

Об особых точках композиции Адамара

Получено обобщение теоремы Боненбласта об особых точках адамаровской композиции степенных рядов.

Одержано узагальнення теореми Боненбласта про особливі точки адамарівської композиції степеневих рядів.

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ заданы степенными рядами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (1)$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (2)$$

с ненулевыми радиусами сходимости r_f и r_g .

Композицией Адамара функций $f(z)$ и $g(z)$ называется функция $H(z)$, которая является суммой степенного ряда

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n. \quad (3)$$

Из формулы Коши—Адамара следует, что для радиуса сходимости r_H степенного ряда (3) выполнено неравенство $r_H \geq r_f r_g$.

Математиков давно интересовал вопрос о связи особых точек функций $f(z)$ и $g(z)$ с особенностями их композиции Адамара $H(z)$. Обзор полученных в этом направлении результатов приведен в [1, с. 35—47, 150—163].

В настоящей работе доказывается теорема подобного типа.

Теорема 1. Пусть степенные ряды (1) и (2) сходятся в единичном круге и $r_H = 1$. Если функция $f(z)$ имеет на единичной окружности единственную особую точку $z = 1$, $\operatorname{Re} b_n \geq 0$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{Re} b_n}{|b_n|}} = 1, \quad (4)$$

то точка $z = 1$ является особой для функции $H(z)$.

Доказательство. Из условий теоремы следует $r_f = 1$. Но тогда $1 = r_H \geq r_f r_g = r_g \geq 1$, откуда $r_g = 1$. Так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = 1$, то существует последовательность натуральных чисел n_k , для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k} b_{n_k}|} = 1$. Очевидно, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|b_{n_k}|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k} b_{n_k}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k} b_{n_k}|} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|b_{n_k}|} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = 1$. Отсюда $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}^2| |b_{n_k}|} = 1$. Так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n^2 b_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n^2 b_n|} = 1$. Из условия (4) следует $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n^2| \operatorname{Re} b_n} = 1$. Таким образом, степенные ряды $v(z) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2| \operatorname{Re} b_n z^n$ и $\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^2| b_n z^n$ имеют единичный круг сходимости. По теореме Принсгейма [1, с. 63] (теорема 1.8.1) точка $z = 1$ является особой для функции $v(z)$, Из [1, с. 64] (теорема 1.8.3) следует, что точка $z = 1$ является особой и для функции $\omega(z)$.

Рассмотрим, следуя [2], функцию $f_1(z) = \overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n$, для которой точка $z = 1$ является единственной на единичной окружности особой точкой. Заметим, что степенной ряд функции $\omega(z)$ является композицией Адамара степенных рядов функций $H(z)$ и $f_1(z)$. Если предположить, что точка $z = 1$ не является особой для функции $H(z)$, то по известной теореме Адамара об умножении особенностей [1, с. 37-38] (теорема 1.4.1) точка $z = 1$ не будет особой и для функции $\omega(z)$, что невозможно. Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме (4), которое заменено условием

$$\operatorname{Im} b_n = O(\operatorname{Re} b_n). \quad (5)$$

Тогда точка $z = 1$ является особой для композиции Адамара $H(z)$ функций $f(z)$ и $g(z)$.

Заметим, что из (5) всегда следует (4). Пример $b_n = (n+1)^{-\beta} + i(n+1)^\alpha$, где $0 < \alpha, \beta < +\infty, n = 0, 1, 2, \dots$, показывает, что обратная импликация в общем случае несправедлива.

Условие (4) можно представить в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{Re} b_n}{|b_n|}} \geq 1. \quad (6)$$

Покажем, что его нельзя заменить условием $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{Re} b_n}{|b_n|}} \geq 1 - \delta$, каким бы малым ни было $0 < \delta < 1$.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим степенной ряд $b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(1-\delta)^n + i(-1)^n] z^n = \frac{1}{1-(1-\delta)z} + \frac{i}{1+z}$, где $0 < \delta < 1$. Если

положить $f(z) = \frac{1}{1-z}$ и $g(z) = b(z)$, то будут выполнены все условия

теоремы 1, кроме (4), так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\operatorname{Re} b_n}{|b_n|}} = 1 - \delta$. В то же время

функция $H(z) = b(z)$ аналитична всюду, кроме точек $z = -1$ и $z = \frac{1}{1-\delta}$. Таким образом, условие (4) (в виде (6)) неупрощаемо.

В монографии [1, с. 160] приведена приписываемая Боненбласту теорема 5.2.7, которая отличается от теоремы 1 лишь тем, что в ней нет условия (4). Приведенный пример показывает, что в такой формулировке теорема 5.2.7 неверна. Кроме того, из этого же примера следует ошибочность одной теоремы из [3, с. 191].

С л е д с т в и е 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме (4), которое заменено условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\operatorname{Re} b_n} = 1. \quad (7)$$

Тогда точка $z = 1$ является особой для композиции Адамара $H(z)$ функций $f(z)$ и $g(z)$.

Действительно, рассуждая как в начале доказательства теоремы 1, показываем, что $r_g = 1$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$. Учитывая условие (7), на-