $B_j \in \mathfrak{S}^1(H)$, $1 \leqslant j \leqslant n$;
в) $T \in \mathfrak{S}^1(H)$, $S \in \mathfrak{S}^1(H)$;
г) $A_j \in \mathfrak{S}^2(H)$, $B_j \in \mathfrak{S}^2(H)$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

то $\sum\limits_{j=1}^n [A_j, B_j] = 0$.

Доказательство. Из условия следует, что оператор $R = \sum\limits_{j=1}^n [A_j, B_j]$ ядерный. Далее, $R^*R = T^*R + S^*R = \sum\limits_{j=1}^n T^*[A_j, B_j] + \sum\limits_{j=1}^n S^*[A_j, B_j] = \sum\limits_{j=1}^n ([A_j, T^*B_j] + [S^*A_j, B_j])$. Любое из условий а) — г) обеспечивает ядерность всех коммутаторов и равенство нулю их следа (см. теорему 8.2 из [9]). Следовательно, $\operatorname{tr} R^*R = 0$, $R = 0$.

При $S = 0$ доказанное утверждение принимает следующий вид:

Следствие 1. *Если ядерный оператор* $T = \sum_{j=1}^{n} [A_j, B_j]$ *перестановочен со всеми* A_j^*, *то* $T = 0$.

Теорема 2. *Если ядерный оператор* $T = \sum_{j=1}^{n} [A_j, B_j]$ *перестановочен со всеми* A_j, *то он квазинильпотентен.*

Доказательство. Из теоремы единственности для проблемы моментов следует, что если $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$, то $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = 0$. Поэтому достаточно доказать, что $\operatorname{tr} T^m = 0$. Но это сразу следует из равенства

$$T^m = T^{m-1} \sum_{j=1}^{n} [A_j, B_j] = \sum_{j=1}^{n} [A_j, T^{m-1} B_j].$$

Известная характеризация коммутаторов в $\mathcal{L}(H)$ [5] позволяет представить единичный оператор в виде суммы двух коммутаторов. Это показывает, что во всех предыдущих утверждениях нельзя (при $n \geqslant 2$) полностью отказаться от условий ядерности.

Следующий пример, построенный В. С. Губой, показывает, что обобщение теоремы Клейнеке—Широкова, «параллельное» теореме 1 в том же смысле, в каком теорема 2 «параллельна» следствию 1, несправедливо уже при $\dim H = 3$: пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 6 & -4 & 4 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -6 & 16 & 4 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = B^2/4,$$

тогда $[A, B] = T + S$, $[T, A] = [S, B] = 0$, но $\sigma([A, B]) \neq \{0\}$.

2. Для нормальных операторов условие ядерности (в теореме 1) удается заменить условием компактности. Разумеется, ввиду теоремы Фуглида — Патнема, вместо $[A_j^*, T] = 0$ здесь можно писать $[A_j, T] = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\{A_j\}_{j=1}^n$, $\{B_j\}_{j=1}^n$ — *коммутативные семейства нормальных операторов и пусть* $\sum_{j=1}^{n} [A_j, B_j] = T + S$, *где* $[T, A_j] = [S, B_j] = 0$. *Если* $T \in K(H)$, $S \in K(H)$, *то* $T + S = 0$.

Доказательство. Пусть $A_j = M_j + iN_j$, $B_j = U_j + iV_j$, $T = T_1 + iT_2$, $S = S_1 + iS_2$, где M_j, N_j, U_j, V_j, T_1, T_2, S_1, S_2 — эрмитовы. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n} [M_j, V_j] + \sum_{j=1}^{n} [N_j, U_j] = -i(T_1 + S_1),$$

$$\sum_{j=1}^{n} [M_j, U_j] - \sum_{j=1}^{n} [N_j, V_j] = i(T_2 + S_2).$$

Из теоремы Фуглида—Патнема следует, что T_1 и T_2 перестановочны с M_j, N_j, а S_1, S_2 — с V_j, U_j. Это означает, что с самого начала можно считать операторы A_j, B_j эрмитовыми, а T и S антиэрмитовыми. Далее, компактность операторов T, S позволяет свести рассмотрение к случаю, когда набор операторов $\{(A_j\}_{j=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^n, T, S)$ неприводим, т. е. не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

