УДК 517.5

В. Л. ГРОНА, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

О равномерной сходимости сферических сумм Фурье дифференцируемых функций

Найдены асимптотические равенства для точных верхних граней уклонений в равномерной метрике сферических сумм кратного тригонометрического ряда Фурье на классах функций с ограниченной в среднем производной Лиувилля.

Знайдені асимптотичні рівності для точних верхніх граней в рівномірній метриці сферичних сум кратного тригонометричного ряду Фур'є на класах функцій з обмеженою у середньому похідною Ліувілля.

Пусть E_N — N-мерное евклидово пространство с элементами $x=(x_1, \ldots, x_N)$, Z_N — целочисленная решетка в E_N, $xy = x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N$, $|x| = \sqrt{xx}$, $Q_N = [-\pi, \pi]^N$. Пусть, далее, $L_p(Q_N)$, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной суммируемых с p-й степенью модуля на Q_N функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_{Q_N} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $L_\infty(Q_N)$—пространство существенно ограниченных периодических функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{vrai}\sup |f(x)|$, $C(Q_N)$ — множество непрерывных функций из $L_\infty(Q_N)$,

$$\sum_{m \in Z_N} \hat{f}(m) e^{imx}, \hat{f}(m) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{Q_N} f(u) e^{-imu} du$$

— ряд Фурье функции $f \in L_1(Q_N)$.

Обозначим через $L_p^r(Q_N)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, класс 2π-периодических по каждой переменной функций f, представимых в виде

$$f(x) = a_0 + (2\pi)^{-N} \int\limits_{Q_N} \varphi(x-u) \sum_{|m| \neq 0} |m|^{-r} e^{imu} du, \tag{1}$$

где $r > 0$, $\varphi \in L_p(Q_N)$, $\int\limits_{Q_N} \varphi(x)\, dx = 0$. Будем называть этот класс периодическим классом Лиувилля [1].

При $r = 2k$ класс $L_p^r(Q_N)$ совпадает с классом 2π-периодических по каждой переменной функций, у которых существует в смысле Соболева k-я степень оператора Лапласа, принадлежащая $L_p(Q_N)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Это вытекает из того, что коэффициенты Фурье функций f и φ удовлетворяют равенству $\hat{\varphi}(m) = |m|^r \hat{f}(m)$ [2, с. 276]. В связи с этим обозначаем $\varphi = (-\Delta)^{r/2} f$.

При $r > N$ функция $\sum\limits_{|m| \neq 0} |m|^{-r} e^{imx}$ непрерывна, а при $r \leqslant N$ неограничена только в окрестности начала координат, и (см. [2, с. 286])

$$\sum_{|m| \neq 0} |m|^{-r} e^{imx} = \begin{cases} O(|x|)^{r-N}, & r < N, \\ O(\ln|x|), & r = N, \quad |x| \to 0. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что $\sum\limits_{|m| \neq 0} |m|^{-r} e^{imx} \in L_q(Q_N)$ при $r > N/p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Следовательно, $L_p^r(Q_N) \subset C(Q_N)$ при $r > N/p$. При $r \leqslant N/p$ включение $L_p^r(Q_N) \subset C(Q_N)$ уже не имеет места [3, с. 140].

Рассмотрим сферические средние Бохнера — Риса порядка $\delta \geqslant 0$:

$$S_R^\delta(f; x) = \sum_{|m| < R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta \hat{f}(m) e^{imx} = \int\limits_{Q_N} f(x-u) D_R^\delta(u)\, du,$$

где $D_R^\delta = (2\pi)^{-N} \sum\limits_{|m|<R} \left(1 - \frac{|m|^2}{R^2}\right)^\delta e^{imu}$ — ядра этих средних. При $\delta = 0$ получаем сферические суммы Фурье $S_R^0(f; x)$.

Условия равномерной сходимости сферических средних Бохнера — Риса порядка не выше критического $(0 \leqslant \delta \leqslant (N-1)/2)$ изучал В. А. Ильин [4] (см. также [5, 6]).

