УДК 517.3

С. Ф. Морозов

Начально-краевая задача для одной нелинейной интегро-дифференциальной системы

Устанавливаются теоремы существования и единственности обобщенного решения для начально-краевой задачи нелинейной интегро-дифференциальной системы уравнений.

Встановлюються теореми існування та єдиності узагальненого розв'язку для початково-крайової задачі нелінійної інтегро-диференціальної системи рівнянь.

При изучении задач динамики излучающего газа [1—3] в одномерном по пространственным переменным случае возникают задачи, которые в общей математической постановке сводятся к исследованию нелинейных интегро-дифференциальных систем следующего вида:

$$\partial\psi(x, t, \nu, \omega)/\partial t + \omega\partial\psi(x, t, \nu, \omega)/\partial x = F_0\Big(x, t, \psi, \varphi, \int_0^{\nu_0}\int_{-1}^{1} K(x, t, \nu, \omega, \nu', \omega') \times \times \psi(x, t, \nu', \omega')\, d\nu' d\omega'\Big), \quad (1)$$

© С. Ф. МОРОЗОВ, 1990

$$\partial\varphi_k(x,t)/\partial t + \lambda_k(x,t)\,\partial\varphi_k(x,t)/\partial x = F_k\Big(x,t,\varphi,\int_0^{v_0}\int_{-1}^{1}\Gamma(x,t,v',\omega')$$

$$\psi(x,t,v',\omega')\,dv'd\omega'\Big),\ k=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$\psi(x,0,v,\omega)=\omega(x,v,\omega),\ x\in[-a,a],\ v\in[0,v_0],\ \omega\in[-1,1], \tag{3}$$

$$\psi(-a,t,v,\omega)=h_1(t,v,\omega),\ t\in[0,T],\ v\in[0,v_0],\ \omega\in[0,1], \tag{4}$$

$$\psi(a,t,v,\omega)=h_2(t,v,\omega),\ t\in[0,T],\ v\in[0,v_0],\ \omega\in[-1,0]; \tag{5}$$

$$\varphi_k(x,0)=g_k(x),\ x\in[-a,a],\ k=1,2,\ldots,m, \tag{6}$$

$$\begin{cases}\varphi_k(-a,t)=h_{-ak}(t), & t\in S_{-ak},\\ \varphi_k(a,t)=h_{ak}(t), & t\in S_{ak}.\end{cases}\quad k=1,2,\ldots,m. \tag{7}$$

В настоящей статье устанавливаются теоремы существования и единственности обобщенного решения для начально-краевой задачи (1)—(7), а также теорема устойчивости по возмущению параметра, входящего в правую часть уравнений системы (1), (2). Такие теоремы необходимы, в частности, при рассмотрении оптимизационных задач теории переноса (см., например, [4]).

1. Обозначим через $G\equiv\{(x,t):-a\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $V\equiv\{v,\omega):0\leqslant v\leqslant v_0,\quad -1\leqslant\omega\leqslant 1\}$, $D\equiv\{(x,t,v,\omega):(x,t)\in G,\ (v,\omega)\in V\}$, $\varphi\equiv\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m\}$, $F\equiv\{F_1,\ldots,F_m\}$, $\Gamma\equiv\{\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m\}$.

Пусть функции $K(x,t,v,\omega,v',\omega')$, $(x,t,v,\omega)\in D$, $(v',\omega')\in V$, $\Gamma_k(x,t,v,\omega)$, $(x,t,v,\omega)\in D$, $k=1,2,\ldots,m$, $\omega(x,v,\omega)$, $x\in[-a,a]$, $(v,\omega)\in V$; $h_1(t,v,\omega)$, $t\in[0,T]$, $v\in[0,v_0]$, $\omega\in[0,1]$, $h_2(t,v,\omega)$, $t\in[0,T]$, $v\in[0,v_0]$, $\omega\in[-1,0]$, $g_k(x)$, $x\in[-a,a]$, $k=1,2,\ldots,m$; $h_{-ak}(t)$, $h_{ak}(t)$, $t\in[0,T]$, $k=1,2,\ldots,m$; измеримы и ограничены в своих областях определения.

