УДК 517.927

В. А. Чуриков

О решении многоточечной краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами

Получены необходимые и достаточные условия существования единственного голоморфного решения краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами и общими линейными краевыми условиями. Рассматривается процедура нахождения решения краевой задачи.

Одержані необхідні і достатні умови існування единого голоморфного розв'язку крайової задачі для системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфними коефіцієнтами і загальними лінійними крайовими умовами. Розглядається процедура знаходження розв'язку крайової задачі.

Рассмотрим краевую задачу

$$x' = T(t)\,x + f(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{m} A_i x(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t)\,x(t)\,dt = h, \tag{2}$$

где m — натуральное число, $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

Матрица $T(t)$ размера $n \times n$ и n-мерная вектор-функция $f(t)$ голоморфны в окрестности $|t - t_0| < r$, матрицы $\Phi_i(t)$ ограничены и непрерывны в (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{1, m}$, A , $j = \overline{0, m}$,— числовые $n \times n$ матрицы, h — n-мерный числовой вектор A_j.

Обозначим через $U(t)$ $(U(t_0)=E)$ и $K(t, s) = U(t)\, U^{-1}(s)$ соответственно фундаментальную матрицу и матрицу Коши системы $x' = T(t)\, x$,

$$h_f = h - \sum_{i=1}^{m} A_i \int_{t_0}^{t_i} K(t_i, s) f(s)\, ds - \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) \int_{t_0}^{t} K(t, s) f(s)\, ds.$$

Подставляя общее решение системы (1)

$$x(t) = U(t)\, c + \int_{t_0}^{t} K(t, s) f(s)\, ds \tag{3}$$

в краевые условия (2), получаем

$$\left[A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t)\, U(t)\, dt\right] c = h_f. \tag{4}$$

Если определитель системы (4)

$$D(t_1, \ldots, t_m) = \left| A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t)\, U(t)\, dt \right| \neq 0, \tag{5}$$

то задача (1), (2) имеет единственное решение.

Обозначим через $T_k(t)$ матрицу, удовлетворяющую равенству $T_k(t) = T'_{k-1}(t) + T_{k-1}(t)\, T_1(t)$, где $T_1(t) \equiv T(t)$.

Рассмотрим функцию

$$D(t_1, \ldots, t_m) = \left| A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \left[E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k(t_0)}{k!} (t_i - t_0)^k\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) \left[E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k(t_0)}{k!} (t - t_0)^k\right] dt \right|. \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть матрица $T(t)$ и вектор-функция $f(t)$ голоморфны в окрестности $|t - t_0| < r$, матрицы $\Phi_i(t)$ ограничены и непрерывны в (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{1, m}$. Чтобы задача* (1), (2) *имела единственное голоморфное решение при $t_i \in (t_0, r)$, $i = \overline{1, m}$, необходимо и достаточно, чтобы $D(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как коэффициенты системы $x' = T(t)\, x$ голоморфны в окрестности $|t - t_0| < r$, то по теореме Коши в этой окрестности голоморфна матрица $U(t)$. Следовательно,

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k. \tag{7}$$

Далее имеем

$$U'(t) = T(t)\, U(t) = T_1(t)\, U(t),$$

$$U''(t) = T'_1(t)\, U(t) + T_1(t)\, T_1(t)\, U(t) = [T'_1(t) + T_1(t)\, T_1(t)]\, U(t) = T_2(t)\, U(t),$$

. . . .

$$U^{(k)}(t) = [T'_{k-1}(t) + T_{k-1}(t)\, T_1(t)]\, U(t) = T_k(t)\, U(t).$$

Отсюда следует, что ряд (7) может быть представлен в виде

$$U(t) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k(t_0)}{k!} (t - t_0)^k. \tag{8}$$

Из формул (5) и (8) следует формула (6).

Рассмотрим процедуру нахождения решения задачи (1), (2). Если $D(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$, то определив из (4) вектор c и подставив его значение в формулу (3), получим

$$x(t) = U(t)\Big[A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) U(t)\, dt\Big]^{-1} h_f + \int_{t_0}^{t} K(t, s) f(s)\, ds. \quad (9)$$

Представим теперь матрицу Коши в виде ряда. При фиксированном s

$$K(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U^{(k)}(s) U^{-1}(s)}{k!} (t - s)^k. \quad (10)$$

Так как $U^{(k)}(t) = T_k(t) U(t)$, то $U^{(k)}(s) U^{-1}(s) = T_k(s)$, поэтому формула (10) принимает вид

$$K(t, s) = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k(s)}{k!} (t - s)^k. \quad (11)$$

По формуле (8) можно приближенно вычислить матрицы $U(t), U(t_i)$, $i = \overline{1, m}$, и, следовательно,

$$\Big[A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) U(t)\, dt\Big]^{-1}$$

По формуле (11) можно вычислить $K(t, s)$, $K(t_i, s)$, $i = \overline{1, m}$, и по формуле (9) получить приближенное решение задачи (1), (2).

Рассмотрим вопрос об оценках решения задачи (1), (2). Обозначим через $y(t)$ голоморфную n-мерную вектор-функцию, удовлетворяющую условиям (2), $\varphi(t) \equiv y' - T(t)y - f(t)$, h_φ — вектор, получающийся из вектора h_f путем замены у него вектор-функции $f(s)$ на вектор-функцию $\varphi(s)$. Под неотрицательностью матрицы будем понимать неотрицательность всех ее элементов.

Теорема 2. *Пусть $T(t)$ и $f(t)$ голоморфны в окрестности $|t - t_0| < r$, матрицы $\Phi_i(t)$ ограничены и непрерывны в (t_{i-1}, t_i), $i = \overline{1, m}$. Если $K(t, s) \geqslant 0$ при $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_m$,*

$$\Big[A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) U(t)\, dt\Big]^{-1} (h_\varphi - h) \geqslant 0,$$

$D(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$ при $t_i \in [t_0, r]$, $i = \overline{1, m}$, то из неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$, $t \in [t_0, t_m]$, следует $y(t) \geqslant x(t)$, $t \in [t_0, t_m]$.

Доказательство. Так как $D(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$ при $t_i \in [t_0, r]$, $i = \overline{1, m}$, то задача (1), (2) имеет единственное решение $x(t)$. Функция $u = y(t) - x(t)$ является решением задачи

$$u' = T(t) u + \varphi(t), \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^{m} A_i u(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) u(t)\, dt = 0. \quad (13)$$

Согласно формуле (9)

$$u(t) = U(t)\Big[A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i U(t_i) + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i(t) U(t)\, dt\Big]^{-1} (h_\varphi - h) + \\ + \int_{t}^{t} K(t, s) \varphi(s)\, ds. \quad (14)$$

Так как $K(t, t_0) = U(t)$, то из $K(t, s) \geqslant 0$ при $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_m$ следует $U(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_0, t_m]$. Из формулы (14) следует, что при выполнении условий теоремы $u(t) \geqslant 0$ при $t \in [t_0, t_m]$. Отметим, что рассматриваемые в настоящей статье вопросы изучались в работах [1—3].

1. *Азбелев Н. В., Смолин И. М., Цалюк З. Б.* Об одном приближенном методе построения функции Коши // Докл. АН СССР.— 1960.— **135**, № 3.— С. 479—482.
2. *Латышева К. Я., Терещенко Н. И.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их применениям.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— 394 с.
3. *Чуриков В. А.* Теорема о дифференциальном неравенстве для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 538—543.

Херсон, индустр, ин-т

Получено 23,04,87