УДК 519.41/47

О. Ю. Дашкова

Разрешимые группы конечного неабелева ранга

Введено понятие неабелева ранга группы. Изучаются разрешимые группы конечного неабелева ранга и доказывается, что их (специальный) ранг конечен.

Введено поняття неабелева рангу групи. Вивчаються розв'язні групи скінченного неабелева рангу і доводиться, що їх (спеціальний) ранг скінченний.

1. Определение. *Пусть G — группа, $\mathcal{F}$ — некоторая система ее конечно порожденных подгрупп. $\mathcal{F}$-рангом группы G назовем такое наименьшее число r, что любая подгруппа системы $\mathcal{F}$ может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, $\mathcal{F}$-ранг группы G считается бесконечным.*

Отметим, что если $\mathcal{F}$ состоит из всех конечно порожденных подгрупп группы, то понятие $\mathcal{F}$-ранга совпадает с понятием специального ранга, введенного А. И. Мальцевым [1] и называемого обычно рангом группы. С другой стороны, конечность общего ранга группы [1] равносильна конечности $\mathcal{F}$-ранга группы для некоторой локальной системы конечно порожденных подгрупп этой группы.

В настоящей статье, так же как и в [2], изучаются группы конечного $\mathcal{F}$-ранга, где $\mathcal{F}$ — система всех неабелевых конечно порожденных подгрупп. В этом случае для краткости $\mathcal{F}$-ранг группы G будем называть *неабелевым рангом* и использовать для него обозначение $\bar{r}(G)$. Символом $r(G)$ обозначается, как это общепринято, специальный ранг группы G.

В [2] установлено, что конечность неабелева ранга $\bar{r}(G)$ влечет конечность ранга $r(G)$, если G является периодической локально разрешимой группой или локально нильпотентной группой без кручения. Основным результатом данной статьи является теорема.

Теорема. *Разрешимая группа конечного неабелева ранга имеет конечный ранг.*

Этот результат ранее был анонсирован в [3].

2. Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если K — неабелева нормальная подгруппа группы G, имеющей конечный неабелев ранг, то $r(G/K) \leqslant \bar{r}(G)$.*

Доказательство. Пусть H/K — произвольная конечно порожденная подгруппа группы G/K. Представим H в виде произведения $H = SK$, где S — некоторая неабелева конечно порожденная подгруппа. Из определения неабелева ранга группы G вытекает, что подгруппа S может быть порождена не более чем $\bar{r}(G)$ элементами. Отсюда ввиду соотношения $H = SK$ следует, что фактор-группа H/K также порождается не более чем $\bar{r}(G)$ элементами. Это доказывает требуемое соотношение $r(G/K) \leqslant \bar{r}(G)$.

Следствие. *Если группа G разложима в произведение $G = ZK$ центральной подгруппы Z и неабелевой подгруппы K, то $r(Z) \leqslant r(Z \cap K) + \bar{r}(G)$. При этом в случае $Z \cap K = 1$ $r(Z) \leqslant \bar{r}(G)$.*

Доказательство. Так как $G/K \simeq Z/Z \cap K$, то $r(Z) \leqslant r(Z \cap K) + r(G/K)$. Отсюда с учетом соотношения $r(G/K) \leqslant \bar{r}(G)$, доказанного в лемме 1, следует искомое неравенство.

Лемма 2. *Если G — неабелева конечная или разрешимая группа, то $r(Z(G)) \leqslant 3 + \bar{r}(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай конечной группы G. Выберем в G некоторую минимальную неабелеву подгруппу F (подгруппу Миллера — Морено). Из описания строения конечных минимальных неабелевых групп [4, с. 285, 309] вытекает, что ранг центра подгруппы F не превышает 3. Применяя к подгруппе $Z(G)F$ следствие леммы 1, получаем $r(Z(G)) \leqslant r(Z(G) \cap F) + \bar{r}(G) \leqslant 3 + \bar{r}(G)$.

