УДК 517.9

Е. Ю. Романенко

Представление локального общего решения одного класса дифференциально-функциональных уравнений

Для дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа $\dot{x}(at)+t^{\lambda}b\times$ $\times(t)\dot{x}(t)+c(t)x(at)+d(t)x(t)=0$, $0<\lambda<1$, $a>1$, в окрестности сингулярной критической точки $t=0$ построено представление общего решения; показано, что общее решение зависит от произвольной постоянной и произвольной периодической функции.

Для диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу $\dot{x}(at)+t^{\lambda}b(t)\dot{x}(t)+$ $+c(t)x(at)+d(t)x(t)=0$, $0<\lambda<1$, $a>1$, в околі сингулярної критичної точки $t=0$ побудовано представлення загального розв'язку; показано, що загальний розв'язок залежить від довільної сталої і довільної періодичної функції.

В настоящей статье рассматривается дифференциально-функциональное уравнение нейтрального типа с особенностью при производной

$$\dot{x}(at)+t^{\lambda}b(t)\dot{x}(t)+c(t)x(at)+d(t)x(t)=0,\quad 0<\lambda<1,\quad t>0. \tag{1}$$

Для случая $a>1$ строится представление общего решения в окрестности сингулярной критической точки $t=0$. Функции $b(t), c(t), d(t):\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}$ предполагаются непрерывными; $b(0)=b\neq 0$.

Уравнение (1) при $0<a<1$ исследовано в [1, 2]. Если $a>1$, то уравнение (1) имеет неограниченно растущие решения [3], тогда как при $0<a<$ <1 все решения ограничены в окрестности $t=0$. Настоящая статья продолжает работу [3], в которой установлена асимптотика решений уравнения (1) при $t\to 0$. Доказанные в [3] утверждения можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) $a>1$, $0<\lambda<1$.

1. *Для любого решения $x(t)$ найдутся константа $\alpha_{x(\cdot)}$ и функции $\gamma_{x(\cdot)}$, $g_{x(\cdot)}$ со свойствами*

$$\gamma_{x(\cdot)}(\theta+1)=-\operatorname{sign}b\cdot\gamma_{x(\cdot)}(\theta),\ g_{x(\cdot)}(\theta)=O(\theta),\quad \theta\to 0, \tag{2}$$

такие, что в некоторой окрестности $t=0$ справедливо представление

$$x(t)=\alpha_{x(\cdot)}+\int_{t}^{t^*}\tau^{\nu}a^{h(\tau)}\gamma_{x(\cdot)}(\ln\tau/\ln a)\,d\tau+g_{x(\cdot)}(t), \tag{3}$$

где $\nu=\ln|b|/\ln a$, $h(t)=\dfrac{\lambda}{2}\ln t/\ln a(\ln t/\ln a-1)$, t^* — *произвольно фиксированное достаточно малое число.*

2. *Если для решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ $\alpha_{x_1(\cdot)}=\alpha_{x_2(\cdot)}$ и $\gamma_{x_1(\cdot)}\equiv\gamma_{x_2(\cdot)}$, то* $x_1(t)\equiv x_2(t)$.

Докажем обратное утверждение, а именно: для любой пары $(\alpha,\gamma(\cdot))$, α — константа, γ — периодическая функция со свойством (2), найдется решение $x(t)$ уравнения (1), для которого в представлении (3) $\alpha_{x(\cdot)}=\alpha$, $\gamma_{x(\cdot)}\equiv\gamma$. Будем искать такое решение в виде суммы двух решений $x_{\alpha}(t)$ и $x_{\gamma(\cdot)}(t)$, соответствующих парам $(\alpha,0)$ и $(0,\gamma)$.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) $a>1$, $0<\lambda<1$. *Для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ существует единственное решение $x_{\alpha}(t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$x_{\alpha}(t)=\alpha+o(1),\quad t\to+0. \tag{4}$$

Доказательство. Если решение $x_{\alpha}(t)$ задачи (1), (4) существует, то оно удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=L_0[x](t)=\alpha-a\int_0^{t/a}\tau^{\lambda}b(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau-a\int_0^{t/a}(c(\tau)x(a\tau)+d(\tau)x(\tau))\,d\tau \qquad (5)$$

