УДК 517.948

З. М. Лысенко

Краевая задача с разрывным сдвигом для двух функций, аналитических в областях различных связностей

В пространстве $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, рассматривается задача об отыскании функций φ и ψ, аналитических соответственно в двухсвязной области с границей Γ и односвязной области с границей γ (Γ и γ — замкнутые ляпуновские контуры) по краевому условию $a(t)\psi[\alpha(t)] + b(t)\overline{\psi[\alpha(t)]} + c(t)\varphi(t) + d(t)\overline{\varphi(t)} = h(t)$, $t \in \Gamma$, где сохраняющий ориентацию сдвиг $\alpha : \Gamma \to \gamma$ и коэффициенты a, b, c, d допускают разрывы в некоторых точках Γ. При определенных условиях на предельные значения производной сдвига в точках разрыва получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для вычисления индекса задачи.

У просторі $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, розглядається задача про знаходження функцій φ та ψ, аналітичних відповідно в двозв'язній області з границею Γ і однозв'язній області з границею γ (Γ та γ —замкнені ляпуновські контури) за крайовою умовою $a(t)\psi[\alpha(t)] + b(t) \times \times \overline{\psi[\alpha(t)]} + c(t)\varphi(t) + d(t)\overline{\varphi(t)} = h(t)$, $t \in \Gamma$, де зсув α: $\Gamma \to \gamma$, що зберігає орієнтацію, та коефіцієнти a, b, c, d допускають розриви в деяких точках Γ. При певних умовах на граничні значення похідної зсуву у точках розриву одержані необхідні та достатні умови нетеровості та формула для обчислення індексу задачі.

Пусть Γ_1, Γ_2 и γ — простые, замкнутые, попарно непересекающиеся кривые Ляпунова. Контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (γ) ограничивает конечную двухсвязную (односвязную) область D (∂). За положительный обход границы Γ (γ) принимается тот, при котором область D (∂) остается слева. Через $[\tau, t]$ обозначим закрытую дугу кривой Γ или γ, пробегаемую от точки τ к точке t в положительном направлении; $j = \overline{1, n}$ будет означать, что $j = 1, \ldots, n$. На контуре Γ выбраны точки $\lambda_1 \in \Gamma_1$ и $\lambda_2 \in \Gamma_2$, а на γ — точки λ_3 и λ_4. Пусть $\alpha(\lambda)$ — множество всех значений заданного кусочно-гладкого сдвига $\alpha : \Gamma \to \gamma$ в точке $\lambda \in \Gamma$, допускающего разрывы в точках λ_1 и λ_2, сохраняющего ориентацию и гомеоморфно отображающего множество $\Gamma' = \Gamma \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$ на множество $\gamma \setminus \{\lambda_3, \lambda_4\}$ так, что дуги Γ_1 и Γ_2 переводятся сдвигом на дуги соответственно $[\lambda_3, \lambda_4]$ и $[\lambda_4, \lambda_3]$, при этом $\alpha(\lambda_1) = \alpha(\lambda_2) = \{\lambda_3, \lambda_4\}$. Предполагаем также, что $\inf\limits_{t \in \Gamma'} |\alpha'(t)| > 0$. Пусть $F = \bigcup\limits_{j=1}^{4} \lambda_j$ — множество узлов контура $\mathscr{T} = \Gamma \cup \gamma$. Рассматривается краевая задача

$$a(t)\psi[\alpha(t)] + b(t)\overline{\psi[\alpha(t)]} + c(t)\varphi(t) + d(t)\overline{\varphi(t)} = h(t),\ t \in \Gamma, \qquad (1)$$

где $h \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, φ и ψ — функции, аналитические соответственно в D и ∂, a, b, c и d — кусочно-непрерывные функции на Γ, допускающие разрывы в узлах. С помощью операторного подхода [1, 2] устанавливается критерий нетеровости и вычисляется индекс задачи (1).