Пусть функция $F_0(x,t,\psi,\varphi,\xi)$ определена при $(x,t)\in G$, $\psi\in R^1$, $\varphi\in R^m$, $\xi\in R^1$, измерима по совокупности переменных (x,t,ψ,φ,ξ), непрерывно дифференцируема по (ψ,φ,ξ) при почти всех $(x,t)\in G$ и удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е *A*. Существуют неубывающие функции действительного переменного $N_1(M)$ и $N_2(M)$ такие, что для любого множества $S_{m+2}^{(M)}\equiv\{(\psi,\varphi,\xi):\psi\in R^1,\varphi\in R^m\ \xi\in R^1,|\psi|+|\varphi|+|\xi|<M\}$, $M<\infty$, при почти всех $(x,t)\in G$ справедливы оценки

$$|F'_{0\psi}|+|F'_{0\varphi}|+|F'_{0\xi}|\leqslant N_1(M)<\infty,\quad |F_0|\leqslant N_2(M)<\infty. \tag{8}$$

Пусть вектор-функция $F(x,t,\varphi,\xi)$ определена при $(x,t)\in G$, $\varphi\in R^m$ $\xi\in R^m$, измерима по совокупности переменных (x,t,φ,ξ), непрерывно дифференцируема по (φ,ξ) при почти всех $(x,t)\in G$ и удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е *B*. Существуют неубывающие функции действительного переменного $N_3(M)$ и $N_4(M)$ такие, что для любого множества $S_{m+1}^{(M)}\equiv\{(\psi,\xi):\varphi\in R^m,\ \xi\in R^m,\ |\varphi|+|\xi|<M\}$, $M<\infty$, при почти всех $(x,t)\in G$ справедливы оценки

$$|F'_\varphi|+|F'_\xi|\leqslant N_3(M)<\infty,\quad |F|\leqslant N_4(M)<\infty. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_1(x,t)<\lambda_2(x,t)<\ldots<\lambda_m(x,t)$, $(x,t)\in G$. Непрерывные функции $\lambda_k(x,t)$, $(x,t)\in G$, $k=1,2,\ldots,m$, обеспечивают единственность в сторону убывания решения задачи $dx_k/d\tau=\lambda_k(x,\tau)$, $x_k|_{\tau=t_0}=x_0$, $k=1,2,\ldots,m$, определяющей характеристики $(l_k):x=x_k(x_0,t_0,\tau)$ системы уравнений (2). Пусть $t_k(x_0,t_0)$ — наименьшее значение t для (l_k), $0\leqslant t_k=t_0$; тогда, если $t_k(x_0,t_0)>0$, то $x_k(x_0,t_0,t_k(x_0,t_0))$ равно либо $-a$, либо a. Обозначим через S_{-ak} (соответственно $S_{a,k}$) множество значений $t\in[0,T]$, для которых точка $(-a,t)$ $((a,t))$ служит началом характеристики k-семейства, т. е. существует $(x_0, t_0) \in G$, для которой $t_k(x_0, t_0) = t$, $x_k(x_0, t_0, t_k(x_0, t_0)) = -a (= a)$. Некоторые из множеств S_{-ak}, S_{ak} могут быть пустыми.

Определим теперь характеристику $\{l_\omega\}$ дифференциального оператора, стоящего в левой части (1), системой уравнений $dt = dx/\omega = d\nu/0 = d\omega/0$. Проекция характеристики $\{l_\omega\}$ на $R^2(x, t)$, проходящая в момент времени t_0 через точку x_0 в направлении ω, задается уравнением $x = x_\omega(x_0, t_0, \tau) \equiv \{x = x_0 + \omega(\tau - t_0)\}$. Пусть $t_\omega(x_0, t_0)$ — наименьшее значение t для (l_ω), $0 \leqslant t_\omega \leqslant t_0$; тогда, если $t_\omega(x_0, t_0) > 0$, то $x_\omega(x_0, t_0, t_\omega(x_0, t_0))$ равно либо $-a$, $0 < \omega \leqslant 1$, либо a, $-1 \leqslant \omega < 0$.

2. Пусть $H^m_\infty(G_\sigma)$ — пространство вектор-функций $\varphi(x, t) \equiv \{\varphi_1(x, t), \ldots, \varphi_m(x, t)\}$, абсолютно-непрерывных по переменной $t \in [0, \sigma]$ в направлении почти каждой характеристики (l_k) $x = x_k(\xi, \tau, t)$ в $G_\sigma \equiv \{(x, t): -a \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant \sigma\}$, $(d/dt)_k = \partial/\partial t + \lambda_k \partial/\partial x$ с нормой $\|\varphi\|_{H^m_\infty(G_\sigma)} = \|\varphi\|_{L^m_\infty(G_\sigma)} + \|d\varphi/dt\|_{L^m_\infty(G_\sigma)}$.