и принадлежит множеству $B_\alpha=\{\varphi\in C^1([0,\delta],\mathbb{R}):\ \varphi(0)=\alpha,\ |\dot{\varphi}(t)|\leqslant\leqslant(|c|(0)|+|d(0)|)|\alpha|+\varepsilon\}$ при любом $\varepsilon>0$ и достаточно малом $\delta=\delta(\varepsilon)>0$. Поэтому рассмотрим действие оператора L_0 на множестве B_α, которое, очевидно, является полным в C^0-метрике. Для упрощения выкладок предположим, что $b(t)\equiv b>0$, $c(t)\equiv c>0$, $d(t)\equiv d>0$. Поскольку $|\varphi(t)|\leqslant\leqslant|\alpha|+((c+d)|\alpha|+\varepsilon)\delta$ при $t\in(0,\delta]$, то из (5) находим $L_0[\varphi](0)=\alpha$, $\left|\frac{d}{dt}L_0[\varphi](t)\right|\leqslant(c+d)|\alpha|+g_1(\delta)$, $\|L_0[\varphi_1](t)-L_0[\varphi_2](t)\|_{C^0}\leqslant g_2(\delta)\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|_{C^0}$, где $g_1(\delta)=((c+d)|\alpha|+\varepsilon)(a^{-\lambda}b+(c+d)\delta^{1-\lambda})\delta^{\lambda}$, $g_2(\delta)=2a^{1-\lambda}b\delta^{\lambda}+(c+d)\delta$.

Так как $g_1(\delta)=o(\delta)$ и $g_2(\delta)=o(\delta)$ при $\delta\to0$, то существует $\delta_0>0$ такое, что $g_1(\delta)<\varepsilon$, $g_2(\delta)<1$ при $\delta<\delta_0$. И тогда при $\delta<\delta_0$ оператор L_0 отображает B_α в себя и является сжимающим. Следовательно, при каждом $\alpha\in\mathbb{R}$ решение $x_\alpha(t)$ задачи (1), (4) существует, единственно и в δ_0-окрестности $t=0$ может быть построено методом последовательных приближений

$$x_\alpha(t)=\lim_{n\to\infty}x_n(t)=\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}x_{n+1}(t)-x_n(t),\quad x_0(t)\equiv\alpha,\quad x_{n+1}(t)=L_0[x_n](t),$$
$$n=0,1,\ldots.$$

Теорема доказана.

Интегральный оператор L_0, определенный формулой (5), очевидно не пригоден для построения решений $x_{\gamma(\cdot)}(t)$. Для их нахождения заменим уравнение (1) эквивалентным интегральным уравнением с оператором L_*

$$x(t)=L_*[x](t)=x(t^*)+a\int_{t/a}^{t^*/a}\tau^{\lambda}b(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau+a\int_{t/a}^{t^*/a}(c(\tau)x(a\tau)+$$
$$+d(\tau)x(\tau))\,d\tau. \qquad (6)$$

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) $a>1$, $0<\lambda<1$. *Для любой C^0-функции $\gamma(\theta)$ со свойством $\gamma(\theta+1)=-\operatorname{sign}b\cdot\gamma(\theta)$ существует единственное решение $x_{\gamma(\cdot)}(t)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$x_{\gamma(\cdot)}(t)=\int_t^{t^*}\tau^{\nu}a^{h(\tau)}\gamma(\ln\tau/\ln a)\,d\tau+o(t^{\nu}a^{h(t)}),\quad t\to+0. \qquad (7)$$

Доказательство. Построим искомое решение методом последовательных приближений

$$x_0(t)=\int_t^{t^*}\tau^{\nu}a^{h(\tau)}\gamma(\ln\tau/\ln a)\,d\tau,\quad x_{n+1}(t)=L_*[x_n](t),\quad n=0,1,\ldots. \qquad (8)$$