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $R \to \infty$ величины

$$\varepsilon_R = \sup_{\|(-\Delta)^{r/2} f\|_p \leqslant 1} \| f - S_R^0(f; x) \|_C. \tag{3}$$

Теорема 1. *При $r > N/p$, $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, для величины* (3) *справедливо следующее асимптотическое равенство при $R \to \infty$:*

$$\varepsilon_R = \begin{cases} R^{-r} \| D_R^0 \|_q + \gamma_R^{(1)}, & \frac{2N}{N-1} \leqslant p \leqslant \infty; \\ \| \tau_r \|_{L_q(E_N)} R^{N/p-r} + \gamma_R^{(2)}, & 1 \leqslant p < \frac{2N}{N-1}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\tau_r(x) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{|u|>1} |u|^{-r} e^{iux} du, \quad r > \frac{N-1}{2}. \tag{5}$$

При этом для величины $\| D_R^0 \|_q$ справедливы следующие соотношения:

$$BR^{\frac{N-1}{2}} \leqslant \| D_R^0 \|_q \leqslant AR^{\frac{N-1}{2}}, \quad p > \frac{2N}{N-1}. \tag{6}$$

Здесь A и B — некоторые положительные постоянные, зависящие от p и N.

$$\begin{gathered} \| D_R^0 \|_q = C_N R^{\frac{N-1}{2}} \ln^{\frac{N+1}{2N}} R + O\left(R^{\frac{N-1}{2}}\right), \quad R \to \infty, \\ p = \frac{2N}{N-1}, \quad C_N = 4(2\pi)^{-(N+2)/2} \left(\frac{4\pi^{N/2-1}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^q x dx \right)^{1/q}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для остаточных членов $\gamma_R^{(1)}$ и $\gamma_R^{(2)}$ справедливы следующие оценки:

$$|\gamma_R^{(1)}| \leqslant \begin{cases} \frac{K}{r - N/p} R^{N/p-r}, & (N-3)/2 < N/p < (N-1)/2; \\ KR^{(N-3)/2-r} \left(\ln^{(N+3)/(2N)} R + \frac{1}{r - N/p} \right), & N/p = (N-3)/2; \\ KR^{-r} \left(R^{(N-3)/2} + \frac{R^{N/p}}{r - N/p} \right), & 0 < N/p < (N-3)/2, \end{cases} \tag{8}$$

$$|\gamma_R^{(2)}| \leqslant KR^{\varkappa - r}, \quad \varkappa = \max\left\{ \frac{N-1}{2}, \frac{N-1}{p} \right\}. \tag{9}$$

Постоянная K зависит от r, N и p, причем она ограничена при $r \to N/p$.

При $p = \infty$ эта теорема доказана в работе [7].

Из утверждения теоремы вытекают следующие порядковые равенства:

$$\varepsilon_R \asymp \begin{cases} R^{(N-1)/2-r}, & 2N/(N-1) < p \leqslant \infty; \\ R^{(N-1)/2-r}, \ln^{(N+1)/(2N)} R, & p = 2N/(N-1); \\ R^{N/p-r}, & 1 \leqslant p < 2N/(N-1), \quad R \to \infty. \end{cases} \tag{10}$$

Аналогичные порядковые оценки сверху для уклонений спектральных разложений, соответствующих оператору Лапласа, получены в [8] для функций из классов Соболева W_p^l при определенных соотношениях между p и l.

Для доказательства теоремы используем следующее утверждение, доказанное в [7]:

если $f \in L_1^r(Q_N)$, то почти всюду на Q_N

$$f(x) - S_R^0(f; x) = -R^{-r}\left[\sum_{l=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \beta_l S_R^l(\varphi; x) - T_R(\varphi; x)\right], \tag{11}$$

где $\beta_0 = 1$, $\beta_{l+1} = \dfrac{r+2l}{2l+2}\beta_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\varphi = (-\Delta)^{r/2} f$,

$$T_R(\varphi; x) = \int_{E_N} \varphi(x-u)\, g_r(Ru)\, dRu, \tag{12}$$

$$g_r(u) = \tau_r(u) + (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \beta_l 2^l l!\, |u|^{-\frac{N}{2}-l} J_{\frac{N}{2}+l}(|u|). \tag{13}$$

Здесь $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода порядка ν, $\tau_r(u)$ — функция, задающаяся при $r > (N-1)/2$ равенством (5), а при $0 < r \leqslant (N-1)/2$

$$\tau_r(u) = (-\Delta)^k \tau_{r+2k}(u), \quad k = \left[\frac{N-1-2r}{4}\right] + 1. \tag{14}$$

Лемма 1. *Если $r > N/p$, то равенство* (11) *справедливо всюду на Q_N.*

Доказательство. Достаточно показать, что в равенстве (11) слева и справа стоят непрерывные функции. Функция $f(x)$ непрерывна, поскольку $L_p^r(Q_N) \subset C(Q_N)$ при $r > N/p$. Средние Бохнера — Риса также непрерывны. Осталось доказать непрерывность $T_R(\varphi; x)$.

