УДК 517.98,519.21

М. Ф. ГОРОДНИЙ, ассист. (Киев. ун-т)

Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве

Доказаны теоремы о существовании и единственности ограниченных и периодических решений одного линейного разностного уравнения с операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Для стохастического аналога исследуемого уравнения доказано существование и единственность стационарных в узком смысле и периодических решений специального вида.

Доведено теореми про існування і єдиність обмежених і періодичних розв'язків одного лінійного різницевого рівняння з операторними коефіцієнтами в банаховому просторі. Для стохастичного аналогу досліджуваного рівняння доведено існування і єдиність стаціонарних у вузькому розумінні і періодичних розв язків спеціального виду.

В настоящей статье подход к доказательству существования стационарных и периодических решений стохастического разностного уравнения, предложенный в работе [1], используется для доказательства существования ограниченных и периодических решений $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ разностного уравнения

$$Ax_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k x_{n+k} + y_n, \ n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

в банаховом пространстве. Здесь A — замкнутый, $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — ограниченные операторы, $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность элементов банахового пространства или случайный процесс. Доказана также единственность полученных решений в детерминированном случае. Задачи, приводящие к уравнениям вида (1), рассмотрены в [1].

1. Ограниченные решения неслучайного разностного уравнения. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное сепарабельное банахово пространство; $\mathcal{L}(B)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B в B; $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — набор операторов из $\mathcal{L}(B)$ такой, что ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_n z^n \tag{2}$$

сходится по норме в кольце $\{s_0 < |z| < s_1\} \subset \mathbb{C}^1$, где s_0, s_1 — действительные числа, удовлетворяющие неравенству $0 < s_0 < 1 < s_1$; A — замкнутый оператор, действующий из B в B, с областью определения D; $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — ограниченная последовательность элементов пространства B.

Рассмотрим вопрос о существовании ограниченного в B решения $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ уравнения (1). Отметим, что каждое такое решение содержит элементы из D и с учетом представления (2) удовлетворяет условию

$$\sup_n \|x_n\| + \sup_n \|Ax_n\| < +\infty. \tag{3}$$

Пусть

$$\mathfrak{M} := \Big\{\{C_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(B) \mid \forall n \in \mathbb{Z} : C_n : B \to D,$$

$$AC_n \in \mathcal{L}(B); \ \exists t_0 \in (0; 1), \ \exists t_1 \in (1; +\infty):$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (\|C_j\| + \|AC_j\|)\, |z|^j < +\infty, \ \ t_0 < |z| < t_1;$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \Big(AC_m - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k C_{m+k}\Big) u = \Big(C_m A - \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{m+k} A_k\Big) u, \ \ u \in D\Big\}.$$

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует набор операторов* $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathfrak{M}$ *такой, что уравнение* (1) *имеет для любой ограниченной в* B *последовательности* $\{y_n : n \in \in \mathbb{Z}\}$ *ограниченное решение вида*

$$\left\{x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k} y_k : n \in \mathbb{Z}\right\}; \tag{4}$$

2) *для каждого* z, $|z| = 1$ *точка нуль принадлежит резольвентному множеству оператора* $A - f(z)$;

3) *для любой ограниченной в* B *последовательности* $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *существует единственное решение* $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ *разностного уравнения* (1), *удовлетворяющее условию* (3).

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Подставив решение (4) в уравнение (1), получим

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(AC_{n-j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k C_{n+k-j} - \delta_{j,n} I\right) y_j = \overline{0}, \tag{5}$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $\overline{0}$ — нулевой элемент в B, I — единичный оператор, $\delta_{j,n} = 0$ при $j \neq \neq n$ и $\delta_{n,n} = 1$. Положим

$$U_j := AC_{-j} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k C_{k-j} - \delta_{j,0} I, \ j \in \mathbb{Z}.$$

Из определения класса $\mathfrak{M}$ следует, что $\{U_j : j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathscr{L}(B)$. Пусть $j_0 \in \mathbb{Z}$ фиксировано. Зададим последовательность $\{y_n : p \in \mathbb{Z}\}$ следующим образом: $y_n = \overline{0}$, $n \neq j_0$, $y_{j_0} = y$, где y — произвольный элемент B. Тогда вследствие (5) $U_{j_0} y = \overline{0}$. Следовательно, имеет место система операторных равенств

$$AC_{-j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k C_{k-j} - \delta_{j,0} I, \ j \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Зафиксируем число z, принадлежащее кольцу $K_1 := \{\max(t_0, s_0) < < |z| < \min(t_1, s_1)\}$, умножим j-е равенство из (6) на z^{-j} и просуммируем по j. С учетом замкнутости оператора A получим тождество

$$F(z^{-1}) \Phi(z) = I, \tag{7}$$

в котором

$$F(z) := A - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k, \ \ \Phi(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k z^k.$$