Оператор L_* не является сжимающим на множестве функций $\varphi\in C^1$, для которых $\dot{\varphi}(t)=O(t^{\nu}a^{h(t)})$ при $t\to0$. Поэтому, чтобы доказать сходимость итерационного процесса (8), представим $x_n(t)$ в виде $x_n(t)=x_0(t)+\sum_{k=0}^{n-1}L_*^k[L_*[x_0](t)-x_0(t)]$, $n=1,2,\ldots$, сведя тем самым вопрос о предельном поведении последовательности (8) к исследованию сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}L_*^k[L_*[x_0](t)-x_0(t)]. \qquad (9)$$

В дальнейшем для простоты ограничимся случаем $b(t)\equiv b$, $c(t)\equiv c$, $d(t)\equiv d$. Выясним, к какому классу функций принадлежит $L_*[x_0](t)-x_0(t)$. Так как

$$ab\int_{t^*/a}^{t/a}\tau^{\nu+\lambda}a^{h(\tau)}\gamma(\ln\tau/\ln a)\,d\tau=\frac{b}{|b|}\operatorname{sign}b\int_t^{t^*}\tau^{\nu}a^{h(\tau)}\gamma(\ln\tau/\ln a)\,d\tau=x_0(t),$$

то справедливо равенство

$$L_*[x_0](t) - x_0(t) = a\int\limits_{t/a}^{t^*/a}(cx_0(a\tau) + dx_0(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку для любых T, σ и $0<\mu<1$ $\int\limits_t^T \tau^\sigma a^{h(\tau)}d\tau = O(t^{\sigma+\mu}a^{h(t)})$, $t\to 0$, находим

$$L_*[x_0](t) - x_0(t) = O\Big(\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\int\limits_{a\tau}^{t^*} s^\nu a^{h(s)}ds\,d\tau\Big) + O\Big(\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\int\limits_{\tau}^{t^*} s^\nu a^{h(s)}ds\,d\tau\Big) =$$

$$= O\Big(\int\limits_{t/a}^{t^*/a}(a\tau)^{\nu+\mu}a^{h(a\tau)}d\tau\Big) + O\Big(\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\tau^{\nu+\mu}a^{h(\tau)}d\tau\Big) = O(t^{\nu+2\mu-\lambda}a^{h(t)}),\quad t\to 0,$$

$$\frac{d}{dt}\{L_*[x_0](t) - x_0(t)\} = -cx_0(t) - dx_0(t/a) = O(t^{\nu+\mu}a^{h(t)}) +$$

$$+ O(t^{\nu+\mu-\lambda}a^{h(t)}) = O(t^{\nu+\mu-\lambda}a^{h(t)}),\quad t\to 0.$$

Определим множество функций $D^\mu\ \{\varphi\in C^1((0,\delta),\mathbb{R}) : \varphi(t) = O(t^{\nu+2\mu-\lambda}a^{h(t)})$ при $t\to +0$, $\dot\varphi(t) = O(t^{\nu+\mu-\lambda}a^{h(t)})$ при $t\to +0\}$, содержащее, в частности, $L_*[x_0](t) - x_0(t)$ при любом $\mu\in(0,1)$. Введение нормы

$$\|\varphi\|_{D^\mu} \overset{\text{def}}{=} \sup_{(0,\delta)}|t^{-\nu-2\mu+\lambda}a^{-h(t)}\varphi(t)| + \sup_{(0,\delta)}|t^{-\nu-\mu+\lambda}a^{-h(t)}\dot\varphi(t)| \tag{10}$$

превращает D^μ в полное метрическое пространство. Сходимость в норме (10) означает равномерную сходимость в C^1-норме на всяком замкнутом интервале $[\varepsilon,\delta]$ $\forall\varepsilon>0$.

Рассмотрим свойства оператора L_* на D^μ.

Лемма 1. *Если* $0<\lambda<\mu<1$ *и* $a>1$, *то* $L_* : D^\mu\to D^\mu$.