Пусть теперь группа G разрешима и предположим, что $r(Z(G)) > 3 + \bar{r}(G)$. Выберем в центре $Z(G)$ группы G конечно порожденную подгруппу Z, удовлетворяющую соотношению

$$r(Z) > 3 + \bar{r}(G), \tag{1}$$

и в группе G — некоторую конечно порожденную метабелеву подгруппу H. Произведение $H_1 = ZH$ — конечно порожденная метабелева подгруппа. Пусть p такое простое число, что справедливо

$$r(Z) = r(Z/Z^p). \tag{2}$$

Воспользуемся утверждением о финитной аппроксимируемости конечно порожденных метабелевых групп, вытекающим из результатов Ф. Холла [5]. В соответствии с этим утверждением в подгруппе H_1 существует такая нормальная подгруппа M конечного индекса, что фактор-группа H_1/M неабелева, и в группе H_1/Z^p существует такая нормальная подгруппа N/Z^p

конечного индекса, что $Z \cap N = Z^p$. Фактор-группа $H_1/M \cap N$ является конечной неабелевой и ее центр содержит подгруппу $Z(M \cap N)/M \cap N$, изоморфную в силу соотношения $Z \cap N = Z^p$ фактору $Z/Z^p \cap M$. Поэтому из доказанного выше факта о конечных группах следует, что ранг фактора $Z/Z^p \cap M$ не превышает $3 + \bar{r}(G)$, а значит и $r(Z/Z^p) \leqslant 3 + \bar{r}(G)$. Это противоречит ввиду соотношения (2) предположению (1) о ранге подгруппы Z. Лемма доказана.

Лемма 3. *Сплетение W группы простого порядка p и бесконечной циклической группы имеет бесконечный неабелев ранг.*

Доказательство. Пусть A — база сплетения W, $W = A\langle g \rangle$, $\langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа, и $V = A\langle g^n \rangle$ — подгруппа сплетения W, где n — произвольное натуральное число. Подгруппа A разлагается в прямое произведение $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ таких g^n-допустимых подгрупп A_i, $i = 1, \ldots, n$, что произведение $A_i\langle g^n \rangle$ изоморфно группе W. Положим $B_1 = [A_1, g^n, g^n]$, $B_i = [A_i, g^n]$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Фактор-группа $\bar{V} = V/B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ обладает разложением $\bar{V} = \bar{A}\langle \bar{g}^n \rangle = (\bar{A}_1\langle \bar{g}^n \rangle) \times \times \bar{A}_2 \times \ldots \times \bar{A}_n$, где $\bar{A}_1\langle \bar{g}^n \rangle$ — неабелева группа, $|\bar{A}_i| = p$, $2 \leqslant i \leqslant n$. Применяя к группе $\bar{V}$ и ее подгруппе $\bar{A}_1\langle \bar{g}^n \rangle$ утверждение леммы 1, получаем $r(\bar{V}/\bar{A}_1\langle \bar{g}^n \rangle) = r(\bar{A}_2 \times \ldots \times \bar{A}_n) \leqslant \bar{r}(\bar{V}) \leqslant \bar{r}(W)$. Следовательно, $n - 1 \leqslant \bar{r}(W)$, и поэтому, ввиду произвольности числа n, неабелев ранг $\bar{r}(W)$ бесконечен.

Следствие. *Пусть группа G представима в виде произведения $G = A\langle g \rangle$, где A — ее периодическая абелева нормальная подгруппа. Если неабелев ранг группы G конечен, то A является объединением конечных нормальных в G подгрупп.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда A — p-группа, p — простое число, g — элемент бесконечного порядка. Покажем, что произвольный элемент $a \in A$ входит в конечную нормальную подгруппу группы G. Пусть p^n — порядок элемента a и $A^k = \langle (a^{p^k})^G \rangle$ — нормальное замыкание элемента a^{p^k}, $k = 0, 1, \ldots, n$, в группе G.

Рассмотрим ряд подгрупп

$$A_0 > A_1 > \ldots > A_n = 1 \tag{3}$$

и положим $\bar{G} = G/A_{k+1}$. Подгруппа $\bar{A}_k = A_k/A_{k+1}$ группы $\bar{G}$ является фактором ряда (3), порожденным элементами

$$\bar{g}^{-t}\bar{a}^{p^k}\bar{g}^t, \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

порядка p, исчерпывающими все множество сопряженных с элементом $\bar{a}^{p^k}$ в группе $\bar{G}$. Если множество элементов (4) бесконечно, то все его элементы различны, и поэтому подгруппа $\langle \bar{a}^{p^k}, \bar{g} \rangle$ изоморфна сплетению группы порядка p и бесконечной циклической группы. Ввиду леммы 3 неабелев ранг подгруппы $\langle \bar{a}^{p^k}, \bar{g} \rangle$ бесконечен, что противоречит конечности неабелева ранга группы G. Следовательно, множество элементов (4) конечно, и потому порождаемый им фактор $\bar{A}_k$ конечен. Этим доказано, что каждый фактор ряда (4) конечен, и, значит, конечна и нормальная подгруппа A_0 группы G, содержащая элемент a.

