УДК 517.5

*Н. В. Щербина*

# Об энтропии пространства дважды гладких кривых в метрике Хаусдорфа

Получены оценки сверху и снизу для энтропии пространства дважды гладких кривых на плоскости в метрике Хаусдорфа.

Одержані оцінки зверху і знизу для ентропії простору двічі гладких кривих на площині в метриці Хаусдорфа.

Пусть $K$ — некоторый компакт с метрикой $\rho$. Напомним, что энтропией компакта $K$ называется функция $H_\varepsilon(K) = \log_2 N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ — объем минимальной $\varepsilon$-сети компакта. Задача нахождения энтропии различных функциональных компактов была поставлена и начала систематически изучаться в работах А. Н. Колмогорова [1, 2]. А. Г. Витушкин [3] использовал оценки энтропии при решении тринадцатой проблемы Гильберта для случая функций конечной гладкости.

Приведем ниже наиболее важные результаты, относящиеся к этой тематике. А. Н. Колмогоров [2, 4] показал, что в равномерной метрике $H_\varepsilon(F^{\rho,n}_{q,L}) \asymp \rho^n \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^{n/q}$, где $F^{\rho,n}_{q,L}$ — пространство действительных функций на $n$-мерном кубе со стороной $\rho > 0$, имеющих гладкость $q > 0$ ($q = p + \alpha$, $p$ — целое, $0 < \alpha \leqslant 1$), т. е. имеющих частные производные всех порядков $k \leqslant p$. При этом частные производные порядка $p$ удовлетворяют условию Гельдера порядка $\alpha$ с константой $L$. А. Н. Колмогоров [2] для пространства $A$ функций аналитических и ограниченных по модулю постоянной $C$ в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^n$ показал, что $H_\varepsilon(A) \asymp \left(\log \frac{C}{\varepsilon}\right)^{n+1}$ в метрике равномерной на некотором множестве $E \subset\subset G$. А. Г. Витушкин [5], В. Д. Ерохин [6] и В. М. Тихомиров [7] нашли главные члены асимптотики энтропии для некоторых конкретных пар множеств $E$, $G$ и пространств $A$. В. И. Арнольд [4] нашел близкие к точным оценки энтропии для класса дифференцируемых функций в метрике $L_2$. М. И. Бирман и М. З. Соломяк [8] для классов Соболева—Слободецкого $W^\alpha_p(Q^m)$ показали, что $H_\varepsilon(W^\alpha_p(Q^m)) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{m/\alpha}$ в равномерной метрике при $p\alpha > m$ и в метрике пространства $L_q(Q^m)$ при $p\alpha \leqslant m$, $q < mp(m - p\alpha)^{-1}$. В. М. Тихомиров [9] указал общую процедуру нахождения близких к точным оценок энтропии применительно к случаю «согласованных» метрик. Бл. Сендов и Б. Пенков [10, 11] для множества $C^M_{[a,b]}$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и ограниченных на нем постоянной $M$, показали, что в метрике Хаусдорфа $H_\varepsilon(C^M_{[a,b]}) \asymp (b - a)\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}$.

Перейдем к изложению результатов данной работы.

Множество $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ будем называть дважды гладкой кривой, если существуют $C^2$-гладкие функции $x(t)$ и $y(t)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$, такие, что функции $x'(t)$, $y'(t)$ не имеют общих нулей и $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x(t),\ y = y(t)$ для некоторого $t \in [a, b]\}$. Отметим, что для всякой дважды гладкой кривой $\gamma$ существует, вообще говоря, много пар таких функций $x(t)$ и $y(t)$. Отметим также, что кривые, как это видно из определения, предполагаются, вообще говоря, незамкнутыми.

Фиксируем некоторый компакт $K \subset \mathbb{R}^2$ и положительные числа $l$ и $k$. Обозначим через $\Gamma^K_{l,k}$ множество всех дважды гладких кривых $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ таких, что длина кривой $\gamma$ не привышает $l$, кривизна кривой $\gamma$ не превышает $k$ в каждой ее точке и $\gamma \cap K \neq \varnothing$.