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 1 из [1], можно проверить, что определенный на B ограниченный оператор $\Phi(z)$ является обратным для $F(z^{-1})$. Отсюда, в частности, следует условие 2, поскольку $K_1 \supset \{|z| = 1\}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Условие 2 влечет аналитичность функции

$$\Phi(z) = (A - f(z^{-1}))^{-1}$$

на некотором кольце $K_2 : \{r_0 < |z| < r_1\}$, $0 < r_0 < 1 < r_1$. Следовательно, Φ разложима в ряд Лорана

$$\Phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j z^j, \ \ z \in K_2. \tag{8}$$

При этом ограниченные операторы $\{\Phi(z) : z \in K_2\}$, $\{C_j : j \in \mathbb{Z}\}$ действуют из B в D. Обобщая рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2 работы [1], можно установить, что набор операторов $\{C_j : j \in \mathbb{Z}\}$ из представления (8) удовлетворяет операторным равенствам (6) и принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Также непосредственно проверяется, что последовательность (4), построенная по данному набору операторов, является решением разностного уравнения (1).

2) $\Rightarrow$ 3). Обозначим через D^{∞} множество всех последовательностей $\bar{x} := \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset D$, удовлетворяющих условию (3). В D^{∞} покоординатно определяются сложение элементов и умножение на комплексное число. Положим

$$|\bar{x}|_D := \sup_n \| x_n \| + \sup_n \| Ax_n \|. \tag{9}$$

Из замкнутости оператора A следует, что $(D^{\infty}, |\cdot|_D)$ — комплексное банахово пространство. Обозначим также через $(B^{\infty}, |\cdot|_B)$ комплексное банахово пространство всех ограниченных в B последовательностей $\bar{v} := \{v_n : n \in \mathbb{Z}\}$ с покоординатными сложением и умножением на скаляр и нормой

$$|\bar{v}|_B := \sup_n \| v_n \|.$$

Пусть оператор G действует из $(D^{\infty}, |\cdot|_D)$ в $(B^{\infty}, |\cdot|_B)$ следующим образом:

$$G\bar{x} := \left\{(G\bar{x})_k := Ax_n - \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j x_{j+k} : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$x \in D^{\infty}.$$

Оператор G линеен и ограничен. С учетом оценки (3) разностное уравнение (1) можно представить в виде $G\bar{x} = \bar{y}$. Поэтому вследствие теоремы Банаха о гомеоморфизме [2, с. 122] вопрос о существовании единственного решения уравнения (1) для каждой ограниченной последовательности $\bar{y} := \{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$ эквивалентен вопросу о существовании ограниченного обратного оператора G^{-1} для оператора G. Теперь осталось заметить, что условие 2 влечет выполнение операторных равенств (6), с помощью которых можно проверить, что оператор G^{-1}, определенный соотношением

$$G^{-1}\bar{v} := \left\{(G^{-1}\bar{v})_k := \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{-j+k} v_j : k \in \mathbb{Z}\right\},$$

$$\bar{v} \in B^{\infty},$$

является обратным для оператора G, Ограниченность оператора G^{-1} следует из того, что набор операторов $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ определяется из соотношения (8) и принадлежит классу $\mathfrak{M}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Достаточно установить, что если нарушается условие 2, то оператор G не имеет ограниченного обратного оператора, заданного на B^{∞}.

Итак, предположим от противного, что при фиксированном z_0, $|z_0| = 1$, оператор $A - f(z_0)$ не имеет ограниченного обратного оператора, определенного на B. Зададим на области определения D оператора A норму соотношением

$$|x|_1 := \| x \| + \| (A - f(z_0)) x \|.$$

Тогда $(D, |\cdot|_1)$ — банахово пространство, и оператор $A - f(z_0)$ ограничен, если его рассматривать действующим из $(D, |\cdot|_1)$ в $(B, \|\cdot\|)$. С учетом теоремы Банаха о гомеоморфизме получаем, что оператор $A - f(z_0)$ не имеет обратного оператора в следующих двух случаях:

а) для некоторого фиксированного $y \in B$ операторное уравнение

$$(A - f(z_0)) x = y \tag{10}$$

имеет несколько решений, принадлежащих D;

б) существует $y \in B$ такое, что уравнение (10) не имеет решений.