В работе [7] показано, что $g_r(u)$ — радиальная функция, неограниченная, быть может, только в окрестности начала координат, где она имеет такое же асимптотическое поведение, как и функция $\tau_r(u)$:

$$g_r(u) = \begin{cases} O(|u|^{r-N}), & 0 < r < N; \\ O(\ln|u|), & r = N; \\ O(1), & r > N, \quad |u| \to 0. \end{cases} \tag{15}$$

Кроме того,

$$g_r(u) = O\left(|u|^{-N-\frac{1}{2}}\right), \quad |u| \to \infty. \tag{16}$$

Отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{|m|\neq 0} g(R(u+2\pi m))$ сходится абсолютно и равномерно на Q_N, причём для всех $u \in Q_N$ справедлива оценка

$$\sum_{|m|\neq 0} g(R(u+2\pi m)) \leqslant CR^{-N-\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Следовательно, равенство (12) можно переписать в виде

$$T_R(\varphi; x) = \int_{Q_N} \varphi(x-u)\, \psi_R(u)\, du, \tag{18}$$

где

$$\psi_R(u) = R^N g_r(Ru) + R^N \sum_{|m|\neq 0} g_r(R(u+2\pi m)). \tag{19}$$

Учитывая (15), видим, что при $r>N/p$ функция $|g_r(Ru)|^q$ суммируема на Q_N; $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Следовательно, свертка $\varphi * \psi_R$ — непрерывная функция. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для ядер $D_R^l(u)$ известна следующая асимптотика [9, 10]:

$$D_R^l(u)=j_R^l(u)+h_R^l(u), \quad j_R^l(u)=C_{N,l}R^N|Ru|^{-\frac{N}{2}-l}J_{\frac{N}{2}+l}(|Ru|), \tag{20}$$

где $C_{N,l}=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}2^l\Gamma(l+1)$, $l\geqslant 0$,

$$\|h_R^l\|_q\leqslant\begin{cases}CR^{\frac{N-1}{2}-l}, & 1\leqslant q\leqslant 2;\\ CR^{\frac{N-1}{p}-l}, & 2\leqslant q\leqslant\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{cases} \tag{21}$$

Рассмотрим сначала случай $1\leqslant p<\frac{2N}{N-1}$. С учетом равенств (13) и (18) — (20) перепишем (11) следующим образом:

$$f(x)-S_R^0(f;x)=-R^{-r}\Big(\int_{Q_N}\varphi(x-u)R^N\tau_r(Ru)\,du+\int_{Q_N}\varphi(x-u)\times$$

$$\times\Big[\sum_{l=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\beta_l h_R^l(u)-R^N\sum_{|m|\neq 0}g_r(R(u+2\pi m))\Big]du\Big)=I^{(1)}+I^{(2)}. \tag{22}$$

Принимая во внимание асимптотику функции Бесселя [11, с. 51]

$$J_\nu(s)=\begin{cases}O(s^\nu), & s\to 0;\\ \sqrt{\frac{2}{\pi s}}\cos\left(s-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(s^{-3/2}), & s\to\infty,\end{cases} \tag{23}$$

видим, что $\tau_r(u)=O(|u|^{-\frac{N+1}{2}})$ при $|u|\to\infty$. При $|u|\to 0$ асимптотическое поведение $\tau_r(u)$ такое же, как и $g_r(u)$ (см. (15)).

Следовательно, при $1\leqslant p<2N/(N-1)$ и $r>N/p$

$$\sup_{\|\varphi\|_p\leqslant 1}\|I^{(1)}\|_C=R^{-r}\Big(\int_{Q_N}|R^N\tau_r(Ru)|^q du\Big)^{1/q}=R^{N/p-r}\|\tau_r\|_{L_q(E_N)}-$$

$$-O(R^{\frac{N}{p}-r-\frac{N+1}{2}q+N}), \quad R\to\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{24}$$

Отметим, что при $1\leqslant p<\frac{2N}{N-1}$ будет $-\frac{N+1}{2}q+N<0$, $\frac{N}{p}-$ $-\frac{N+1}{2}q+N<\frac{N-1}{2}$ и $\frac{N}{p}>\frac{N-1}{2}$. Из равенств (17) и (21) следует, что при $1\leqslant p\leqslant\frac{2N}{N-1}$

$$\Big\|\sum_{l=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\beta_l h_R^l(u)-R^N\sum_{|m|\neq 0}g_r(R(u+2\pi m))\Big\|_q=O(R^\varkappa),$$

где $\varkappa=\max\left\{\frac{N-1}{2},\frac{N-1}{p}\right\}$.

