УДК 517.5

*Е. Е. Дунайчук*

# Точная асимптотика остатка квадратурной формулы Эрмита для классов функций $W_p^2$

Для классов функций $W_p^2$ найдена асимптотически точная оценка погрешности квадратурной формулы Эрмита (квадратурной формулы наивысшей алгебраической точности, соответствующей весовой функции $1/\sqrt{1-t^2}$).

Для класів функцій $W_p^2$ знайдена асимптотично точна оцінка похибки квадратурної формули Ерміта (квадратурної формули найвищої алгебраїчної точності, яка відповідає ваговій функції $1/\sqrt{1-t^2}$).

Для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\beta}f(t)\,dt$, где $\beta > -1$, $f(t)\in H$, используем квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности (квадратурную формулу типа Гаусса)

$$\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\beta}f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}A_k^{\Gamma}f(\gamma_k)+R_n^{\Gamma}(f). \tag{1}$$

Основные положения теории квадратур типа Гаусса изложены в известных монографиях [1, 2].

Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе функций $H$ называется величина

$$R(H;(1-t^2)^{\beta},\Gamma_n,A_n^{\Gamma})=\sup_{f\in H}|R_n^{\Gamma}(f)|. \tag{2}$$

Как известно, для достаточно гладких функций (имеющих $2n$ непрерывных производных, где $n$ — число узлов квадратуры) известна оценка величины $|R_n^{\Gamma}(f)|$. Представляет интерес задача отыскания величины (2) для классов функций, не являющихся столь гладкими.

Асимптотически точные оценки погрешности квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности, соответствующих весовым функциям $(1-t^2)^{\beta}$ ($\beta=\pm 1/2$), на классах $H^{\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, и $W_p^1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, были получены в работах [3—5].

Если $\rho(t)=1/\sqrt{1-t^2}$, $t\in(-1,1)$, то квадратурная формула типа Гаусса носит название формулы Эрмита и имеет вид

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+R_n^{\Gamma}(f). \tag{3}$$

В данной работе установлена точная асимптотика остатка квадратурной формулы Эрмита для классов функций $W_p^2$.

Нахождение асимптотически точной оценки квадратурной формулы (3) на классе $W_p^2$ опирается на доказанную ранее теорему 1 [6, с. 38] и ряд лемм.

Приведем формулировку теоремы 1 при $r=2$.

Теорема 1. *Для квадратурной формулы*

$$\int_{-1}^{1} \rho(t) f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{1} A_{ki} f^{(i)}(\gamma_k) + R_n(f), \tag{4}$$

*где*

$$A_{k0} = \int_{x_k}^{x_{k-1}} \rho(t)\, dt, \quad k = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$$A_{k1} = \int_{z_{k-1}}^{\gamma_k} \int_{x_{k-1}}^{y} \rho(t)\, dt dy - \int_{z_k}^{\gamma_k} \int_{x_k}^{y} \rho(t) dt dy, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6}$$

$$x_0 = z_0 = 1, \quad x_n = z_n = -1,$$

$x_k, z_k$, $k = \overline{1, n-1}$, — *произвольные точки из* $[-1, 1]$, *имеет место оценка*

$$R_{np} = \sup_{f \in W_p^2} |R_n(f)| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k} \left| \int_{z_k}^{x} \int_{x_k}^{y} \rho dt dy \right|^q dx\right)^{1/q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Рассмотрим $\rho(t) = 1/\sqrt{1 - t^2}$ и выберем в качестве $x_k$ точки $\cos\frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n}$. Тогда

$$A_{k0} = \int_{\cos(k\pi/n)}^{\cos((k-1)\pi/n)} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{\pi}{n} = A_k^{\Gamma}.$$

Очевидно, чтобы воспользоваться сформулированной теоремой для нахождения асимптотически точных оценок погрешностей квадратурной формулы (3) на классах функций $W_p^2$, надо попытаться найти такие $z_k \in [-1, 1]$, при которых $A_{k1}$ либо равны нулю (тогда формула (4) трансформировалась бы в формулу (3)), либо достаточно близки к нулю.

Поскольку найти вид $z_k$, превращающих формулу (4) в формулу (1), не представляется возможным из-за сложности решения системы $A_{k1} = 0$, $k = \overline{1, n}$ ($A_{k1}$ определяются по формулам (6)), то остается выбрать второй вариант.

Приведенные ниже леммы позволяют указать $z_k$, при которых $A_{k1} = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ равномерно по $k = 1, 2, \ldots, n$, и подготавливают всю необходимую информацию для нахождения точной асимптотики остатка квадратурной формулы Эрмита на классах $W_p^2$.