Доказательство. Для любой $\varphi\in D^\mu$ имеем

$$\begin{gathered} L_*[\varphi](t) = \varphi(t^*) + ab\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\tau^\lambda\dot\varphi(\tau)\,d\tau + a\int\limits_{t/a}^{t^*/a}(c\varphi(a\tau) + d\varphi(\tau))\,d\tau = \\ = \varphi(t^*) + O(t^{\nu+2\mu-\lambda}a^{h(t)}) + O(t^{\nu+3\mu-\lambda}a^{h(t)}) + O(t^{\nu+3\mu-2\lambda}a^{h(t)}) = \\ = O(t^{\nu+2\mu-\lambda}a^{h(t)}),\quad t\to +0; \\ \frac{d}{dt}L_*[\varphi](t) = -a^\lambda bt^\lambda\dot\varphi(t/a) - c\varphi(t) - d\varphi(t/a) = O(t^{\nu+\mu-\lambda}a^{h(t)}) + \\ + O(t^{\nu+2\mu-\lambda}a^{h(t)}) + O(t^{\nu+2\mu-2\lambda}a^{h(t)}) = O(t^{\nu+\mu-\lambda}a^{h(t)}),\quad t\to +0. \end{gathered} \tag{11}$$

Лемма 2. *Если* $0<\lambda<\mu<1$ *и* $a>1$, *то* $\forall\varphi\in D^\mu$

$$\|L_*[\varphi]\|_{D^\mu} < \rho\|\varphi\|_{D^\mu},\quad 0<\rho<1.$$

Доказательство. Оценим норму каждого из членов в правой части (11)

$$\|\varphi(t^*)\|_{D^\mu} = \begin{cases} 0, & \varphi(t)\equiv 0, \\ \|\varphi\|_{D^\mu}O(\delta^{-\nu-2\mu+\lambda}a^{-h(\delta)}), & \varphi(t)\not\equiv 0, \end{cases}$$

$$\Big\|ab\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\tau^\lambda\dot\varphi(\tau)\,d\tau\Big\|_{D^\mu} = a|b|\sup_{(0,\delta)}\Big|t^{-\nu-2\mu+\lambda}a^{-h(t)}\int\limits_{t/a}^{t^*/a}\tau^\lambda\dot\varphi(\tau)\,d\tau\Big| +$$

$$+ a^{-\lambda}|b|\sup_{(0,\delta)}|t^{-\nu-\mu+2\lambda}a^{-h(t)}\dot\varphi(t/a)|.$$

Обозначим соответственно через I_1 и I_2 члены в правой части этого равенства. Учитывая, что для любого $\mu' \in (0, 1)$ найдется $N = N_{\mu'} > 0$ такое, что $\left| \int\limits_{t/a}^{t^*/a} \tau^{\nu+\mu} a^{h(\tau)} d\tau \right| \leqslant N t^{\nu+\mu+\mu'} a^{h(t)}$, находим

$$I_1 \leqslant a |b| \sup_{(0,\delta)} \left| t^{-\nu-2\mu+\lambda} a^{-h(t)} \int\limits_{t/a}^{t^*/a} \tau^{\nu+\mu} a^{h(\tau)} \sup_{(0,\delta)} | \tau^{-\nu-\mu+\lambda} a^{-h(\tau)} \dot{\varphi}(\tau) | d\tau \leqslant \right.$$

$$\leqslant a |b| N \sup_{(0,\delta)} | t^{-\nu-2\mu+\lambda} a^{-h(t)} (t/a)^{\nu+\mu+\mu'} a^{h(t/a)} ((\sup_{(0,\delta)} | t^{-\nu-2\mu+\lambda} a^{-h(t)} \varphi(t) | +$$

$$+ \sup_{(0,\delta)} | t^{-\nu-\mu+\lambda} a^{-h(t)} \dot{\varphi}(t) |) \leqslant M \sup_{(0,\delta)} | t^{\mu'-\mu} | \| \varphi \|_{D^\mu} = O(\delta^{\mu'-\mu}) \| \varphi \|_{D^\mu} =$$

$$= o(1) \| \varphi \|_{D^\mu}, \quad \delta \to 0, \quad \mu' \in (\mu, 1),$$

и, аналогично,

$$I_2 \leqslant |b| \sup_{(0,\delta)} | t^{-\nu-\mu+\lambda} a^{-h(t)} (t/a)^{\nu+\mu} a^{h(t/a)} \sup_{(0,\delta)} | (t/a)^{-\nu-\mu+\lambda} a^{-h(t/a)} \dot{\varphi}(t/a) \| \leqslant$$

$$\leqslant a^{\lambda-\mu} \sup_{(0,\delta)} | t^{-\nu-\mu+\lambda} a^{-h(t)} \dot{\varphi}(t) | \leqslant a^{\lambda-\mu} \| \varphi \|_{D^\mu}.$$