Если выполнено условие а), то найдется ненулевой элемент $u \in D$ такой, что $(A - f(z_0))u = \overline{0}$. При этом $\operatorname{Ker} G$ содержит ненулевой элемент $\overline{u} := \{uz_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ и поэтому оператор G^{-1} не определен.

Пусть выполнено условие б). Положим $\overline{y} := \{yz_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Если, от противного, оператор G^{-1} существует, то уравнение $G\overline{x} = \overline{y}$ имеет единственное решение $\overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Докажем, что при этом $x_n = x_0 z_0^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Зафиксируем $q \in \mathbb{Z}$. Из условия 3 следует, что для любой ограниченной последовательности $\{v_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B$ существует единственное ограниченное решение $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ разностного уравнения

$$Au_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k z_0^k)\, u_{n+k} + v_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Уравнение $G\overline{x} = \overline{y}$ можно записать в виде

$$Ax_j z_0^{-j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k z_0^k)\, x_{j+k} z_0^{-j-k} + y, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Положив в (12) соответственно $j = n + q$ и $j = n$ и рассмотрев их разность, получаем систему

$$Aw_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (A_k z_0^k)\, w_{n+k}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где

$$w_n := x_{n+q} z_0^{-n-q} - x_n z_0^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Вследствие единственности решения уравнения (11) заключаем, что $w_n = \overline{0}$, $n \in \mathbb{Z}$. В частности, при $n = 0$ имеем равенство $x_q = x_0 z_0^q$.

Осталось заметить, что с учетом представления $\overline{x} = \{x_0 z_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ элемент $G\overline{x}$ имеет вид

$$G\overline{x} = \{z_0^k (A - f(z_0))\, x_0 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Следовательно, записав покомпонентно равенство $G\overline{x} = \overline{y}$ и положив $k = 0$, получим $(A - f(z_0))\, x_0 = y$, что невозможно. Теорема 1 доказана.

2. Периодические решения. Пусть p—фиксированное натуральное число. Последовательность $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B$ будем называть p-периодической, если для любого целого n выполнено равенство $y_{n+p} = y_n$.

Исследуем условия, при выполнении которых для каждой p-периодической последовательности $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$ существует единственное p-периодическое решение $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ разностного уравнения

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k x_{n+k} = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{13}$$

в котором $\{E_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — набор операторов из $\mathcal{L}(B)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \| E_n \| < +\infty. \tag{14}$$

Замечание. В случае, когда $A \equiv 0$ — нулевой оператор, уравнение (1) приводится к уравнению вида (13). При этом условие (14) является менее ограничительным, чем условие (2), которому удовлетворяет набор операторов $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Найдем вид операторного уравнения, соответствующего разностному уравнению (13). Обозначим через B^p декартово произведение p экземпляров пространства B; B^p является банаховым пространством с покоординатными сложением и умножением на скаляр и нормой

$$\| \overline{u} \|_p := \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \| u_k \|, \quad \overline{u} := (u_1, \dots u_p) \in B^p.$$

Положим

$$H_k := \sum_{j=-\infty}^{\infty} E_{k+pj}. \quad 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{15}$$

Тогда с учетом p-периодичности уравнение (13) принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^{p} H_\nu x_{\nu+k} = y_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant p. \tag{16}$$

Систему (16) можно рассматривать как операторное уравнение $H\overline{x} = \overline{y}$, в котором $\overline{x} := (x_1, \dots x_p)$, $\overline{y} := (y_1, \dots y_p)$, H — линейный ограниченный оператор, действующий из B^p в B^p по правилу, указанному в левой части (16). При этом вопрос о существовании единственного p-периодического решения $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ разностного уравнения (13) для произвольной p-периодической последовательности $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\}$ эквивалентен вопросу о существовании ограниченного оператора H^{-1}, обратного к оператору H. Ответ на вопрос о существовании H^{-1} содержит следующее утверждение.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *для каждого* $\overline{y} \in B^p$ *существует решение* $\overline{x}$ *системы* (16) *вида*

$$x_k = \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu y_{\nu+k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant p,$$