Лемма 1. *Пусть узлы квадратурной формулы* (4) $\gamma_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = \overline{1, n}$, *а коэффициенты определяются равенствами* (5), (6), *где* $x_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n}$, $z_k$, $k = \overline{1, n-1}$, — *произвольные точки из* $[-1, 1]$. *Тогда*

$$R_{np}^{\Gamma} = \sup_{f \in W_p^2} |R_n^{\Gamma}(f)| = R_{np} + O\left(\sum_{k=1}^{n} |A_{k1}|\right).$$

Из леммы 1 следует, что для нахождения асимптотически точных оценок величины $R_{np}^{\Gamma}$ достаточно выбрать такие точки $z_k$, что равномерно по $k = 1, 2, \ldots n$

$$A_{k1} = O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{7}$$

Следующее утверждение указывает $z_k$, удовлетворяющие (7).

Лемма 2. *Если* $\gamma_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k=\overline{1,n}$,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k=\overline{0,n},$$

$$z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n} - \Delta_k\right), \quad k=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$z_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n} - \Delta_k'\right), \quad k=\overline{1,\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

где

$$\Delta_k = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi_k}{3}\right)\right),$$

$$\Delta_k' = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}\left(\frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi_k}{3}\right)\right),$$

$$\varphi_k = \arccos\left(1 - \pi^2/\left(2n^2\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}\right)\right),$$

*то*

$$R_{np}^{\Gamma} = \left(2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k}\left|\int_{z_k}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy\right|^q dx\right)^{1/q} + O\left(\frac{1}{n^{2+1/q}}\right) =$$

$$= \left(2\sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k}\left|\int_{z_k'}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy\right|^q dx\right)^{1/q} + O\left(\frac{1}{n^{2+1/q}}\right). \tag{8}$$

Выделить главный член величины $R_{np}^{\Gamma}$, пользуясь (8), мешает то, что неизвестны точки перемены знака функций $\int_{z_k}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy$ и $\int_{z_k'}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy$ соответственно на промежутках $[x_k, \gamma_k]$ и $[\gamma_{k+1}, x_k]$. Однако, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\gamma_k, x_k, z_k, z_k'$ *задаются так же, как в лемме* 2. *Тогда*

$$R_{np}^{\Gamma} = \left(2\sum_{k=1}^{k\leqslant n^{1/2}}\int_{\gamma_{k+1}}^{\gamma_k}\left|\int_{z_k}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy\right|^q dx + \right.$$

$$+ 2\sum_{k>n^{1/2}}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\int_{\gamma_{k+1}}^{x_k}\left|\int_{z_k'}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy\right|^q dx + \right.$$

$$\left.\left. + \int_{x_k}^{\gamma_k}\left|\int_{z_k}^{x}\int_{x_k}^{y}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dy\right|^q dx\right)\right)^{1/q} + O\left(\frac{1}{n^{2+1/q}}\right).$$

С использованием теоремы 1 и сформулированных трех лемм может быть получена точная асимптотика остатка квадратурной формулы (3) для классов функций $W_p^2$.

Теорема 2. *Если* $1 < p \leqslant \infty$, *то*

$$R_{np}^{\Gamma} = \frac{\pi^2}{24}\left(K_q \int_0^{\pi/2} \sin^{q+1} x dx\right)^{1/q} \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^{2+1/2q}}\right),$$

*где*

$$K_q = \frac{\sqrt{3}}{3}(\beta_q + \alpha_q), \quad \beta_q = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{b_i}{2i+1},$$

$$\alpha_q = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i \dfrac{(\sqrt{3})^{2q+1-2i} - 1}{2q+1-2i}, & \text{если } q \neq \dfrac{2i-1}{2}; \\ \sum\limits_{\substack{i=0 \\ j \neq j}}^{\infty} (-1)^i b_i \dfrac{(\sqrt{3})^{2q+1-2i} - 1}{2q+1-2i} + (-1)^j b_j \ln \sqrt{3}, & \text{если } q = \dfrac{2j-1}{2}, \end{cases}$$

$b_i = \dfrac{q(q-1)\cdot \ldots (q-i+1)}{i!}$ — *биномиальные коэффициенты*, $1/p + 1/q = 1$.

1. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.— М. : Наука, 1967.— 500 с.
2. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы (с добавлением Н. П. Корнейчука).— М. : Наука, 1979.— 256 с.
3. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О формулах приближенного вычисления интегралов // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1987.— 180.— С. 161—163.
4. *Моторный В. П., Дунайчук Е. Е.* О приближенном вычислении интегралов от непериодических функций // Исслед. по совр. пробл. суммирования приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1986.— С. 40—50.
5. *Дунайчук Е. Е.* Оценки погрешностей квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности.— Днепропетровск, 1987.— 10 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3828-В87.
6. *Дунайчук Е. Е.* Наилучшие по коэффициентам весовые квадратурные формулы вида $\sum\limits_{k-1}^{n} \sum\limits_{i=0}^{r-1} A_{ki} f^{(i)}(\gamma_k)$ для некоторых классов дифференцируемых функций // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1987.— С. 37—46.

Днепропетр. металлург. ин-т

Получено 10.10.88