Пусть $\mathcal{P}_\infty(D_\sigma)$* — пространство функций $\psi = \psi(x, t, \nu, \omega)$ из $L_\infty(D_\sigma)$ абсолютно-непрерывных по t вдоль почти каждой в $D_\sigma \equiv \{(x, t, \nu, \omega): -a \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant t \leqslant \sigma,\ (\nu, \omega) \in V\}$ характеристики l_ω, $d/dt = \partial/\partial t + \omega\partial/\partial x$, с нормой $\|\psi\|_{\mathcal{P}_\infty(D_\sigma)} = \|\psi\|_{L_\infty(D_\sigma)} + \|d\psi/dt\|_{L_\infty(D_\sigma)}$.

Рассмотрим начально-краевую задачу (1) — (7). Обобщенным решением задачи (1) — (7) назовем вектор-функцию $u(x, t, \nu, \omega) \equiv \{\psi(x, t, \nu, \omega), \varphi(x, t)\} \equiv \{\psi(x, t, \nu, \omega), \varphi_1(x, t), \ldots, \varphi_m(x, t)\} \in \mathcal{P}_\infty(D_\sigma) \times H^m_\infty(G_\sigma)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2), начальным и граничным условиям (3) — (7) почти всюду.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции K, Γ_k, ω, h_1, h_2, g_k, h_{-ak}, h_{ak}, $k = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяют условиям п. 1. Тогда существует ν, $0 < \nu \leqslant T$, такое, что задача (1) — (7) имеет единственное в $\mathcal{P}_\infty(D_\nu) \times H^m_\infty(G_\nu)$ решение.*

Данная теорема непосредственно следует из теоремы 2 п. 3.

3. Обозначим через

$$\tilde{\varphi}_k(x, t) \equiv \varphi_k(x_k(x, t, t_k(x, t), t_k(x, t)) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} h_{-ak}(t_k(x, t)) \text{ или } h_{ak}(t_k(x, t)), \text{ если } t_k(x, t) > 0, \\ g_k(x_k(x, t, 0)), \text{ если } t_k(x, t) = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x, t, \nu, \omega) \equiv \psi(x_\omega(x, t, t_\omega(x, t)), t_\omega(x, t), \nu, \omega) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} h_1(t_\omega(x, t), \nu, \omega) \text{ или } h_2(t_\omega(x, t), \nu, \omega), \text{ если } t_\omega(x, t) > 0, \\ \omega(x_\omega(x, t, 0), \nu, \omega), \text{ если } t_\omega(x, t) = 0. \end{cases}$$

Введем операторы $A_0: L_\infty(D) \to L_\infty(D)$; $A_k: L_\infty(G) \to L_\infty(G)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $A_{m+1}: L_\infty(D) \to L_\infty(D)$; $A_{m+2}: L_\infty(D) \to L_\infty(G)$ формулами

$$A_0(\xi)(x, t, \nu, \omega) = \int_{t_\omega(x, t)}^{t} \xi(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega)\, d\tau, \quad A_k(\xi)(x, t) =$$

$$= \int_{t_k(x, t)}^{t} \xi(x_k(x, t, \tau), \tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad A_{m+1}(\xi)(x, t, \nu, \omega) =$$

$$= \int_0^{\nu_0} \int_{-1}^{1} \left[K(x, t, \nu, \omega, \nu', \omega') \int_{t_{\omega'}(x, t)}^{t} \xi(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu', \omega')\, d\tau\right] d\nu' d\omega',$$

$$A_{m+2}(\xi)(x, t) = \int_0^{\nu_0} \int_{-1}^{1} \left[\Gamma(x, t, \nu', \omega') \int_{t_{\omega'}(x, t)}^{t} \xi(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu', \omega')\, d\tau\right] d\nu' d\omega'.$$

---

* Аналогичные пространства введены В. С. Владимировым [5].

Введем пространство $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu) = \mathcal{P}_\infty(D_\nu) \times H_\infty^m(G_\nu)$ вектор-функций $v(x, t, \nu, \omega) \equiv \{v_0(x, t, \nu, \omega), v_1(x, t), \ldots, v_m(x, t)\} \equiv (v_0(x, t, \nu, \omega), \bar{v}(x, t)\}$, $v_0(x, t, \nu, \omega) \in L_\infty(D_\nu)$, $\bar{v}(x, t) \equiv \{v_1(x, t), \ldots, v_m(x, t)\} \in L_\infty^m(G_\nu)$ с нормой $\|v\|_\nu = \|v\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)} = \|v_0\|_{L_\infty(D_\nu)} + \|\bar{v}\|_{L_\infty^m(G_\nu)}$ и оператор $A: \mathcal{L}^{m+1}(D) \to L_\infty(D) \times L_\infty^m(G) \times L_\infty(D) \times L_\infty(D)$ формулой

$$A(v)(x, t, \nu, \omega) \equiv \{A_0(v_0)(x, t, \nu, \omega), A_1(v_1)(x, t), \ldots, A_m(v_m)(x, t),$$
$$A_{m+1}(v_0)(x, t, \nu, \omega), \quad A_{m+2}(v_0)(x, t, \nu, \omega)\}, \quad v \in \mathcal{L}^{m+1}(D).$$