Введем операторы: $(S_L\varphi)(t) = (\pi i)^{-1}\int\limits_L (\tau - t)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau$, $(I_L\varphi)(t) = \varphi(t)$, $t \in L$; $P_L = (I_L + S_L)/2$, $Q_L = I_L - P_L$; $(B_\alpha\varphi)(t) = \varphi[\alpha(t)]$; $(\mathbb{C}\varphi)(t) = \overline{\varphi(t)}$. Пусть $|$ — сужение отображения, $L_p^+(L) = \operatorname{Im} P_L|_{L_p(L)}$, $\mathring{L}_p^-(L) = \operatorname{Im} Q_L|_{L_p(L)}$, T—транспонирование, $\simeq$—равенство с точностью до вполне непрерывного оператора, $\oplus$ — прямая сумма либо пространств, либо опрераторов; $A^{(-1)}$ — регуляризатор нетерового оператора A, ind A — его индекс; $\mathscr{L}(X, Y)$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X, X)$; операторы A и B назовем эквивалентными, если они нетеровы одновременно и ind A = = ind B. Нетеровость (1) равносильна нетеровости (1×2)-матрицы

$$T_0 = [(a + b\mathbb{C})B_\alpha,\ c + d\mathbb{C}] \in \mathscr{L}(L_p^+(\gamma) \oplus L_p^+(\Gamma), L_p(\Gamma)),$$

а индекс задачи (1) равен $\operatorname{ind} T_0$. Предварительно исследуем на нетеровость оператор $\Pi=[P_\gamma B_\alpha^{-1},\ P_\Gamma\ \mathbb{C})^T \in \mathscr{L}(L_p(\Gamma),\ L_p^+(\gamma)\oplus L_p^+(\Gamma))$. Введем операторы: $\Pi_1=(B_\alpha, \mathbb{C})\in\mathscr{L}(L_p^+(\gamma)\oplus L_p^+(\Gamma), L_p(\Gamma))$; $\Pi_2=I_\Gamma+H_\alpha\in\mathscr{L}(L_p(\Gamma))$, где $H_\alpha = B_\alpha P_\gamma B_\alpha^{-1} - P_\Gamma$ ($H_\alpha \not\simeq 0$ в силу разрыва сдвига α); $K_1=\begin{pmatrix} P_\gamma & P_\gamma B_\alpha^{-1} \\ Q_\Gamma B_\alpha & Q_\Gamma\end{pmatrix}\in \mathscr{L}(L_p^+(\gamma)\oplus \overset{0}{L}{}_p^-(\Gamma))$; $K_2=\begin{pmatrix} P_\Gamma & P_\Gamma B_\alpha \\ Q_\gamma B_\alpha^{-1} & Q_\gamma\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(L_p^+(\Gamma)\oplus\overset{0}{L}{}_p^-(\gamma))$. Отметим, что при ссылках на работы [3, 4] будем иметь ввиду известное матричное равенство в [3, с. 4] и лемму 3 в [4, с. 1143] соответственно.

Лемма 1. *Оператор Π допускает левую (правую) регуляризацию, если оператор Π_2 (операторы K_1 и K_2) нетеров(ы).*

Доказательство. Левая регуляризация следует из соотношения $\Pi_1\Pi\simeq\Pi_2$. Согласно [3], оператор $\Pi\Pi_1=\begin{pmatrix} P_\gamma & P_\gamma B_\alpha^{-1}\mathbb{C} \\ P_\Gamma\mathbb{C}B_\alpha & P_\Gamma\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(L_p^+(\gamma)\oplus L_p^+(\Gamma))$ эквивалентен оператору $U^T(K_1\oplus K_2)U$, где U — невырожденная матрица, откуда следует правая регуляризация. Лемма доказана.

Введем карлемановский сдвиг $\beta:\mathscr{T}\to\mathscr{T}$ второго порядка такой, что $\beta(t)=\alpha(t)$, если $t\in\Gamma$, и $\beta(t)=\alpha^{-1}(t)$, если $t\in\gamma$. Отметим, что β имеет разрывы на F. Пусть X_L — оператор умножения на характеристическую функцию множества $L\subset\mathscr{T}$; $H_\beta=B_\beta P_{\mathscr{T}}B_\beta^{-1}-P_{\mathscr{T}}$, где $(B_\beta\varphi)(t)=\varphi[\beta(t)]$.