в котором $\{C_k : 1 \leqslant k \leqslant p\}$ — *набор операторов из* $\mathcal{L}(B)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sum_{k=1}^{p} H_k C_{p-k+1} = \sum_{k=1}^{p} C_k H_{p-k+1} = I;$$

$$\sum_{k=1}^{m} H_k C_{m-k+1} + \sum_{k=m+1}^{p} H_k C_{p-k+m+1} = \sum_{k=1}^{m} C_k H_{m-k+1} + \sum_{k=m+1}^{p} C_k H_{p-k+m+1} = O,$$
$$1 \leqslant m \leqslant p-1;$$

2) *для любого* $1 \leqslant m \leqslant p$ *оператор*

$$D_m := \sum_{k=1}^{p} H_k \exp\left(\frac{i2\pi mk}{p}\right)$$

имеет ограниченный обратный оператор D_m^{-1};

3) *существует* H^{-1}.

Замечание. Вследствие (15) выполнено равенство

$$D_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_k \left(\exp\left(\frac{i2\pi m}{p}\right)\right)^k, \quad 1 \leqslant m \leqslant p.$$

Поэтому условие 2 теоремы 2 менее ограничительное, чем условие 2 теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 основано на методе, аналогичном использованному при доказательстве теоремы 1, и поэтому не приводится. Отметим только, что для доказательства импликации 2) ⇒ 1) следует положить

$$C_k := \frac{1}{p}\left(\sum_{\nu=1}^{p} D_\nu^{-1} \exp\left(\frac{i2\pi\nu(p-k+1)}{p}\right)\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

3. Исследование стохастического аналога разностного уравнения (1). Далее используется понятие периодического случайного процесса, которое определяется следующим образом.

B-значный процесс $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется периодическим с периодом $p \in N$, если

$$\forall m \in N \quad \forall \{n_1, \dots n_m\} \subset \mathbb{Z} \quad \forall \{Q_1, \dots Q_m\} \subset \mathfrak{B}(B) : P\{\varepsilon_{n_k+p} \in Q_k,$$

$$1 \leqslant k \leqslant m\} = P\{\varepsilon_{n_k} \in Q_k, 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Здесь $\mathfrak{B}(B)$ — σ-алгебра борелевских множеств B. Процесс периодический с периодом $p = 1$, является стационарным в узком смысле.

Изучим вопрос о существовании стационарного в узком смысле B-значного решения $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ разностного уравнения

$$Ax_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k x_{n+k} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{17}$$

в котором $A, \{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — операторы, удовлетворяющие предположениям п. 1, $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — стационарный в узком смысле B-значный случайный процесс с $M\|\varepsilon_0\| < +\infty$.

Пусть

$$\mathfrak{N} := \Big\{\{G_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{L}(B) \mid \forall n \in \mathbb{Z} \,.\, G_n : B \to D, AG_n \in \mathcal{L}(B);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\|G_n\| + \|AG_n\|) < +\infty\Big\}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы существовал набор операторов $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\} \in \mathfrak{M}$ такой, что уравнение* (17) *для любого стационарного в узком смысле B-значного процесса $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$ с $M\|\varepsilon_0\| < +\infty$ имело стационарное решение вида*

$$\Big\{x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{n-k}\varepsilon_k : n \in \mathbb{Z}\Big\}, \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие 2 *теоремы* 1. *При этом набор операторов $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ определяется единственным образом не только в классе $\mathfrak{M}$, но и в более широком классе $\mathfrak{N}$.*

Доказательство теоремы 3 состоит в обобщении рассуждений, используемых при доказательстве аналогичных результатов в работах [1, 3], и поэтому не приводится.

Построенный по периодическому с периодом p процессу $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$ с $M\|\varepsilon_k\| < +\infty$, $1 \leqslant k \leqslant p$, и набору операторов $\{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ согласно формуле (18) процесс $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ также является p-периодическим. Поэтому с учетом того, что стационарный в узком смысле процесс является p-периодическим с произвольным периодом $p \in N$, получаем, что утверждение теоремы 3 остается справедливым, если вместо стационарного рассмотреть периодический процесс $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

1. *Дороговцев А. Я.* Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и мат. статистика. — 1990.— Вып. 42.— С. 35—42.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа.— М. : Высш. шк., 1982.— 271 с.
3. *Городний М. Ф., Дороговцев А. Я.* О стационарных решениях одного стохастического двумерного разностного уравнения в банаховом пространстве // Стохастический анализ и его приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 25—33.

Получено 16.01.90