Соотношения

$$\psi(x, t, \nu, \omega) = \tilde{\psi}(x, t, \nu, \omega) + \int_{t_\omega(x,t)}^{t} v_0(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega)\, d\tau, \tag{10}$$

$$\varphi_k(x, t) = \tilde{\varphi}_k(x, t) + \int_{t_k(x,t)}^{t} v_k(x_k(x, t, \tau), \tau)\, d\tau, \tag{11}$$

$k = 1, 2, \ldots, m$, устанавливают взаимно однозначное соответствие между элементами $v = \{v_0, \bar{v}\} \in \mathcal{L}^{m+1}(D)$ и удовлетворяющими условиям (3)—(7) элементами $u = \{\psi, \varphi\} \in \mathcal{P}_\infty(D) \times H_\infty^m(G)$. В силу соотношений (10), (11) начально-краевая задача (1)—(7) эквивалентна следующему функциональному уравнению:

$$v(x, t, \nu, \omega) = f(x, t, \nu, \omega, A(v)(x, t, \nu, \omega)), \tag{12}$$

где $f(x, t, \nu, \omega) = \{f_0(x, t, \nu, \omega, a), \ f_1(x, t, a), \ldots, f_m(x, t, a)\}$ определена при $(x, t, \nu, \omega) \in D$, $a \in R^{2m+2}$ равенствами

$$f_0(x, t, \omega, \nu, a) = F_0(x, t, \bar{\psi}(x, t, \nu, \omega) + a^{(0)}, \tilde{\varphi}_1(x, t) + a^{(1)}, \ldots, \tilde{\varphi}_m(x, t) + a^{(m)},$$
$$\int_0^{\nu_0}\int_{-1}^{1} K(x, t, \nu, \omega, \nu', \omega')\, \tilde{\psi}(x, t, \nu', \omega')\, d\nu' d\omega' + a^{(m+1)}), \quad f_k(x, t, a) =$$
$$= F_k(x, t, \tilde{\varphi}_1(x, t) + a^{(1)}, \ldots, \tilde{\varphi}_m(x, t) + a^{(m)}, \quad \int_0^{\nu_0}\int_{-1}^{1} \Gamma(x, t, \nu', \omega') \times$$
$$\times \tilde{\psi}(x, t, \nu', \omega')\, d\nu' d\omega' + a^{(m+2)}), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad a \equiv \{a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, a^{(m)}, a^{(m+1)}, a^{(m+2)}\}, \quad a^{(m+2)} \equiv \{a_1^{(m+2)}, \ldots, a_m^{(m+2)}\}.$$

В силу условий A, B и ограниченности функций $K, \Gamma_k, g_k, \omega, h_1, h_2, h_{-ak}, h_{ak}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, для вектор-функции $f(x, t, \nu, \omega, a)$ выполняется следующее условие.

Условие *C*. Существуют неубывающие функции $N_5(M)$ и $N_6(M)$ такие, что для любого множества $S_{3m+2}^{(M)} \equiv \{(a): a \in R^{3m+2}, |a| < M\}$, $M < \infty$, при почти всех $(x, t, \nu, \omega) \in D$ справедливы оценки

$$|f_a'| \leqslant N_5(M) < \infty, \quad |f| \leqslant N_6(M) < \infty. \tag{13}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции K, Γ_k, ω, h_1, h_2, g_k, ω, h_{-ak}, h_{ak} удовлетворяют условиям п. 1. Тогда существует ν, $0 < \nu \leqslant T$, такое, что функциональное уравнение* (12) *имеет единственное в $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$ решение $v(x, t, \nu, \omega)$. В качестве ν можно взять, например, любое число, удовлетворяющее хотя бы при одном M неравенству*

$$\Sigma \nu N_6(M) < M, \tag{14}$$

где $\Sigma = m + 1 + 2\nu_0(\|K\|_{L_\infty(D)} + \|\Gamma\|_{L_\infty(D)})$.

При этом для решения $v(x, t, \nu, \omega) \in \mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$ справедлива оценка

$$\| v \|_\nu \leqslant N_6(M). \tag{15}$$

4. Доказательству теоремы 2 предпошлем следующую лемму (см., например, [6], с. 90—92).