Напомним, что для любых двух ограниченных множеств $E$ и $F$ в $\mathbb{R}^2$ расстояние Хаусдорфа между ними равно

$$\rho(E, F) = \max\{\sup_{x\in E}\inf_{y\in F} d(x, y),\ \sup_{x\in F}\inf_{y\in E} d(x, y)\},$$

где $d$ — евклидово расстояние на плоскости.

В настоящей работе установлена оценка сверху и снизу для энтропии пространства $\Gamma^K_{l,k}$ в метрике Хаусдорфа. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Справедливы следующие соотношения*:

$$1 \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(\Gamma^K_{l,k})}{lk^{1/2}\varepsilon^{-1/2}} \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(\Gamma^K_{l,k})}{lk^{1/2}\varepsilon^{-1/2}} \leqslant 3.$$

Отметим, что этот результат, в отличие от описанных выше, касается пространства без линейной структуры (отсутствует операция сложения). В идейном плане доказательство теоремы близко методу А. Н. Колмогорова [4, 12] оценки энтропии для пространства функций конечной гладкости. Однако в случае кривых возникают и дополнительные трудности. Так, для получения хорошей оценки энтропии снизу нужно учесть, что изменение кривой в каком-либо месте может быть мало ощутимо в метрике Хаусдорфа, если кривая подходит к этому месту еще раз. Поэтому построение $2\varepsilon$-различимого множества кривых проходит в два шага. На первом шаге строится некоторое вспомогательное множество кривых. На втором шаге средствами теории вероятностей показывается, что большинство кривых построенного семейства «почти прямые» и, следовательно, не могут сделать полного оборота для того, чтобы подойти сами к себе еще раз. Это позволяет оценить снизу попарные расстояния между этими кривыми. Подсчет их числа дает нужную нам оценку энтропии снизу.

Для получения оценки энтропии сверху нужно учесть отсутствие единой удобной системы координат для кривых семейства $\Gamma^K_{l,k}$. Поэтому используются системы координат, изменяющиеся вдоль самих кривых.

Отметим, что как и в теореме А. Н. Колмогорова, при построении $\varepsilon$-сети нам приходится выходить за пределы рассматриваемого пространства. Это, естественно, ухудшает полученные оценки. Вопрос о нахождении главного члена асимптотики энтропии для пространства $\Gamma^K_{l,k}$, как и для пространства гладких функций, остается открытым.

1. Оценка энтропии снизу. Фиксируем некоторое натуральное число $N$. На окружности кривизны $k$ $\left(\text{т. е. радиуса } \dfrac{1}{k}\right)$ возьмем дугу $\gamma^N_{l,k}$ длины $l/N$. Легко видеть, что угол между касательными в концевых точках дуги $\gamma^N_{l,k}$ равен

$$\varphi^N_{l,k} = lk/N, \tag{1}$$

а расстояние от одной из концевых точек дуги $\gamma^N_{l,k}$ до касательной прямой в другой концевой точке равно $\Delta^N_{l,k} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k}\cos\dfrac{lk}{N}$, откуда, разлагая функцию $\cos x$ в ряд Тейлора, получаем

$$\Delta^N_{l,k} = \frac{l^2k}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right). \tag{2}$$

Перейдем к построению $2\varepsilon$-различимого множества кривых. Фиксируем некоторую точку $O$ компакта $K$ и произвольный вектор $u$ с началом в точке $O$. Считаем также, что на плоскости выделена некоторая ориентация. На первом шаге отложим от точки $O$ дугу $\gamma^N_{l,k}$ так, чтобы касательный вектор к дуге $\gamma^N_{l,k}$ в точке $O$ совпадал по направлению с вектором $\vec{u}$. Легко видеть, что дугу $\gamma^N_{l,k}$ можно отложить двумя возможными способами, в зависимости от того, в какую сторону от вектора $\vec{u}$ она будет изгибаться. На втором шаге из концевой точки первой дуги отложим дугу $\gamma_{l,k}^N$ так, чтобы в своей начальной точке она имела ту же касательную, что и первая дуга в своей концевой точке. Таким способом через каждую из двух возможных концевых точек первой дуги опять можно провести по две дуги, поэтому число возможных кривых после двух шагов будет равно $2^2$. Продолжив это построение, через $N$ шагов получим $2^N$ кривых, состоящих из $N$ дуг $\gamma_{l,k}^N$ каждая. Это семейство кривых обозначим $\Omega_{l,k}^N$. Каждая из кривых построенного семейства $\Omega_{l,k}^N$ имеет длину $l$ и кривизну не превышающую $k$, поэтому $\Omega_{l,k}^N \subset \Gamma_{l,k}^N$.