Пусть $\|T\| \geqslant \|S\|$. Выберем собственное число μ оператора T такое, что $|\mu| = \|T\|$ и обозначим через E соответствующее собственное подпространство. Ясно, что E инвариантно относительно всех A_j и конечномерно. Если $e \in E$ — собственный вектор семейства A_j ($A_j e = \lambda_j e$, $\lambda_j \in \mathbb{R}^1$, $1 \leqslant j \leqslant n$), то применяя обе части (2) к e, получаем $\sum_{j=1}^{n} (A_j - \lambda_j) B_j e = (\mu + S) e$. Поэтому $((\mu + S) e, e) = \sum_{j=1}^{n} ((A_j - \lambda_j) B_j e, e) = \sum_{j=1}^{n} (B_j e, (A_j - \lambda_j) e) = 0$, т. е. $(Se, e) = -\mu (e, e)$, откуда $\|S\| \geqslant |\mu|$. Отсюда, учитывая неравенство $\|T\| \geqslant \|S\|$, получаем $|\mu| = \|S\|$, так что из $(Se, e) = -\mu (e, e)$ следует $Se = -\mu e$. Так как E порождено собственными векторами семейства $\{A_j\}_{j=1}^{n}$, то $Sx = -\mu x$ для всех $x \in E$. Таким образом, μ — собственное подпространство оператора T содержит $(-\mu)$-собственное подпространство оператора S. Меняя T и S местами, заключаем, что эти подпространства совпадают. Таким образом, E инвариантно для T, S, A_j и B_j, а следовательно, $E = H$ и для любого $x \in H$ $(T + S) x = \mu x - \mu x = 0$, т. е. $T + S = 0$.

При $S = 0$ достаточно считать нормальным оператором только T.

Теорема 4. *Пусть* $\sum_{j=1}^{n} [A_j, B_j] = T$, *где* T — *компактный нормальный оператор, перестановочный со всеми* A_j. *Тогда* $T = 0$.

Доказательство. Пусть P — проектор на собственное подпространство E оператора T, отвечающее собственному значению λ. Тогда $\lambda P = PTP = \sum_{j=1}^{n} [A_j, PB_jP] = \sum_{j=1}^{n} [PA_jP, PB_jP]$ — сумма коммутаторов операторов конечного ранга. Отсюда $\operatorname{tr} \lambda P = 0$, $\lambda = 0$. Это означает, что $T = 0$.

3. Напомним, что коммутантом семейства $\mathfrak{R} \subset \mathscr{L}(H)$ называется множество $\mathfrak{R}'$ всех операторов, перестановочных со всеми операторами из $\mathfrak{R}$. Множество $\mathfrak{R}'' = (\mathfrak{R}')'$ называется бикоммутантом семейства $\mathfrak{R}$.

Теорема 5. *Пусть оператор* $T \geqslant 0$ *принадлежит бикоммутанту эрмитова оператора* A. *Если* $T \leqslant [A, X]$ *при некотором* $X \in \mathscr{L}(H)$, *то* $T = 0$.

Доказательство. Предположим вначале, что A имеет конечную кратность (т. е. существует конечный набор векторов $x_1, \ldots, x_n$, для которого З. Л. О. $\{A^k x_j : j \leqslant n,\ k \in \mathbb{N}\}$ совпадает с H. Так как $[A, X] \geqslant 0$, то по следствию 2 и предложению 2 работы [7] оператор $[A, X]$ ядерный. Следовательно, $T \in \mathfrak{S}^1(H)$. Так как $T^2 = T^{1/2} T T^{1/2} \leqslant T^{1/2} [A, X] T^{1/2} = [A, T^{1/2} X T^{1/2}]$ и $T^{1/2} X T^{1/2} \in \mathfrak{S}^1(H)$, то $\operatorname{tr} T^2 = 0$, $T = 0$. Заметим, что мы пока использовали лишь перестановочность T с A (а не более сильное условие $T \in (A)''$).

Пусть $x \in H$, P — проектор на замкнутую линейную оболочку множества $\{A^n x\}_{n=0}^{\infty}$. Так как $P \in (A)'$, $T \in (A)''$, то $PTP \in (PAP)'$. Поскольку $0 \leqslant PTP \leqslant P [A, X] P = [PAP, PXP]$ и PTP имеет кратность 1, можно заключить, что $PTP = 0$, $(Tx, x) = 0$ и $T = 0$ ввиду произвольности x.

Следствие 2. *Если* A, B — *эрмитовы операторы*, $i [A, B] = T + S$, *где* $T \geqslant 0$, $S \geqslant 0$, $T \in (A)''$, $S \in (B)''$, *то* $[A, B] = 0$.