Лемма 1. *Пусть E — банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$; $B: E \to E$ — линейный ограниченный оператор со спектральным радиусом $\rho(B) \geqslant 0$; ε — фиксированное положительное число. В пространстве E существует такая норма $\| \cdot \|_*$, эквивалентная норме $\| \cdot \|$, что $\| B(z) \|_* \leqslant \leqslant (\rho(B) + \varepsilon) \| z \|_*$, $z \in E$.*

Пусть, кроме того, норма $\| \cdot \|$ монотонна относительно полуупорядоченности E по некоторому конусу $K \in E$. Если конус K инвариантен относительно оператора B, то существует обладающая указанными выше свойствами норма $\| \cdot \|_*$, монотонная относительно полуупорядоченности E по конусу K.

5. Доказательство теоремы 2. Зафиксируем произвольное положительное M и некоторое число ν, $0 < \nu \leqslant T$, удовлетворяющее неравенству (14). Покажем, что уравнение (12) единственным образом разрешимо в $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$. Применим метод сжатых отображений.

Возьмем в $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$ замкнутое множество W функций v, удовлетворяющих условию (15). В силу (14) оператор $F: \mathcal{L}^{m+1}(D_\nu) \to \mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$, определенный формулой $\mathcal{F}(v)(x, t, \nu, \omega) = f(x, t, \nu, \omega, A(v)(x, t, \nu, \omega))$, $v \in \mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$, переводит W само в себя. Покажем, что существует эквивалентная норма $\|\cdot\|_\nu$ пространства $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$, норма $\| \cdot \|_0$, в которой оператор $\mathcal{F}$ является сжимающим на W.

С этой целью возьмем два произвольных элемента $v = \{v_0, \bar{v}\}$ и $v' = \{v_0', \bar{v}'\}$ из W. Справедливы неравенства

$$| \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(v) | \leqslant N_5(M) | A(v') - A(v) | \leqslant N_5(M) [1 + \| K \|_{L_\infty(D)} + \|\Gamma\|_{L_\infty^m(G)}] \times$$
$$\times \Big\{ \int_{t_\omega(x,t)}^{t} | v_0(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega) - v_0'(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega) | d\tau +$$
$$+ \int_0^{\nu_0} \int_{-1}^{1} d\nu' d\omega' \int_{t_{\omega'}(x,t)}^{t} | v_0(x_{\omega'}(x, t, \tau), \tau, \nu', \omega') - v_0'(x_{\omega'}(x, t, \tau), \tau, \nu', \omega') | d\tau +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{t_k(x,t)}^{t} | v_k(x_k(x, t, \tau), \tau) - v_k'(x_k(x, t, \tau), \tau) | d\tau \leqslant C_1(M, \| K \|, \| \Gamma \|) \times$$
$$\times B(| v - v' |), \tag{16}$$

где C_1 — постоянная, B — интегральный оператор, определенный формулой

$$B(\xi)(x, t, \nu, \omega) = \int_{t_\omega(x,t)}^{t} \xi(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega) d\tau + \int_0^{\nu_0} \int_{-1}^{1} d\nu' d\omega' \times$$
$$\times \int_{t_{\omega'}(x,t)}^{t} \xi(x_\omega(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega) d\tau + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_k(x,t)}^{t} \xi(x_k(x, t, \tau), \tau, \nu, \omega) d\tau,$$
$$\xi \in L_\infty(D_\nu), \quad B: L_\infty(D_\nu) \to L_\infty(D_\nu).$$

Справедлива следующая оценка:

$$\| B^n \| \leqslant \frac{1}{n!} [(3n)^n, \max\{1, m^n, (2\nu_0)^n\}], \quad n = 1, 2, \dots.$$

Поэтому спектральный радиус $\rho(B) = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| B^n \|} = 0$.

Применим к положительному оператору $B: L_\infty(D_\nu) \to L_\infty(D_\nu)$ лемму 1. В силу этой леммы существует норма $\|\cdot\|_*$, монотонная относительно полуупорядоченности $L_\infty(D_\nu)$ по конусу неотрицательных функций, такая, что $\|B(\xi)\|_* \leqslant (2C_1)^{-1}\|\xi\|_*$, $\xi \in L_\infty(D_\nu)$.