Лемма 2. *Операторы Π_2, K_1 и K_2 нетеровы тогда и только тогда, когда нетеровы соответственно операторы $\Pi_3=I_{\mathscr{T}}+X_\Gamma H_\beta\in L_p(\mathscr{T})$,*

$$K_3=\begin{pmatrix} I_{\mathscr{T}} & X_\gamma P_{\mathscr{T}}B_\beta^{-1} \\ X_\Gamma Q_{\mathscr{T}}B_\beta & I_{\mathscr{T}}\end{pmatrix},\quad K_4=\begin{pmatrix} I_{\mathscr{T}} & X_\Gamma P_{\mathscr{T}}B_\beta \\ X_\gamma Q_{\mathscr{T}}B_\beta^{-1} & I_{\mathscr{T}}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(L_p^2(\mathscr{T})).$$

Доказательство. Установим, например, эквивалентность операторов K_1 и K_3 (остальные утверждения леммы доказываются по той же схеме). Операторы $K=\begin{pmatrix} P_\gamma & B_\alpha^{-1} \\ B_\alpha & Q_\Gamma\end{pmatrix}$ и $K_5=\begin{pmatrix} I_\gamma & P_\gamma B_\alpha^{-1} \\ Q_\Gamma B_\alpha & I_\Gamma\end{pmatrix}$ действуют в пространстве $L_p(\gamma)\oplus L_p(\Gamma)$. Поскольку $\Pi^+=\operatorname{diag}\{P_\gamma, Q_\Gamma\}$ и $\Pi^-=\operatorname{diag}\{Q_\gamma, P_\Gamma\}$ — дополнительные проекторы пространства $L_p(\gamma)\oplus L_p(\Gamma)$ на подпространства соответственно $L_p^+(\gamma)\oplus\overset{0}{L}{}_p^-(\Gamma)$ и $\overset{0}{L}{}_p^-(\gamma)\oplus L_p^+(\Gamma)$, а $K_1=\Pi^+K\Pi^+$ и $K_5=\Pi^+K+\Pi^-$, то [4] K_1 и K_5 эквивалентны. Далее, пусть $R^+=\operatorname{diag}\{X_\gamma, X_\Gamma\}$ и $R^-=\operatorname{diag}\{X_\Gamma, X_\gamma\}$ — дополнительные проекторы $L_p^2(\mathscr{T})$ на подпространства соответственно $L_p(\gamma)\oplus L_p(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)\oplus L_p(\gamma)$, и пусть $K_6=\begin{pmatrix} I_{\mathscr{T}} & P_{\mathscr{T}}B_\beta^{-1} \\ Q_{\mathscr{T}}B_\beta & I_{\mathscr{T}}\end{pmatrix}\in\mathscr{L}(L_p^2(\mathscr{T}))$. Поскольку $K_5=R^+K_6R^+$ и $K_3=R^+K_6+R^-$, то [4] операторы K_5 и K_3 эквивалентны. Отсюда вытекает эквивалентность K_1 и K_3. Лемма доказана.

Пусть γ_1^s и γ_2^s — дуги из окрестности на $\mathscr{T}$ узла $\lambda_s\in F$, $s=\overline{1,4}$, такие, что γ_1^s выходит из λ_s, а γ_2^s входит в λ_s, причем $\gamma_j^s\cap\gamma_k^r=\varnothing$ ($s\neq r$; $s, r=\overline{1,4}$; $j,k=\overline{1,2}$); $a_j^r=\lim\limits_{t\to\lambda_r}a(t)$ (при этом $t\in\gamma_j^r$), $j=1,2$; $\nu=e^z/(e^{2z}-1)$, где $z=\pi(x+ip^{-1})$, $x\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$; $W_{sj}=|(\beta')_j^s|^{ix-\frac{1}{p}}$, $s=\overline{1,4}$; $j=1,2$; $\delta=W_1W_2$, где $W_1=W_{11}/W_{22}$, $W_2=W_{21}/W_{12}$. Из теоремы 4 в [5] вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Операторы $\Pi_3\in\mathscr{L}(L_p(\mathscr{T}))$ и K_3, $K_4\in\mathscr{L}(L_p^2(\mathscr{T}))$ нетеровы тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\Delta=\Delta(x)=1+4\nu^2+\nu^4[2-\delta-\delta^{-1}]\neq 0,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Заметим, что если $\delta=1$, то (2) выполняется при $p\neq 2$.