Лемма 4. *Пусть группа G представима в виде произведения $G = A\langle g \rangle$, где A — ее периодическая абелева нормальная подгруппа. Если неабелев ранг группы G конечен, то конечен и ее ранг.*

Доказательство. Предположим сначала, что элемент g индуцирует в подгруппе A автоморфизм конечного порядка, т. е. $g^s \in C_G(A)$ при некотором $s > 0$. Так как по следствию леммы 3 A является объединением конечных нормальных в группе G подгрупп, то конечность ранга группы G будет установлена, если доказать, что ранг произвольной конечной подгруппы B, содержащейся в A и нормальной в G, не превышает $\bar{r}(G)s + 1$.

Рассмотрим подгруппу $B\langle g\rangle$. Если она абелева, то $B \leqslant Z(G)$ и тогда по лемме 2 $r(B) \leqslant \bar{r}(G) + 3$ и тем самым $r(B) \leqslant \bar{r}(G)\, s + 1$. Если подгруппа $B\langle g\rangle$ неабелева, то по определению неабелева ранга группы $B\langle g\rangle$ порождается некоторыми элементами $x_1, \dots, x_n$, $n \leqslant \bar{r}(G)$. Представим элемент x_i в виде $x_i = a_i g_i$, где $a_i \in B$, $g_i \in \langle g\rangle$ и положим $B_0 = \langle a_1^G\rangle \dots \langle a_n^G\rangle$, здесь $\langle a_i^G\rangle$ обозначает нормальное замыкание элемента a_i. Так как $g^s \in C_G(A)$, то a_i имеет в группе G не более s сопряженных элементов и потому $r(\langle a_i^G\rangle) \leqslant s$, $r(B_0) \leqslant ns \leqslant \bar{r}(G)\, s$. Учитывая, что $B \leqslant B_0\langle g\rangle$, приходим к искомому неравенству $r(B) \leqslant \bar{r}(G)\, s + 1$.

Пусть теперь g индуцирует в подгруппе A автоморфизм бесконечного порядка, т. е. при любом $s > 0$ подгруппа $A\langle g^s\rangle$ неабелева, и B обозначает произвольную конечную подгруппу, содержащуюся в A и нормальную в группе G. Положим $\langle g^l\rangle = C_{\langle g\rangle}(B)$, $l > 0$. Подгруппа $A\langle g^l\rangle$ неабелева, и поэтому по лемме 2 ранг ее центра не превышает $3 + \bar{r}(G)$. Но подгруппа B входит в центр подгруппы $A\langle g^l\rangle$, следовательно, $r(B) \leqslant 3 + \bar{r}(G)$. Ввиду произвольности подгруппы B этим доказано, что $r(A) \leqslant 3 + \bar{r}(G)$ и поэтому ранг группы G конечен. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если A — абелева группа без кручения бесконечного ранга, G — ее неединичная полициклическая группа автоморфизмов, то в A существует периодический G-фактор, имеющий бесконечный ранг, причем G в нем действует нетождественно.*

Доказательство. Отметим, следуя Ф. Холлу [5], некоторые свойства конечно порожденных модулей над полициклическими группами, которые будут использоваться в доказательстве. Пусть B — конечно порожденный G-модуль, G — полициклическая группа, действующая в B нетождественно. Тогда по определению B принадлежит классу $\mathfrak{B}$ абелевых групп, введенному Ф. Холлом. В соответствии с одним из основных свойств групп класса $\mathfrak{B}$ группа B входит в класс $\mathfrak{A}(\pi)$, где π — некоторое конечное множество простых чисел (лемма 5.2 [5]). Это означает, что в B существует такая свободная абелева подгруппа F, что B/F — π-группа. Справедливы следующие утверждения:

а) если B — группа без кручения, то существует такое простое $p \notin \pi$, что группа G действует в факторе B/pB нетождественно;

б) пусть B — группа без кручения, $p \notin \pi$; тогда, если ранг $r(B)$ бесконечен, то бесконечен и фактор B/pB, а если $r(B)$ конечен, то $r(B) = r(B/pB)$;

в) существует такое $n > 0$, что nB — группа без кручения. Действительно, утверждение а) — это следствие соотношения $\bigcap\limits_{p \notin \pi} pB = 0$, вытекающего из леммы 12 [5]. Чтобы убедиться в справедливости утверждения б), достаточно воспользоваться изоморфизмом $B/pB \simeq F/pF$. Утверждение в) вытекает из того, что периодическая часть группы B имеет конечный период и выделяется в B прямым слагаемым (лемма 8 [5]).

Перейдем непосредственно к доказательству леммы, при этом рассматривая A как G-модуль и используя для записи операции в A аддитивную запись. Предположим сначала, что A обладает конечно порожденным G-подмодулем B_1, ранг которого $r(B_1)$ бесконечен. Тогда в соответствии с утверждением б) существует такое простое p_1, что фактор B_1/p_1B_1 бесконечен. Этот фактор искомый.

Пусть теперь ранг каждого конечно порожденного G-подмодуля в A конечен и B_1 — один из таких подмодулей, причем в B_1 группа G действует нетождественно. Покажем, что B_1 можно включить в такой конечно порожденный подмодуль B_2, что группа B_2/B_1 не имеет кручения и $r_1 < r_2$, где $r_1 = r(B_1)$, $r_2 = r(B_2/B_1)$. В самом деле, включим сначала B_1 в некоторый конечно порожденный подмодуль C, ранг которого удовлетворяет соотношению $r(C) > 2r_1$, и рассмотрим G-модуль C/B_1. Ввиду приведенного выше утверждения в) группа $nC + B_1/B_1$ при подходящем n не имеет кручения. Обозначив $B_2/B_1 = nC + B_1/B_1$, видим, что B_2 — конечно порожденный подмодуль и $r_2 = r(B_2/B_1) = r(B_2) - r(B_1) = r(C) - r_1 > 2r_1 - r_1 = r_1$, т. е. $r_2 > r_1$. Таким образом, подмодуль B_2 с требуемым свойством построен.

Далее, тем же способом устанавливается, что B_2 входит в такой конечно порожденный подмодуль B_3, что группа B_3/B_2 не имеет кручения и $r(B_2) = r_1 + r_2 < r_3 = r(B_3/B_2)$, при этом в частности $r_2 < r_3$. Процесс построения подмодулей $B_1, B_2, B_3, \ldots$ можно продолжить неограниченно, так как ранг группы A бесконечен. В результате построим возрастающую цепь конечно порожденных G-подмодулей

$$B_0 = 0 < B_1 < B_2 < \ldots < B_k < \ldots, B = \bigcup_k B_k, \tag{5}$$

факторы которой B_k/B_{k-1} — группы без кручения, их ранги конечны и возрастают

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots, r_k = r(B_k/B_{k-1}). \tag{6}$$

Ввиду утверждения б) для каждого фактора B_k/B_{k-1} можно найти такое простое число p_k, что $r_k = r(B_k/B_{k-1}) = r(B_k/p_kB_k + B_{k-1})$. При этом в соответствии с утверждением а) можно считать, что группа G действует в факторе B_1/p_1B_1 нетождественно.

Рассмотрим фактор-группу $B/p_kB_k + B_{k-1}$. Так как факторы цепи (5) не имеют кручения, то периодическая часть этой фактор-группы совпадает с $B_k/p_kB_k + B_{k-1}$, следовательно, она конечна и поэтому может быть выделена в $B/p_kB_k + B_{k-1}$ прямым слагаемым

$$B/p_kB_k + B_{k-1} = B_k/p_kB_k + B_{k-1} \oplus V_k/p_kB_k + B_{k-1}, \tag{7}$$

где V_k — подгруппа, не обязательно являющаяся G-подмодулем. Положим

$$U_k = p_kB + B_{k-1}. \tag{8}$$

Из соотношения (7) следует, что $p_kB \leqslant V_k$, значит, $U_k \leqslant V_k$ и поэтому группа B/U_k имеет гомоморфный образ, изоморфный первому слагаемому прямого разложения (7). Отсюда вытекает, что $r(B/U_k) \geqslant r(B_k/p_kB_k + B_{k-1}) = r_k$.