Из последней оценки и неравенства (16) ввиду монотонности $\|\cdot\|$ следует

$$\||\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(v')|\|_* \leqslant C_1\|B(|v - v'|)\| \leqslant \frac{1}{2}\||v - v'|\|_*. \tag{17}$$

Вводя в пространстве $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$ новую норму $\|\cdot\|_0$ по формуле $\|v\|_0 \equiv \||v|\|_*$, $v \in \mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$, из (17) получаем $\|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(v')\|_0 \leqslant \frac{1}{2}\|v - v'\|_0$.

Таким образом, оператор $\mathcal{F}$ — сжимающий на W в норме $\|\cdot\|_0$. Поэтому уравнение (12) имеет на W единственное решение v.

Докажем единственность полученного решения во всем пространстве $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$. Предположим, что $v_1(x, t, \nu, \omega)$ — второе решение уравнения (12) в $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$

$$v_1(x, t, \nu, \omega) = f(x, t, \nu, \omega, A(v_1)(x, t, \nu, \omega)). \tag{18}$$

Вычитая (18) из (12), применяя покомпонентно теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем, что разность $z = v - v_1$ удовлетворяет однородному уравнению

$$z = C(z), \tag{19}$$

где $C = \operatorname{col}\{F'_{0a}(x, t, \nu, \omega, A(v_1) + \Theta_0 A(v_1 - v)), \ldots, F'_{ma}(x, t, \nu, \omega, A(v_1) + \Theta_m A(v_1 - v))\}$, $0 \leqslant \Theta_i \leqslant 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$.

Из свойств функций $f_0, f_1, \ldots, f_m$ и вида оператора A следует, что правая часть уравнения (19) представляет собой линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{L}^{m+1}(D_\nu)$ с мажорантой вида $KB(\xi)$, где K — постоянная, B — оператор, определенный выше (см. (16)). Так как оператор B имеет нулевой спектральный радиус, то нулевой спектральный радиус имеет и оператор, стоящий в правой части уравнения (19). Поэтому уравнение (19) имеет лишь решение $z = 0$, т. е. $v_1(x, t, \nu, \omega) = v(x, t, \nu, \omega)$ почти всюду в D_ν.

6. Устойчивость решений по параметру. Предположим, что правые части уравнений (1), (2) непрерывно зависят от числового параметра λ, изменяющегося в интервале $(-\beta, \beta)$. Тогда правая часть функционального уравнения (13), эквивалентного задаче (1) — (7), также непрерывно зависит от параметра $\lambda \in (-\beta, \beta)$.

Уравнение (13) имеет вид

$$v(x, t, \nu, \omega) = f(x, t, \nu, \omega, A(v)(x, t, \nu, \omega), \lambda). \tag{20}$$

Будем считать, что правая часть (20) непрерывна по λ равномерно относительно $(x, t, \nu, \omega) \in D$ и удовлетворяет оценкам (13) условия C равномерно относительно $\lambda \in (-\beta, \beta)$ (т. е. $N_5(M)$ и $N_6(M)$ не зависят от выбора $\lambda \in (-\beta, \beta)$).

Справедлива следующая теорема об устойчивости по возмущению параметра λ решений уравнения (20).

Теорема 3. *Пусть уравнение (20) имеет при $\lambda = 0$ единственное в $\mathcal{L}^{m+1}(D)$ решение $v^0(x, t, \nu, \omega)$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что при каждом $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ уравнение (20) имеет единственное в $\mathcal{L}^{m+1}(D)$ решение $v^\lambda(x, t, \nu, \omega)$, причем $\|v^\lambda - v^0\|_T \to 0$ при $\lambda \to 0$.*

Из теоремы 3 непосредственно следует теорема об устойчивости по возмущению параметра λ решений смешанной задачи (1)—(7).

Теорема 4. *Пусть задача (1) — (7) имеет единственное в $D_\infty(D) \times H^m_\infty(G)$ решение $u^0 = \{\psi_0, \varphi_0\}$ при $\lambda = 0$. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что при каждом $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ задача (1) — (7) имеет единственное* *в* $D_\infty(D) \times H_\infty^m(G)$ *решение* $u^\lambda \equiv \{\psi_\lambda, \varphi_\lambda\}$, *причем* $\|\psi_\lambda - \psi_0\|_{D_\infty(D)} + \|\varphi_\lambda - \varphi_0\|_{H_\infty^m(G)} \to 0$ *при* $\lambda \to 0$.

Доказательство теоремы 3 проводится методом последовательного продолжения по шагам с помощью следующей леммы.