Пусть $E = \nu^2\Delta^{-1}(1 + 2\nu^2)(1 - \delta^{-1})$, $G^{\pm} = \nu\Delta^{-1}\operatorname{cth} z\,[1 + \nu^2(1 - \delta^{\pm 1})]$, $H = \nu^4\Delta^{-1}(\delta - \delta^{-1})$. Введем матрицу-функцию $N(x) = \| n_{jk} \|_{j,k=1}^{4}$ следующим образом: $n_{jj} = 1 - (-1)^j H$; $n_{12} = -W_2 n_{23} = n_{34} = -W_1 n_{41} = G^{\pm}$, $n_{13}W_1^{-1} = -n_{24}W_1^{-1} = n_{31}W_2^{-1} = -n_{42}W_2^{-1} = E$; $-n_{14}W_1^{-1} = n_{21} = n_{43} = -n_{32}W_2^{-1} = G^{-}$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняется* (2), *то оператор* Π *нетеров и*

$$\operatorname{ind}\Pi = -1 - (4\pi)^{-1}\{\arg\det N(x)\}_{x=-\infty}^{+\infty}. \tag{3}$$

Доказательство. Нетеровость Π при выполнении (2) непосредственно вытекает из лемм 1—3. Докажем (3). Введем операторы: $A = P_\gamma B_\alpha^{-1} P_\Gamma$, $B = P_\gamma B_\alpha^{-1} Q_\Gamma$, $C = Q_\gamma B_\alpha^{-1} P_\Gamma$, $D = Q_\gamma B_\alpha^{-1} Q_\Gamma$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & P_\Gamma \mathbb{C} Q_\Gamma \end{pmatrix} : L_p^+(\Gamma) \oplus \overset{0}{L}{}_p^-(\Gamma) \to L_p^+(\gamma) \oplus L_p^+(\Gamma)$. Поскольку $M \simeq \Pi(P_\Gamma, Q_\Gamma)$, то M эквивалентен Π. Известно [2, с. 6], что операторы $P_L\mathbb{C}Q_L : \overset{0}{L}{}_p^-(L) \to L_p^+(L)$ и $Q_L\mathbb{C}P_L : L_p^+(L) \to \overset{0}{L}{}_p^-(L)$, $L \in \{\Gamma, \gamma\}$, нетеровы и

$$\operatorname{ind} P_\Gamma\mathbb{C}Q_\Gamma = \operatorname{ind} Q_\Gamma\mathbb{C}P_\Gamma = 0,\ \operatorname{ind} P_\gamma\mathbb{C}Q_\gamma = -\operatorname{ind} Q_\gamma\mathbb{C}P_\gamma = -2. \tag{4}$$

Тогда из нетеровости M и $P_\Gamma\mathbb{C}Q_\Gamma$ следует нетеровость оператора A, причем $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} P_\Gamma\mathbb{C}Q_\Gamma$. Таким образом,

$$\operatorname{ind}\Pi = \operatorname{ind} A. \tag{5}$$

Найдем $\operatorname{ind} A$. Из равенства [2, с. 6]

$$(Q_\gamma\mathbb{C}P_\gamma)\,A \simeq D\,(Q_\Gamma\mathbb{C}P_\Gamma), \tag{6}$$

справедливого и для разрывного сдвига α, а также из (4) следует нетеровость оператора D, причем

$$\operatorname{ind} A = \operatorname{ind} D - 2. \tag{7}$$

Из обратимости $B_\alpha^{-1} : L_p(\Gamma) \to L_p(\gamma)$ следует обратимость оператора $M_1 = (P_\gamma, Q_\gamma)^T B_\alpha^{-1}(P_\Gamma, Q_\Gamma) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : L_p^+(\Gamma) \oplus \mathring{L}_p^-(\Gamma) \to L_p^+(\gamma) \oplus \mathring{L}_p^-(\gamma)$ и

$$\operatorname{ind} M_1 = 0. \tag{8}$$

Положим $M_2 = \begin{pmatrix} P_\Gamma & A^{(-1)}B \\ D^{(-1)}C & Q_\Gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(L_p^+(\Gamma) \oplus \mathring{L}_p^-(\Gamma))$ Поскольку $M_3 = \operatorname{diag}\{A^{(-1)}, D^{(-1)}\}$ нетеров и $M_2 \simeq M_3 M_1$, то из (7) и (8) получаем