Доказательство. Так как $T \leqslant i [A, B] = [A, iB]$, $S \leqslant i [A, B] = [iA, B]$, то по теореме 5 $T = S = 0$. Следовательно, $[A, B] = 0$.

4. Пусть f, g — ограниченные борелевские функции, определенные на подмножествах F, G вещественной прямой. Представлением соотношения (1) называется пара эрмитовых операторов A, $B \in \mathscr{L}(H)$, спектры которых содержатся в F и G соответственно и которые удовлетворяют условию (1). Здесь мы рассматриваем лишь представления ограниченными операторами (в более общей ситуации приходится уточнять смысл левой части равенства (1)).

Будем называть представление тривиальным, если $[A, B] = 0$. Тривиальные представления легко описываются: неприводимые представления одномерны и соответствуют точкам множества $\{(x, y) \in F \times G : f(x) + g(y) = 0\}$, произвольные — их «прямые интегралы».

Теорема 6. *Соотношение* (1) *не имеет нетривиальных конечномерных представлений и фактор-представлений типа* II_1.

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из теоремы 1; для доказательства второго достаточно заметить, что в теореме 1 условие ядерности можно заменить условием конечности следовой нормы в произвольной полуконечной W^*-алгебре.

Теорема 7. *Если функция* f *непрерывна в точке* 0, *то в любом нетривиальном представлении соотношения* (1) *оператор* A *не компактный.*

Доказательство. Пусть $A \in K(H)$ и выполнено (1). Не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) = 0$ (иначе заменим f на $f - f(0)$, g — на $g + f(0)$). Следовательно, $f(A) \in K(H)$ и, поскольку $[A, B] \in K(H)$, также $g(B) \in K(H)$. Применяя теорему 3, заключаем, что $[A, B] = 0$, т. е. представление тривиально.

Условимся называть представление соотношения (1) CCR-представлением, если C^*-алгебра, порожденная операторами A, B, принадлежит классу CCR (т. е. любое неприводимое представление отображает ее в $K(H)$).

Следствие 3. *Если хотя бы одна из функций* f, g *непрерывна в точке* 0, *то соотношение* (1) *не имеет нетривиальных* CCR-*представлений.*

Доказательство. Если A, B — CCR-представление соотношения (1), то для любого неприводимого представления π C^*-алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной операторами A, B, операторы $\pi(A)$, $\pi(B)$ определяют представление соотношения (1). Так как $\pi(A) \in K(H)$, то в силу теоремы 7 $[\pi(A), \pi(B)] = 0$, $\pi([A, B]) = 0$ и $[A, B] = 0$.

Следующий пример показывает, что при непрерывных f, g соотношение (1) может иметь нетривиальные GCR-представления (т. е. такие, что образ соответствующей C^*-алгебры при любом неприводимом представлении содержит $K(H)$).

Пример [4]. Соотношение

$$i[A, B] = \alpha(A^2 + B^2) + I$$

при $\alpha < 0$ имеет единственное неприводимое бесконечномерное представление ограниченными операторами.

Теорема 8. *Если функции* f, g *неотрицательны, то соотношение* (1) *не имеет нетривиальных представлений ограниченными операторами.*

Доказательство. Пусть A, B — какое-либо представление соотношений (1). Так как $f(A) \in (A)''$, $g(B) \in (B)''$, то, применяя следствие 2 к операторам $T = f(A)$, $S = g(B)$, получаем $[A, B] = 0$.

1. *Склянин Е. К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга — Бакстера. Представления квантовой алгебры // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— 17, вып. 4.— С. 34—48.
2. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // Докл. АН СССР.— 1983.— 268, № 2.— С. 285—287.
3. *Вершик А. М.* Алгебры с квадратичными соотношениями // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 32—47.
4. *Островский В. Л., Самойленко Ю. С.* Представления *-алгебр с двумя образующими и полиномиальными соотношениями // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1989.— 172.— С. 121—129.
5. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах.— М. : Мир, 1970.— 352 с.
6. *Yang Ho.* Commutants and derivation ranges // Tohoku Math. J.— 1975.— 27.— P. 509—514.
7. *Шульман В. С.* Об операторах умножения и следах коммутаторов // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР.— 1984.— 135.— С. 182—194.
8. *Williams J.* Derivation ranges open problems // Top. Modern Oper. Theory. 5 Int. Conf. Oper. Theory, Timosoara and Herculane, June 2—12, 1980.— Basel et al., 1981.— P. 319—328.
9. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.

Получено 07.06.90