Теперь выделим из семейства $\Omega_{l,k}^N$ достаточно массивное подмножество «почти прямых» кривых, т. е. таких кривых, касательные векторы к которым всюду мало отличаются от вектора $\vec{u}$. Зададим для этого равномерно распределенную вероятностную меру $P_{l,k}^N$ на пространстве $\Omega_{l,k}^N$, т. е. такую меру, что $P_{l,k}^N(\gamma) = \frac{1}{2^N}$ для всякой кривой $\gamma \in \Omega_{l,k}^N$. Рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ на пространстве $\Omega_{l,k}^N$ таких, что $\xi_j(\gamma) = 1$, если угол между касательным вектором к кривой $\gamma$ в начальных точках $(j+1)$- и $j$-го звеньев равен $\varphi_{l,k}^N$ (с учетом заданной на плоскости ориентации) и $\xi_j(\gamma) = -1$, если этот угол равен $-\varphi_{l,k}^N$. Легко видеть, что так определенная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ состоит из попарно независимых случайных величин и для всех $j$ математическое ожидание $M\xi_j = 0$ и дисперсия $D\xi_j = 1$. Теперь нам понадобится неравенство Колмогорова приведенное, например, в учебнике А. А. Боровкова [13].

Неравенство Колмогорова. Пусть $\{\xi_q\}_{q=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность независимых случайных величин. Для всех натуральных $n$ положим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ и $\tilde{S}_n = \max\{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_n|\}$. Если при всех натуральных $q$ $M\xi_q = 0$, то для всякого числа $x > 0$ справедливо неравенство

$$P(\tilde{S}_n \geqslant x) \leqslant \frac{DS_n}{x^2}.$$

Применим это неравенство к построенной выше последовательности случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, положив $x = N^{2/3}$. Тогда в силу независимости этих величин $DS_N = \sum_{j=1}^{N} D\xi_j = N$ и, значит, $P_{l,k}^N(\tilde{S}_N \geqslant N^{2/3}) \leqslant \leqslant \frac{N}{N^{4/3}} = N^{-1/3}$. Поэтому при всех $N \geqslant 8$ $P_{l,k}^N(\tilde{S}_N < N^{2/3}) > \frac{1}{2}$.

Положим $\hat{\Omega}_{l,k}^N = \{\gamma \in \Omega_{l,k}^N : \tilde{S}_N(\gamma) < N^{2/3}\}$. Тогда, во-первых, $P_{l,k}^N(\hat{\Omega}_{l,k}^N) > > \frac{1}{2}$, а значит, множество $\hat{\Omega}_{l,k}^N$ содержит не менее половины всех кривых семейства $\Omega_{l,k}^N$. А во-вторых, для всякой кривой $\gamma \in \hat{\Omega}_{l,k}^N$ имеем

$$\max\{|\xi_1(\gamma)|, |\xi_1(\gamma) + \xi_2(\gamma)|, \dots, |\xi_1(\gamma) + \xi_2(\gamma) + \dots + \xi_N(\gamma)|\} < N^{2/3}.$$

Согласно определению величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ и равенству (1) получаем, что для всякой кривой $\gamma \in \hat{\Omega}_{l,k}^N$ касательный вектор к этой кривой в концевой точке каждого из ее звеньев отличается от вектора $\vec{u}$ не более чем на $\frac{lk}{N} N^{2/3} = lk N^{-1/3}$.