$$\operatorname{ind} M_2 = -2\operatorname{ind} A - 2. \tag{9}$$

Введем операторы $M_4 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Q_\Gamma \end{pmatrix} : L_p^+(\Gamma) \oplus \mathring{L}_p^-(\Gamma) \to L_p^+(\gamma) \oplus \mathring{L}_p^-(\Gamma)$ и $M_5 = \begin{pmatrix} \Pi_2 & X_\Gamma(I_{\mathscr{T}} + H_\beta)X_\gamma \\ 0 & X_\gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(L_p(\Gamma) \oplus L_p(\gamma))$, нетеровость которых следует соответственно из нетеровости A и Π_2. В силу соотношения $\Pi_3 \simeq (X_\Gamma, X_\gamma)\,M_5\,(X_\Gamma, X_\gamma)^T$ получаем, что в первом столбце первой строки матрицы $M_5^{(-1)}$ стоит оператор $\Pi_2^{(-1)} = X_\Gamma\Pi_3^{(-1)}X_\Gamma$. Отсюда, а также из соотношений $M_4 \simeq \begin{pmatrix} P_\gamma & 0 \\ 0 & Q_\Gamma\mathbb{C}P_\Gamma \end{pmatrix} M$ и $\Pi_1\Pi \simeq \Pi_2$, получаем, что в первом столбце первой строки матрицы $M_4^{(-1)} \simeq (P_\Gamma, Q_\Gamma)^T \Pi_2^{(-1)}\Pi_1 \begin{pmatrix} P_\gamma & 0 \\ 0 & P_\Gamma\mathbb{C}Q_\Gamma \end{pmatrix}$ стоит оператор $A^{(-1)} = P_\Gamma X_\Gamma \Pi_3^{(-1)} X_\Gamma B_\alpha P_\gamma$. Аналогично, предварительно установив нетеровость $\Pi_4 = 2I_{\mathscr{T}} - \Pi_3$ так же, как и нетеровость Π_3 в лемме 3, получим $D^{(-1)} = Q_\Gamma X_\Gamma \Pi_4^{(-1)} X_\Gamma B_\alpha Q_\gamma$. Пусть $M_6 = I_\Gamma + \{A^{(-1)}B_\alpha^{-1}Q_\Gamma + D^{(-1)} \times B_\alpha^{-1}P_\Gamma\}$ и $M_7 = I_{\mathscr{T}} + \{P_{\mathscr{T}}(X_\Gamma\Pi_3^{(-1)}X_\Gamma)\,B_\beta P_{\mathscr{T}} B_\beta^{-1} Q_{\mathscr{T}} + Q_{\mathscr{T}}(X_\Gamma\Pi_4^{(-1)}X_\Gamma) \times$

$\times B_\beta Q_{\mathscr{T}} B_\beta^{-1} P_{\mathscr{T}}\}$. Так как $M_6 = X_\Gamma M_7 X_\Gamma$, то [4] M_6 эквивалентен оператору $M_8 = X_\Gamma M_7 + X_\gamma \in \mathscr{L}(L_p(\mathscr{T}))$. Отсюда, учитывая эквивалентность операторов M_6 и M_2 в силу соотношения $M_6 \simeq (P_\Gamma, Q_\Gamma) M_2 (P_\Gamma, Q_\Gamma)^T$, а также (9) получаем

$$\operatorname{ind} A = -\frac{1}{2} \operatorname{ind} M_8 - 1. \tag{10}$$

Согласно доказательству достаточности теоремы 2 в [5], $\Pi_3^{(-1)} = I_{\mathscr{T}} - N_1$ и $\Pi_4^{(-1)} = I_{\mathscr{T}} - N_2$, где N_1 и N_2 принадлежат идеалу $\mathfrak{H}$ операторов с точечными особенностями [5, с. 83]. Отсюда и из следствия 1 в [5] $M_8 = I_{\mathscr{T}} + N_3$, где $N_3 \in \mathfrak{H}$. Тогда, согласно [6, с. 168]

$$\operatorname{ind} M_8 = -(2\pi)^{-1} \{\arg \det N(x)\}_{x=-\infty}^{+\infty}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), а (10) в (5), получаем (3). Теорема доказана.

Перейдем к выяснению условий нетеровости оператора T_0. Поскольку $T_0\Pi \simeq (aP_\Gamma + dQ_\Gamma + aH_\alpha) + (cP_\Gamma + bQ_\Gamma - bH_\alpha)\mathbb{C}$, то из [3] вытекает следующая лемма.