Следовательно, $\| I^{(2)} \|_C \leqslant KR^{\varkappa - r}$ при $1 \leqslant p \leqslant 2N/(N-1)$. Эта оценка вместе с (24) доказывает справедливость равенства (4) при $1 \leqslant p < 2N/(N-1)$ и оценку (9) для остаточного члена.

Пусть теперь $p = \dfrac{2N}{N-1}$. В этом случае $\| \tau_r(u) \|_{L_q(E_N)} = \infty$. Перепишем формулу для $I^{(1)}$ следующим образом:

$$I^{(1)} = -R^{-r} \int_{Q_N} \varphi(x-u) \left[j_R^0(u) + \sum_{l=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \beta_l j_R^l(u) - R^N g_r(Ru) \right] du.$$

При любом $p \geqslant 1$, $r > N/p$ (см. (15) (16))

$$\| R^N g_r(Ru) \|_q \leqslant \| R^N g_r(Ru) \|_{L_q(E_N)} = R^{N/p} \| g_r(u) \|_{L_q(E_N)} \leqslant \frac{CR^{N/p}}{r - N/p}. \quad (25)$$

При $p = \dfrac{2N}{N-1}$, $\| R^N g_r(Ru) \|_q \leqslant \dfrac{CR^{(N-1)/2}}{r - N/q}$. Учитывая поведение $J_\nu(s)$ при $s \to \infty$ и $s \to 0$ (см. (22)), аналогично получаем $\left\| \sum_{l=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \beta_l j_R^l \right\|_q \leqslant$ $\leqslant CR^{(N-1)/2}$ при $p = 2N/(N-1)$. Далее

$$\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} \left\| \int_{Q_N} \varphi(x-u) j_R^0(u)\, du \right\|_C = \| j_R^0 \|_q,$$

$$\| j_R^0 \|_q = \Bigl(\int_{v_R} | j_R^0(u) |^q du + \int_{v_1 \setminus v_R} | j_R^0(u) |^q du + \int_{Q_N - v_1} | j_R^0(u) |^q du \Bigr)^{1/q}.$$

Здесь v_R — шар, $|u| < \dfrac{1}{R}$.

Принимая во внимание (22), видим, что при любом $p \geqslant 1$

$$\int_{|u| < \frac{1}{R}} | j_R^0(u) |^q du = C_{N,l} R^{N(q-1)} \int_{|u|<1} | u^{-\frac{N}{2}} J_{\frac{N}{2}}(u) |^q du = O(R^{N(q-1)}), \quad (26)$$

$$\int_{|u|>1,\, u \in Q_N} | j_R^0(u) |^q du = O(R^{\frac{N-1}{2} q}), \quad R \to \infty. \quad (27)$$

Используя формулу

$$\int_{a<|u|<b} \psi(|u|)\, du = \sigma_N \int_a^b \psi(s) s^{N-1} ds$$

$\left(\sigma_N \text{ — объем единичной сферы в } E_N,\ \sigma_N = \dfrac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} \right)$, видим, что при $p = \dfrac{2N}{N-1}$

$$\int_{\frac{1}{R} < |u| < 1} | j_R^0(u) |^q du = R^{N(q-1)} \Biggl(\sigma_N \int_1^R \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^q \times$$

$$\times \frac{\left| \cos\left(s - \frac{\pi(N+1)}{4} \right) \right|^q}{s} ds + O(1) \Biggr), \quad q = q_N = \frac{2N}{N+1}. \quad (28)$$

Представляя $\left|\cos\left(s-\frac{\pi(N+1)}{4}\right)\right|^q$ в виде тригонометрического ряда, получаем

$$\int_1^R \frac{\left|\cos\left(s-\frac{\pi(N+1)}{4}\right)\right|^q}{s}\,ds=\frac{a_0}{2}\ln R+O(1),\quad R\to\infty,$$

где

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\left(s-\frac{\pi(N+1)}{4}\right)\right|^q ds=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^q s\,ds.$$

Отсюда, объединяя (26) — (28), при $p=\frac{2N}{N-1}$ имеем

$$\|j_R^0\|_q=2\,(2\pi)^{-(N+1)/2}\left(\frac{2\sigma_N}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^q s\,ds\right)^{1/q}R^{\frac{N-1}{2}}\ln^{\frac{N+1}{2N}}R+O(R^{\frac{N-1}{2}}).$$

Как показано выше, при $p=\frac{2N}{N-1}$ величина $\|I^{(2)}\|_C$ имеет порядок $R^{\frac{N-1}{2}}$, $R\to\infty$.

