УДК 517.958

С. В. Жестков

О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями

При естественных предположениях с помощью принципа сжатых отображений доказана однозначная разрешимость сформулированной задачи. Решение строится классическим методом последовательных приближений.

При природніх припущеннях з допомогою принципу стиснутих відображень доведена однозначна розв'язність сформульованої задачі. Розв'язок будується класичним методом послідовних наближень.

Задача Гурса, как известно, является одной из основных задач математической физики. Ее развитию и обобщению посвящен ряд работ (см., например, [1—3]). Отметим, что к задаче Гурса сводятся, в частности, задачи сорбции [4].

Рассмотрим задачу Гурса с интегральными краевыми условиями

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}), \tag{1}$$

$$\int_0^a n(x)\, u(x, y)\, dx = h(y), \quad \int_0^b m(y)\, u(x, y)\, dy = p(x), \tag{2}$$

$$\left(\int_0^b m(y)\, h(y)\, dy = \int_0^a n(x)\, p(x)\, dx \equiv Q\right)$$

$$G = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant |u|,\ |u_x|,\ |u_y|,\ |u_{xy}| < \infty\},$$

где функции $n(x)$, $m(y)$ непрерывны; функции $p(x)$, $h(y)$ — непрерывно дифференцируемы; функция $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy})$ — непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по u, u_x, u_y, u_{xy} в области G с константами L, L_1, L_2, L_3 соответственно.

Отметим, что с физической точки зрения корректность постановки задачи (1), (2) оправдывается тем, что на практике, как правило, измеряются некоторые усредненные (интегральные) характеристики величин.

Используя подход из [5], выведем эквивалентное интегральное уравнение. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (1), (2). Тогда имеем

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) + \int_0^x \int_0^y f(s, \delta, u, u_x, u_y, u_{xy})\, d\delta\, ds \equiv$$
$$\equiv \varphi(x) + \psi(y) + v(x, y), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — неизвестные функции. Подставляя (3) в (2), находим

$$\int_0^a n(x)\, \varphi(x)\, dx + \tilde{n}(a)\, \psi(y) + \int_0^a n(x)\, v(x, y)\, dx = h(y),$$

$$\int_0^b m(y)\, \psi(y)\, dy + \tilde{m}(b)\, \varphi(x) + \int_0^b m(y)\, v(x, y)\, dy = p(x). \tag{4}$$

$$\left(\tilde{n}(a) \equiv \int_0^a n(x)\, dx \neq 0, \quad \tilde{m}(b) \equiv \int_0^b m(y)\, dy \neq 0\right).$$

Предполагая, что $\int_0^a n(x)\, \varphi(x)\, dx = 0$ или $\int_0^b m(y)\, \psi(y)\, dy = 0$, и решая систему (4), получаем искомое интегральное уравнение

$$u(x, y) = \frac{1}{\tilde{m}(b)} p(x) + \frac{1}{\tilde{n}(a)} h(y) - \frac{Q}{\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)} -$$

$$- \frac{1}{\tilde{m}(b)} \int_0^b m(y) v(x, y) dy - \frac{1}{\tilde{n}(a)} \int_0^a n(x) v(x, y) dx +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)} \int_0^a \int_0^b n(x) m(y) v(x, y) dydx + v(x, y). \tag{5}$$

Прямым вычислением проверяется, что любое решение уравнения (5) является и решением задачи (1), (2). Дифференцируя уравнение (5) по x, y и применяя к полученной системе четырех уравнений принцип сжатых отображений, устанавливаем следующий результат.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены указанные выше предположения и, кроме того,*

$$KL + ML_1 + NL_2 + L_3 < 1,$$

где

$$K \equiv \frac{m}{|\tilde{m}(b)|} \frac{ab^2}{2} + \frac{n}{|\tilde{n}(a)|} \frac{ba^2}{2} + \frac{m\, n}{|\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)|} \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} + ab,$$

$$M \equiv \frac{m}{|\tilde{m}(b)|} \frac{b^2}{2} + b, \quad N \equiv \frac{n}{|\tilde{n}(a)|} \frac{a^2}{2} + a, \quad m \equiv \max_{0 \leqslant y \leqslant b} |m(y)|,$$

$$n \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant a} |n(x)|.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет в области* G *единственное классическое решение и справедливы следующие оценки:*

$$|u(x, y)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} q_{1i} d_i, \quad |u_x(x, y)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} q_{2i} d_i, \quad |u_y(x, y)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} q_{3i} d_i, \tag{6}$$

$$|u_{xy}(x, y)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} q_{4i} d_i,$$

где q_{ij}, $i, j = \overline{1, 4}$, *— элементы матрицы* $(E - R)^{-1}$,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} KL, & KL_1, & KL_2, & KL_3 \\ ML, & ML_1, & ML_2, & ML_3 \\ NL, & NL_1, & NL_2, & NL_3 \\ L, & L_1, & L_2, & L_3 \end{bmatrix},$$

$$d_1 \equiv \frac{p}{|\tilde{m}(b)|} + \frac{h}{|\tilde{n}(a)|} + \frac{|Q|}{|\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)|} + KM_0, \quad d_2 \equiv \frac{p}{|\tilde{m}(b)|} + MM_0,$$

$$d_3 \equiv \frac{h}{|\tilde{n}(a)|} + NM_0, \quad d_4 \equiv M_0, \quad M_0 \equiv \max_{(G)} |f(x, y, 0, 0, 0, 0)|,$$

$$p \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \{|p(x)|, |p'(x)|\}, \quad h \equiv \max_{0 \leqslant y \leqslant b} \{|h(y)|, |h'(y)|\}.$$