Оценим теперь попарное расстояние в метрике Хаусдорфа между кривыми семейства $\hat{\Omega}_{l,k}^N$. Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — любые две из этих кривых и пусть первые $j-1$ звено этих кривых совпадают, а $j$-е звенья этих кривых различны. Тогда расстояние между концевыми точками $j$-х звеньев этих кривых равно $2\Delta_{l,k}^N$. Заметим, что расстояние между концевыми точками $(j+1)$-х звеньев будет минимально в случае, когда каждое из $(j+1)$-х звеньев изгибается в направлении, противоположном изгибанию предыдущего $j$-го звена. В этом случае оно будет равно $4\Delta_{l,k}^N$. Так как углы между касательными векторами к кривым $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в любых их точках не превышают $2lk\,N^{-1/3}$, то расстояние по Хаусдорфу $\rho(\gamma_1, \gamma_2)$ между кривыми $\gamma_1$ и $\gamma_2$ будет, с точностью до малых более высокого порядка, не меньше, чем расстояние между концевыми точками $(j+1)$-х звеньев кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Отсюда в силу соотношения (2) имеем

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) \geqslant 4\Delta_{l,k}^N + o\left(\frac{1}{N^2}\right) = \frac{2l^2k}{N^2} + o\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Таким образом, для того чтобы множество $\hat{\Omega}_{l,k}^N$ было $2\varepsilon$-различимым, достаточно положить $N = \left[\frac{lk^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\right]$. Так как в множестве $\hat{\Omega}_{l,k}^N$ не меньше, чем $\frac{1}{2}\cdot 2^N = 2^{\left[\frac{lk^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\right]-1}$ элементов, то $H_\varepsilon(\Gamma_{l,k}^K) \geqslant \left[\frac{lk^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\right] - 1$. Это доказывает нужную нам оценку снизу для энтропии пространства $\Gamma_{l,k}^K$.

2. Оценка энтропии сверху. Для получения нужной нам оценки энтропии и построим $\varepsilon/2$-сеть для пространства $\Gamma_{l,k}^K$, состоящую из ломаных. Тогда число построенных ломаных будет давать оценку сверху для числа элементов минимальной $\varepsilon$-сети самого пространства $\Gamma_{l,k}^K$. Построение нужного нам семейства ломаных будет состоять из двух этапов. Вначале построим семейство ломаных, приближающих кривые из $\Gamma_{l,k}^K$ с фиксированной начальной точкой. Затем построим семейство ломаных, приближающих любую кривую из $\Gamma_{l,k}^K$.

Итак, фиксируем некоторую точку $O$ на плоскости, а также натуральное число $p$ и положительное число $\delta$. Возьмем некоторое натуральное число $N$. На первом шаге отложит от точки $O$ $N^2$ отрезков $OO_{i_1}$, $i_1 = 1, 2, \ldots, N^2$, длины $l/N$ так, что угол между любыми двумя соседними равен $2\pi/N^2$. На втором шаге от каждой точки $O_{i_1}$ отложим отрезок $O_{i_1}O_{i_1o}$ длины $l/N$ в направлении вектора $\overrightarrow{OO_{i_1}}$. Через точку $O_{i_1o}$ ортогонально вектору $\overrightarrow{OO_{i_1}}$ проведем прямую $\alpha_{i_1}$ и возьмем на ней точки $O_{i_1i_2}$, $i_2 = -(p+1), -p, \ldots, p+1$, так, что расстояние между любыми двумя соседними точками $O_{i_1i_2}$ и $O_{i_1(i_2+1)}$ было равно $\frac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$ (заметим, что точку $O_{i_1o}$ мы взяли раньше). Через точку $O_{i_1}$ и каждую из точек $O_{i_1i_2}$ проведем по отрезку. Тогда отрезок $OO_{i_1}$ и отрезок $O_{i_1}O_{i_1i_2}$ составят двузвенную ломаную. Легко видеть, что число таких ломаных равно $N^2(2p+3)$. Это построение нужно повторить $N$ раз. Опишем индуктивное построение на $q$-м шаге. Итак, пусть на $(q-1)$-м шаге мы построили семейство $(q-1)$-звенных ломаных $OO_{i_1}O_{i_1i_2}\ldots O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}$ $i_1 = 1, 2, \ldots, N^2$; $i_j = -(p+1), -p, \ldots, p+1$; $j = 2, 3, \ldots, q-1$. На $q$-м шаге отложим отрезок $O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}o}$ длины $l/N$ в направлении вектора $\overrightarrow{O_{i_1i_2\ldots i_{q-2}}O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}}$. Ортогонально этому вектору через точку $O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}o}$ проведем прямую $\alpha_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}$ и возьмем на ней точки $O_{i_1i_2\ldots i_q}$ $i_q = -(p+1), -p, \ldots, p+1$, так чтобы расстояние между любыми двумя соседними $O_{i_1i_2\ldots i_q}$ и $O_{i_1i_2\ldots(i_q+1)}$ было равно $\frac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Через точку $O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}$ и каждую из $(2p+3)$-х точек $O_{i_1i_2\ldots i_q}$ проведем по отрезку $O_{i_1i_2\ldots i_{q-1}}O_{i_1i_2\ldots i_q}$. Эти отрезки будут $q$-ми звеньями ломаных $OO_{i_1}O_{i_1i_2}\ldots O_{i_1i_2\ldots i_q}$. Из каждой построенной таким образом $N$-звенной ломаной $OO_{i_1}O_{i_1i_2}\ldots O_{i_1i_2\ldots i_N}$ образуем $N^3$ новых ломаных, взяв для каждого $r = 1, 2, \ldots, N^3$ часть ломаной $OO_{i_1}O_{i_1i_2}\ldots O_{i_1i_2\ldots i_N}$ длины