Обозначим через U пересечение всех подгрупп U_k и покажем, что B/U — искомый периодический G-фактор бесконечного ранга. Действительно, как отмечено выше, $r(B/U_k) \geqslant r_k$, а, значит, $r(B/U) \geqslant r_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому ввиду возрастания чисел r_k (6) ранг группы B/U бесконечен. Далее, если $b \in B$, то в силу соотношения (5) $b \in B_n$ при некотором n. Соотношение (8) показывает, что $p_kb \in p_kB < U_k$, и, следовательно, $p_1p_2 \ldots p_nb \in U_k$ при $k \leqslant n$. Если $k > n$, то по определению (8) подгруппы U_k имеет место включение $B_n \leqslant B_{k-1} < U_k$, и тогда $b \in U_k$, а значит, $p_1p_2 \ldots p_nb \in U_k$ при $k > n$. Этим доказано, что элемент $p_1p_2 \ldots p_nb$ принадлежит каждой подгруппе U_k, $k = 1, 2, \ldots$, а значит, и их пересечению U. Таким образом, фактор B/U периодический.

Осталось заметить, что, так как группа G действует в факторе B_1/p_1B_1 нетождественно, то нетождественно G действует и в факторе B/U в силу соотношений (7), (8) при $k = 1$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть группа G представима в виде произведения $G = A\langle g\rangle$, где A — ее нормальная абелева подгруппа без кручения. Если неабелев ранг группы G конечен, то конечен и ее ранг.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ранг подгруппы A бесконечен, то по лемме 5 в A существует периодический G-фактор B/C, ранг которого бесконечен, и элемент g действует в B/C нетождественно. Применяя к группе $B\langle g\rangle/C$ лемму 4, получаем конечность ранга фактора B/C. Полученное противоречие завершает доказательство.

3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Выберем в G нормальную метабелеву подгруппу H (например, предпоследний отличный от единицы член ряда коммутантов группы G). Так как по лемме 1 $r(G/H) < \infty$, то задача сводится к доказательству конечности ранга подгруппы H.

Обозначим через A коммутант подгруппы H и через T — периодическую часть абелевой подгруппы A. Если A/T — центральный фактор подгруппы H, то, ввиду леммы 2, примененной к фактору H/T, ранг A/T не превышает $3 + \bar{r}(G)$. Если же A/T — нецентральный фактор H, то существует такой элемент $h \in H$, что группа $A\langle h\rangle/T$ неабелева. Учитывая, что A/T — группа без кручения и используя следствие леммы 5, получаем конечность ранга группы A/T. Конечность ранга подгруппы T устанавливается аналогичными рассуждениями, только здесь необходимо вместо следствия леммы 5 использовать лемму 4. Тем самым конечность ранга подгруппы A доказана.

Выберем в H некоторую подгруппу K, порожденную двумя неперестановочными элементами. Подгруппа AK неабелева и поэтому по лемме 1 ранг фактор-группы H/AK конечен. Вместе с тем ранг фактор-группы AK/A не превышает 2. Значит, ранг фактор-группы H/A конечен, что с учетом установленной выше конечности ранга подгруппы A доказывает конечность ранга подгруппы H. Теорема доказана.

1. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб.— 1948.— **22**, № 2.— С. 351—352.
2. *Дашкова О. Ю.* Группы конечного неабелева ранга // Материалы XXIV Всесоюз. науч. студ. конф. : Математика.— Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1986.— С. 14—17.
3. *Дашкова О. Ю.* О группах конечного неабелева ранга // XIX Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. сообщ.— Львов: Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, 1987.— Ч. 2.— С. 81—82.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen I.— Berlin etc.: Springer, 1967.— 793 s.
5. *Холл Ф.* О конечности некоторых разрешимых групп // Разрешимые и простые бесконеч. группы.— М. : Мир, 1981.— С. 171—206.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.12.88