Далее таким же образом находим

$$\left\| ac \int\limits_{t/a}^{t^*/a} \varphi(a\tau) d\tau \right\|_{D^\mu} \leqslant O(\delta^\mu) \| \varphi \|_{D^\mu} = o(1) \| \varphi \|_{D^\mu}, \quad \delta \to +0,$$

$$\left\| ad \int\limits_{t/a}^{t^*/a} \varphi(\tau) d\tau \right\|_{D^\mu} \leqslant O(\delta^{\mu-\lambda}) \| \varphi \|_{D^\mu} = o(1) \| \varphi \|_{D^\mu}, \quad \delta \to +0.$$

Следовательно, $\| L_* [\varphi](t) \|_{D^\mu} \leqslant (a^{\lambda-\mu} + g_3(\delta)) \| \varphi \|_{D^\mu}$, где $g_3(\delta) = o(1)$ при $\delta \to +0$. Так как $a > 1$ и $\lambda - \mu < 0$, то при достаточно малом $\delta < \delta_0$ справедливо неравенство $a^{\lambda-\mu} + g_3(\delta) < 1$, что и доказывает лемму 2.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заключаем, что, поскольку $L_* [x_0](t) - x_0(t)$ принадлежит классу D^μ при $\mu \in (\lambda, 1)$ и оператор L_* является сжимающим на D^μ при $\mu \in (\lambda, 1)$ и $\delta < \delta_0$, то ряд (9) равномерно сходится (в норме $\| \cdot \|_{D^\mu}$) при $t \in (0, \delta_0)$ и любой функции $\gamma(\theta)$, определенной равенством (2). Тогда и последовательные приближения (8) сходятся к точному решению $x_{\gamma(\cdot)}(t)$ уравнения (1) с асимптотикой (7). Теорема 3 доказана.

Из теорем 1—3 вытекает следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть в уравнении* (1) $a > 1$, $0 < \lambda < 1$. *Тогда общее решение уравнения* (1) *в некоторой окрестности критической точки* $t = 0$ *зависит от произвольной постоянной и произвольной периодической функции и может быть представлено в виде*

$$x(t) = \alpha + \int\limits_{t}^{t^*} \tau^\nu a^{h(\tau)} \gamma(\ln \tau / \ln a) d\tau + g_{\alpha, \gamma(\cdot)}(t), \tag{12}$$

где $\nu = \ln |b| / \ln a$, $h(t) = \dfrac{\lambda}{2} \dfrac{\ln t}{\ln a} (\ln t / \ln a - 1)$, t^* — *произвольно фиксированное достаточно малое число*, α — *произвольная постоянная*, γ — *произвольная функция со свойством* $\gamma(\theta + 1) = -\operatorname{sign} b \cdot (\gamma(\theta))$, $g_{\alpha,\gamma(\cdot)}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_0^{n+1}[\alpha] - L_0^n[\alpha] + \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_*^n [L_* [S[\gamma]] - S[\gamma]] = O(t), \quad t \to +0, S[\gamma] = \int\limits_{t}^{t^*} \tau^\nu a^{h(\tau)} \gamma(\ln \tau / \ln a) d\tau$, L_0, L_* — *операторы, определенные формулами* (5) *и* (6) *соответственно.*

Отметим, что эта теорема справедлива и в случае квазилинейных уравнений вида

$$\dot{x}(at) + t^{\lambda} b(t) \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(at)), \quad 0 < \lambda < 1, \quad a > 1,$$

с липшицевыми правыми частями f, $f(t, 0, 0) = 0$.

1. *Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н.* Асимптотика решений линейных дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений диф.-функцион. уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 5—39.
2. *Романенко Е. Ю., Фещенко Т. С.* Об асимптотическом поведении решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа в окрестности критической точки // Исследование диф. и диф.-разност. уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР 1980.— С. 107—121.
3. *Романенко Е. Ю.* Асимптотика решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 11.— С. 1526—1532.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.03.88