Решение строится методом последовательных приближений по формулам

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\tilde{m}(b)} p(x) + \frac{1}{\tilde{n}(a)} h(y) - \frac{Q}{\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)},$$

$$u_{n+1}(x, y) = u_0(x, y) - \frac{1}{\tilde{m}(b)} \int_0^b m(y) v_n(x, y)\, dy - \frac{1}{\tilde{n}(a)} \int_0^a n(x) v_n(x, y)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\tilde{m}(b)\tilde{n}(a)} \int_0^a \int_0^b n(x) m(y) v_n(x, y)\, dy dx + v_n(x, y), \qquad (7)$$

$$v_n(x, y) \equiv \int_0^x \int_0^y f(s, \delta, u_n, \partial u_n/\partial x, \partial u_n/\partial y, \partial^2 u_n/\partial x \partial y)\, d\delta ds,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots .$$

Любое приближение, построенное по формулам (7), удовлетворяет условиям (2).

Пример. Пусть

$$u_{xy} = \varepsilon u + \varepsilon \cos xy \sin u_{xy} - \varepsilon \left\{ \frac{3(x+y)}{\omega^3} - \frac{9}{4}\frac{1}{\omega^2} \right\}, \quad \omega > 0,$$

$$\int_0^\omega x^2 u(x, y)\, dx = y, \quad \int_0^\omega y^2 u(x, y)\, dy = x.$$

Тогда при $\varepsilon\left(1 + \frac{25}{4}\omega^2\right) < 1$, $\varepsilon > 0$, функция $u(x, y) = \frac{3(x+y)}{\omega^3} - \frac{9}{4}\frac{1}{\omega^2}$ является единственным решением этой задачи.

Соответствующая многоточечная краевая задача имеет вид

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}), \qquad (8)$$

$$\sum_{i=0}^{l} \alpha_i u(x_i, y) = h(y), \quad \sum_{j=0}^{r} \beta_j u(x, y_j) = p(x), \qquad (9)$$

$$\left(\sum_{i=0}^{l} \alpha_i p(x_i) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j h(y_j) \equiv Q,\ 0 \leqslant x_i \leqslant a,\ 0 \leqslant y_j \leqslant b \right).$$

Как и выше, строится эквивалентное интегральное уравнение

$$u(x, y) = \frac{1}{\beta} p(x) + \frac{1}{\alpha} h(y) - \frac{1}{\alpha\beta} Q - \frac{1}{\beta} \sum_{j=0}^{r} \beta_j v(x, y_j) -$$

$$- \frac{1}{\alpha} \sum_{i=0}^{l} \alpha_i v(x_i, y) + \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{r} \alpha_i \beta_j v(x_i, y_j) + v(x, y),$$

$$\alpha \equiv \sum_{i=0}^{l} \alpha_i \neq 0, \quad \beta \equiv \sum_{j=0}^{r} \beta_j \neq 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $p(x)$, $h(y)$ *непрерывно дифференцируемы,* $f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy})$ *удовлетворяет условию Липшица по* u, u_x, u_y, u_{xy} *в области* G *с константами* L, L_1, L_2, L_3 *соответственно и, кроме того,*

$$KL + ML_1 + NL_2 + L_3 < 1,$$

где

$$K \equiv \frac{a}{|\beta|} B + \frac{b}{|\alpha|} A + \frac{AB}{|\alpha\beta|} + ab, \quad M \equiv \frac{B}{|\beta|} + b, \quad N \equiv \frac{A}{|\alpha|} + a,$$

$$A \equiv \sum_{i=0}^{l} |\alpha_i| x_i, \quad B \equiv \sum_{j=0}^{r} |\beta_j| y_j.$$

Тогда задача (8), (9) *имеет в области* G *единственное классическое решение, которое можно построить* (*аналогично предыдущему*) *методом последова-*

тельных приближений, и справедливы оценки (6), *в которых следует положить*

$$d_1 \equiv p/|\beta| + h/|\alpha| + |Q|/|\alpha\beta| + KM_0, \quad d_2 \equiv p/|\beta| + MM_0,$$

$$d_3 \equiv h/|\alpha| + NM_0, \quad d_4 \equiv M_0, \quad M_0 \equiv \max_{(G)} |f(x, y, 0, 0, 0, 0)|,$$

$$p \equiv \max_{0 \leqslant x \leqslant a} \{|p(x)|, |p'(x)|\}, \quad h \equiv \max_{0 \leqslant y \leqslant b} \{|h(y)|, |h'(y)|\}.$$

Замечание. В случае нелинейных интегральных условий (2) для их регуляризации можно использовать методы, развитые в работах [5, 6].

1. *Чекмарев Т. В.* Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, № 9.— С. 1614—1622.
2. *Григолия М. П.* Об одном обобщении характеристической задачи для гиперболических систем // Там же.— 1985.— **21**, № 4.— С. 678—686.
3. *Нахушева З. А.* Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Там же.— 1986.— **22**, № 1.— С. 171—174.
4. *Остапенко В. А.* Асимптотическое решение нелинейной задачи сорбции // Дифференц. уравнения и их прил.— Днепропетровск : Днепропетр. ун-т, 1985.— С. 3—14.
5. *Лаптинский В. Н.* Об одном итерационном методе в теории нелинейных колебаний / Изв. АН БССР. Сер. мат.— 1980.— № 2.— С. 6—12.
6. *Самойленко А. М., Кенжебаев К., Лаптинский В. Н.* О некоторых итерационных методах отыскания периодических решений неавтономных систем дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 3.— С. 346—352.

Могилев. отд-ние
Ин-та физики АН БССР

Получено 08.06.87