Лемма 2. *Существует неубывающая функция действительного переменного* $\mu = \mu(L)$ *такая, что если* $v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2} \in \mathcal{L}^{m+1}(D)$ — *решения уравнения* (20), *отвечающие некоторым значениям* λ_1, λ_2 *параметра* λ *и удовлетворяющие условию*

$$\|v^{\lambda_i}\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D)} \leqslant L, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

то

$$\|v^{\lambda_1} - v^{\lambda_2}\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D)} \leqslant \mu(L)\,\|\Delta_\lambda f(v^{\lambda_2}, \lambda_2, \lambda_1)\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D)}, \tag{22}$$

где $\Delta_\lambda f(v, \lambda_2, \lambda_1) \equiv f(x, t, \nu, \omega, A(v), \lambda_1) - f(x, t, \nu, \omega, A(\omega), \lambda_2)$.

Доказательство. По теореме о конечных приращениях получаем

$$v^{\lambda_1} - v^{\lambda_2} = f'_{ka}(x, t, \nu, \omega, A(v^{\lambda_2} + \Theta_k(v^{\lambda_1} - v^{\lambda_2}))) \leqslant \operatorname{col}\{A(v^{\lambda_1} - v^{\lambda_2}) + \Delta_\lambda f_k(v^{\lambda_2}, \lambda_1, \lambda_2)\}, \quad 0 \leqslant \Theta_k \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

В силу (13) и (21) справедливы неравенства

$$|v_k^{\lambda_1} - v_k^{\lambda_2}| \leqslant N_5(L\|A\|)\,|A(v^{\lambda_2} - v^{\lambda_1})| + |\Delta_\lambda f_k(v^{\lambda_2}, \lambda_2, \lambda_1)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

$$|v_k^{\lambda_1} - v_k^{\lambda_2}| \leqslant N_5(L\|A\|)\,B(|v^{\lambda_2} - v^{\lambda_1}|) + |\Delta_\lambda f_k(v^{\lambda_2}, \lambda_2, \lambda_1)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

где B — интегральный оператор, определенный в п. 5. Из последнего неравенства, учитывая вид оператора B и проводя построения, аналогичные построениям известной леммы Гроноулла, получаем (22).

Доказательство теоремы 3. Пусть M_0 — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $\sigma \equiv \||A(v_0)|\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D)} \leqslant M_0$. Положим $\Delta = \frac{1}{2}(M_0 - \delta)$. Зафиксируем натуральное число n так, чтобы величина $\delta = Tn^{-1}$ удовлетворяла неравенству

$$\Sigma\delta N_6(M) < \Delta. \tag{23}$$

В силу (23) $\forall\ \lambda \in (-\beta, \beta)$ по теореме 2 существует единственное в $\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,\delta})$* решение v^λ уравнения (20), и справедлива оценка $\|v^\lambda\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,\delta})} \leqslant N_6(M_0)$.

Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\lambda| < \varepsilon$ возможно последовательными продолжениями по множествам $D_{k\delta,(k+1)\delta}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, распространить каждое решение v^λ уравнения (20) с $D_{0,\delta}$ на все множество D. По лемме 2

$$\|v^\lambda - v^0\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,\delta})} \leqslant \mu(N_6(M_0))\,\|\Delta_\lambda f(v^0, \lambda, 0)\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D)}. \tag{24}$$

Использовав мажоранту B (п. 5) и (24), проведем оценку

$$\|Av^\lambda - Av^0\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,\delta})} \leqslant [1 + \|K\|_{L_\infty(D)} + \|\Gamma\|_{L_\infty^m(G)}] \times \|B(v^\lambda - v^0)\|_{\mathcal{L}_\infty^{m+1}(D,0,\delta)} \leqslant \|B\|[1 + \|K\|_{L_\infty(D)} + \|F\|_{L_\infty^n(D)}] \times \|v^\lambda - v^0\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,\delta})},$$

из которой следует существование такого $\varepsilon_1 > 0$, что при $|\lambda| < \varepsilon_1$

$$\||A(v^\lambda) - A(v^0)|\|_{\mathcal{L}^{m+1}(D,\delta)} < \Delta. \tag{25}$$

---

* $D_{\gamma,\delta} \equiv \{(x, t, \nu, \omega) : x \in [-a, a],\ t \in [\gamma, \delta],\ v \in [0, \nu_0],\ \omega \in [-1, 1]\}$.