$rl/N^3$, начиная от точки $O$. Семейство всех таких ломаных обозначим $\Lambda_{l,k}^N(p, \delta)$. Легко видеть, что число таких ломаных равно $N^5(2p+3)^{N-1}$.

В дальнейшем будем использовать следующее определение для кривизны $k_\gamma^A$ дважды гладкой кривой $\gamma$ в некоторой ее точке $A$. Пусть $a > 0$ — достаточно малое число, а точки $A_1$ и $A_2$ лежат на кривой $\gamma$ по разные стороны от точки $A$ так, что каждая из дуг $\widehat{A_1A}$ и $\widehat{AA_2}$ кривой $\gamma$ имеет длину $a$. Обозначим через $h_a^A$ расстояние от точки $A_2$ до прямой $A_1A$. Тогда $k_\gamma^A = \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{h_a^A}{a^2}$. Легко видеть, что справедливо и несколько более сильное утверждение.

Утверждение. *В приведенных выше обозначениях для всякой кривой $\gamma \in \Gamma_{l,k}^K$, точки $A \in \gamma$ и числа $a > 0$ справедливо неравенство $h_a^A \leqslant \leqslant ka^2$.*

Используя это утверждение, покажем, что для всякой кривой $\gamma \in \Gamma_{l,k}^K$ с началом в точке $O$ при достаточно больших $N$ найдется ломаная $L \in \in \Lambda_{l,k}^N(p, \delta)$ такая, что $\rho(\gamma, L) \leqslant \dfrac{l^2k}{N^2}\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1+\delta}{p}\right)$. Пусть $\gamma$ — одна из таких кривых. Обозначим через $A_1$ точку кривой $\gamma$, лежащую на расстоянии $l/N$ от начальной точки $O$. Возьмем ту из определенных выше точек $O_{i_1}$, которая лежит справа от кривой $\gamma$ и находится ближе всего к точке $A_1$. Легко видеть, что когда $N$ достаточно велико, то расстояние от точки $A_1$ до точки $O_{i_1}$ меньше, чем $\dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Обозначим через $A_2$ точку пересечения кривой $\gamma$ с прямой $\alpha_{i_1}$. Если в утверждении положить $a = l/N$, то получим, что расстояние от точки $A_2$ до точки $O_{i_1o}$ строго меньше, чем $\dfrac{l^2k}{N^2} + 2\dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Поэтому среди определенных выше точек $O_{i_1i_2}$ найдется такая, которая лежит правее кривой $\gamma$ и расстояние от которой до точки $A_2$ будет меньше $\dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Заметим, что взятое заранее число $\delta > 0$ позволит всюду в дальнейшем не следить за членами более высокого порядка по $N$. На следующем шаге обозначим через $A_3$ точку пересечения кривой $\gamma$ с прямой $\alpha_{i_1i_2}$. Приведенное выше утверждение опять позволяет выбрать точку $O_{i_1i_2i_3}$, лежащую правее кривой $\gamma$ на расстоянии меньшем, чем $\dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Повторим эту процедуру столько раз, сколько позволяет длина кривой $\gamma$ (но не более чем $N$ раз). На последнем шаге возьмем, возможно, укороченное звено, чтобы построенная ломаная и кривая $\gamma$ отличались в длину не более, чем на $\dfrac{1}{N^3}$ (для этого специально нарезаем каждую $N$-звенную ломаную $OO_{i_1}O_{i_1i_2}\ldots O_{i_1i_2\ldots i_N}$ на $N^3$ укороченных ломаных). Оценим теперь расстояние в метрике Хаусдорфа $\rho(\gamma, L)$ между кривой $\gamma$ и построенной ломаной $L$. Построим для этого вспомогательную ломаную $L'$ с началом в точке $O$, вершинах в точках $A_i$ и концом в концевой точке кривой $\gamma$. Ломаная $L'$ вписана в кривую $\gamma$ и длина каждого из ее звеньев не превышает $l/N$, поэтому $\rho(\gamma, L') \leqslant l^2k/(8N^2)$. Так как соответствующие пары вершин ломаных $L$ и $L'$ находятся на расстоянии меньшем, чем $\dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$, то $\rho(L', L) \leqslant \dfrac{l^2k}{N^2p}(1+\delta)$. Окончательно имеем $\rho(\gamma, L) \leqslant \dfrac{l^2k}{N^2}\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1+\delta}{p}\right)$.