Таким образом, при $p=\frac{2N}{N-1}$ справедливы равенство (4), а также соотношения (6) и (7). Отметим, что при $p=\frac{2N}{N-1}$ из оценки (21) следует равенство $\|D_R^0\|_q-\|j_R^0\|_q=O(R^{\frac{N-1}{2}})$, $R\to\infty$.

Осталось рассмотреть случай $p>\frac{2N}{N-1}$. Опять применим формулу (11) и оценим величину

$$R^{-r}\left\|\sum_{l=1}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]}\beta_l S_R^l(\varphi;x)-T_R(\varphi;x)\right\|_C=\varepsilon_R^{(1)}.$$

Воспользовавшись теми же рассуждениями, которые применялись при получении асимптотического равенства для $\|j_R^0\|_q$ при $p=\frac{2N}{N-1}$ (см. (26) — (28)), можно убедиться, что при $0\leqslant l\leqslant\frac{N-1}{2}$

$$\|j_R^l\|_q=\begin{cases}O(R^{N/p}), & N/p>(N-1)/2-l;\\ O(R^{\frac{N-1}{2}-l}\ln^{\frac{N+1+2l}{2N}}R), & \frac{N}{p}=\frac{N-1}{2}-l;\\ O(R^{(N-1)/2-l}), & 0\leqslant N/p<(N-1)/2-l,\quad R\to\infty.\end{cases}\tag{29}$$

Объединяя (29) с (18), (20) и оценками (17), (21) и (25), получаем, что для величины $\varepsilon_R^{(1)}$ справедливы такие же оценки, как и для $\gamma_R^{(1)}$ в соотношении (8).

Докажем теперь справедливость соотношения (6). Оценка снизу вытекает из известной оценки снизу для $\|D_R^0\|_1$ [12, с. 57]. Оценка сверху следует из (21), (25) и неравенства

$$\|j_R^0\|_q\leqslant CR^{(N-1)/2},\quad 1\leqslant q<\frac{2N}{N+1},$$

которое легко вытекает из асимптотики $J_\nu(s)$ при $s\to\infty$ и $s\to 0$.

Сравнивая оценки для $\varepsilon_R^{(1)}$ и $\| D_R^0 \|_q$, видим, что при $\frac{2N}{N-1} < p \leqslant \infty$ главным членом в формуле (11) является величина $R^{-r} S_R^0 (\varphi; x)$. Теорема доказана.

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1977.— 455 с.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 333 с.
3. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
4. *Ильин В. А.* Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа // Успехи мат. наук.— 1968.— 23, № 2.— С. 60—120.
5. *Алимов Ш. А., Ильин В. А.* Условия сходимости спектральных разложений, отвечающих самосопряженным расширениям эллиптических операторов. I. Самосопряжённое расширение оператора Лапласа с точечным спектром // Дифференц. уравнения.— 1971.— 7, № 4.— С. 670—710.
6. *Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М.* Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I // Успехи мат. наук.— 1976.— 31, № 6.— С. 28—83.
7. *Грона В. Л.* О равномерном приближении сферическими суммами Фурье на классах функций, определяемых полигармоническими операторами // Укр. мат. журн.— 1989. — 41, № 4.— С. 543—550.
8. *Долголаптев В. Г.* Спектральная суммируемость функций из класса Соболева // Применение функционального анализа в теории приближения.— Калинин, 1987.— С. 28—37.
9. *Никишин Е. М.* Резонансная теорема и ряды по собственным функциям оператора Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— 36, № 4.— С. 795—813.
10. *Peetre J.* Remark on eigenfunction expansions for elliptic operators with constent coefficients // Math. scand.— 1964.— 15.— P. 83—92.
11. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций: В 2-х ч.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.— Ч. 1.— 798 с.
12. *Бабенко К. И.* О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних.— М., 1971.— 70 с.— (Препринт / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 52).

Получено 06.12.89