Лемма 4. *Оператор $T_0\Pi \in \mathscr{L}(L_p(\Gamma))$ нетеров тогда и только тогда, когда нетеров оператор $T_1 = AP_\Gamma + BQ_\Gamma + CH_\alpha \in \mathscr{L}(L_p^2(\Gamma))$, где* $A = \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & b \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} d & -b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}$. *В случае нетеровости* $\operatorname{ind} T_0\Pi = \frac{1}{2} \operatorname{ind} T_1$.

Введем операторы $T_2 = \tilde{A}P_{\mathscr{T}} + \tilde{B}Q_{\mathscr{T}} + \tilde{C}H_\beta \in \mathscr{L}(L_p^2(\mathscr{T}))$, где $\tilde{A}(t) = A(t)$, если $t \in \Gamma$, и $\tilde{A}(t) = 0$, если $t \in \gamma$ ($\tilde{B}$ и $\tilde{C}$ определяются аналогично); $T_3 = \Pi_\Gamma T_2 + \Pi_\gamma$, где $\Pi_L = \operatorname{diag}\{X_L, X_L\}$, $L \subset \mathscr{T}$. Так как Π_Γ и Π_γ — проекторы $L_p^2(\mathscr{T})$ на подпространства соответственно $L_p^2(\Gamma)$ и $L_p^2(\gamma)$, а $T_1 = \Pi_\Gamma T_2 \Pi_\Gamma$, то из [4] вытекает следующее утверждение.

Лемма 5. *Оператор T_1 эквивалентен оператору T_3.*

Представим T_3 в виде $T_3 = (\Pi_\Gamma \tilde{A} + \Pi_\gamma) P_{\mathscr{T}} + (\Pi_\Gamma \tilde{B} + \Pi_\gamma) Q_{\mathscr{T}} + \Pi_\Gamma \tilde{C} H_\beta$. Тогда из [6, с. 168] и теоремы 4 в [5] следует лемма

Лемма 6. *Оператор T_3 нетеров тогда и только тогда, когда $\det A(t) \neq 0$ и $\det B(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma'$, а также*

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} |\det (T_3)_{\lambda_1}(x)| > 0, \tag{12}$$

где $(T_3)_{\lambda_1}(x)$ — символ локального представителя оператора T_3 в узле λ_1, определяемый в [5, *с.* 83]. *В случае нетеровости*

$$2\pi \operatorname{ind} T_3 = \{\arg \det [B(t) A^{-1}(t)]\}_{t \in \Gamma'} - \{\arg \det (T_3)_{\lambda_1}(x)\}_{x=-\infty}^{+\infty}. \tag{13}$$

Из теоремы 1 и лемм 4—6 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Если имеет место* (2), *то оператор T_0 нетеров тогда и только тогда, когда выполняется* (12). *В случае нетеровости*

$$\operatorname{ind} T_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ind} T_3 - \operatorname{ind} \Pi,$$

где $\operatorname{ind} T_3$ *вычисляется по формуле* (13), *а* $\operatorname{ind} \Pi$ — *по формуле* (3).

Замечание. Исследование оператора T_0 в пространстве L_p со степенным весом проводится аналогично.

1. *Литвинчук Г. С.* Об операторном подходе к теории краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области // Науч. тр. юбилейн. сем. по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф. Д. Гахова.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1985.— С. 69—76.
2. *Лисовец Н. И.* Краевая задача для функций, аналитических в нескольких многосвязных областях.— Одесса. 1984.— 17 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 545 Ук.-Д84.

3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Об одномерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // Изв. АН АрмССР. Сер. мат.— 1973.— **8**, № 1.— С. 3—12.
4. *Симоненко И. Б.* Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 5.— С. 1138—1146.
5. *Лысенко З. М.* К теории Нетера сингулярных интегральных операторов с двумя карлемановскими сдвигами // Изв. вузов. Сер. мат.— 1987.— № 6.— С. 82—85.
6. *Лысенко З. М.* Об одном классе сингулярных интегральных операторов с двумя разрывными сдвигами // Материалы респ. науч. конф. «Дифференц. и интеграл. уравнения и их прил.»— Одесса: Изд-во Одес. ун-та, 1987.— Т. 1.— С. 167—168.

Одес. ун-т

Получено 27.11.87