Докажем, что при $|\lambda| < \varepsilon$ решение v^λ уравнения (20) единственным образом продолжимо с $D_{0,\delta}$ на $D_{0,2\delta}$. С этой целью введем оператор

$$\tilde{A} : \mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta}) \to L_\infty(D_{\delta,2\delta}) \times L_\infty^m(G_{\delta,2\delta}) \times L_\infty(D_{\delta,2\delta}) \times L_\infty(D_{\delta,2\delta})$$

формулой $\tilde{A}(v)(x,t,\nu,\omega) = A(\tilde{v})(x,t,\nu,\omega)$, $(x,t,\nu,\omega) \in D_{\delta,2\delta}$, $v \in \mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta})$, где

$$\tilde{v}(x,t,\nu,\omega) = \begin{cases} v(x,t,\nu,\omega), & (x,t,\nu,\omega) \in D_{\delta,2\delta}, \\ 0, & (x,t,\nu,\omega) \in D_{0,\delta}, \quad \tilde{v} \in \mathcal{L}^{m+1}(D_{0,2\delta}). \end{cases}$$

Зафиксируем некоторое λ из $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Пусть $\tilde{v}^\lambda = v^\lambda(x,t,\nu,\omega)$ — функция из $\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,2\delta})$ вида

$$v^\lambda(x,t,\nu,\omega) = \begin{cases} v^\lambda(x,t,\nu,\omega), & (x,t,\nu,\omega) \in D_{0,\delta}, \\ 0, & (x,t,\nu,\omega) \in D_{\delta,2\delta}. \end{cases}$$

Положим $\tilde{f}(x,t,\nu,\omega,\tilde{a},\lambda) = f(x,t,\nu,\omega,A(\tilde{v}\lambda)(x,t,\nu,\omega) + \tilde{a},\lambda)$.

Рассмотрим над $\mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta})$ уравнение

$$v(x,t,\nu,\omega) = \tilde{f}(x,t,\nu,\omega,\tilde{A}(v)(x,t,\nu,\omega)\lambda). \tag{26}$$

Существование единственного в $\mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta})$ решения уравнения (26) эквивалентно существованию единственного в $\mathcal{L}^{m+1}(D_{0,2\delta})$ продолжения решения v^λ уравнения (20) с множества $D_{0,\delta}$ на $D_{0,2\delta}$.

Правая часть уравнения (26) удовлетворяет следующему условию.

Условие D. Для любого множества $S_{3m+1}^{(M)} \equiv \{(\tilde{a}) : \tilde{a} \in R^{3m+1}, |\tilde{a}| < M\}$, $M < \infty$, при почти всех $(x,t,\nu,\omega) \in D_{\delta,2\delta}$ справедливы оценки

$$|\tilde{f}'_a| \leqslant N_5(M) = N_5(M + \delta + a), \quad |\tilde{f}| \leqslant N_6(M) = N_6(M + \delta + a). \tag{27}$$

Докажем, например, вторую из них. Имеем

$$|\tilde{f}(x,t,\nu,\omega,\tilde{a},\lambda)| \leqslant N_6(|\tilde{a}| + \||A(\tilde{v}^\lambda)|\|_{L_\infty(D_{\delta,2\delta})}). \tag{28}$$

Используя очевидные свойства оператора A и неравенство (25), получаем оценку

$$\||A(v^\lambda)|\|_{L_\infty(D_{\delta,2\delta})} \leqslant \||A(v^\lambda)|\|_{L_\infty(D_{\delta,2\delta})} \leqslant \||A(v^\lambda - v^\bullet|\|_{L_\infty(D_{\delta,2\delta})} + \delta < \Delta + \delta. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует (27).

Неравенство (23) можно переписать в виде

$$\sum \delta \tilde{N}_6(\Delta) < \Delta. \tag{30}$$

В силу (30) и условия C следует однозначная разрешимость уравнения (26) в $\mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta})$. Это означает, что уравнение (20) при каждом $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ имеет единственное решение в $\mathcal{L}^{m+1}(D_{\delta,2\delta})$.

Очевидно, что $(n-1)$-шаг предложенного процесса продолжения решения по множествам $D_{k\delta,(k+1)\delta}$ приведет к указанному в теореме числу ε. Последнее утверждение теоремы следует непосредственно из леммы 2. Теорема 3 доказана.

1. *Зельдович Л. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М. : Наука, 1966.— 686 с.
2. *Соболев В. В.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М. : Наука, 1956.— 324 с.
3. *Жигулев В. М.* Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения // Инж. журн.— 1964.— **4**, вып. 2.— С. 3—18.
4. *Морозов С. Ф., Сумин В. И.* Оптимизация нелинейных процессов переноса // Докл. АН СССР. 1979.— **247**, № 4.— С. 794—798.
5. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. мат. ин-та АН СССР.— 1961.— **61**, № 1.— С. 36—45.
6. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений.— М. : Физматгиз, 1962.— 394 с.

Горьк. ун-т

Получено 16.04.88