Рассмотрим теперь вспомогательный компакт $K^* = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, K) \leqslant l\}$. Тогда начальная точка любой кривой семейства $\Gamma_{l,k}^K$ принадлежит компакту $K^*$. Возьмем $\dfrac{1}{N^3}$-сеть компакта $K^*$ и рассмотрим семейство ломаных $\overline{\Lambda}_{l,k}^N(p, \delta)$, образованное объединением всех ломаных семейств $\Lambda_{l,k}^N(p, \delta)$ с точками $\frac{1}{N^3}$-сети вместо начальной точки $O$. Тогда ломаными семейства $\overline{\Lambda}_{l,k}^N(p,\delta)$ можно приблизить любую кривую семейства $\Gamma_{l,k}^K$ также с точностью $\frac{l^2k}{N^2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1+\delta}{p}\right)$ (слагаемое порядка $\frac{1}{N^3}$ — расстояние от начальной точки кривой до ближайшего элемента $\frac{1}{N^3}$-сети — можно опять опустить благодаря выбору числа $\delta > 0$). Теперь мы видим, что для того, чтобы семейство $\overline{\Lambda}_{l,k}^N(p,\delta)$ было $\varepsilon/2$-сетью пространства $\Gamma_{l,k}^K$, достаточно положить $N=\left[\frac{lk^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}}\left(1+\frac{8(1+\delta)}{p}\right)^{1/2}\right]$. Можно также считать, что число элементов $\frac{1}{N^3}$-сети компакта $K^*$ не превышает $CN^6$, где $C$ — некоторая постоянная, не зависящая от $N$. Тогда множество $\overline{\Lambda}_{l,k}^N(p,\delta)$ имеет $CN^{11}(2p+3)^{N-1}$ элементов. Подставляя сюда полученное для $N$ выражение через $\varepsilon$, логарифмируя и выделяя главный член, получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon(\Gamma_{l,k}^K)}{lk^{1/2}\varepsilon^{-1/2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{8(1+\delta)}{p}\right)^{1/2}\log_2(2p+3).$$

Так как эта оценка верна при любом натуральном $p$ и любом $\delta > 0$, а простое вычисление показывает, что при $p=4$ и $\delta\to 0$ правая часть этого неравенства меньше трех, то окончательно имеем $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{H_\varepsilon(\Gamma_{l,k}^K)}{lk^{1/2}\varepsilon^{-1/2}} \leqslant 3$, что и завершает доказательство теоремы.


1. *Колмогоров А. Н.* Оценки минимального числа элементов $\varepsilon$-сетей в различных функциональных пространствах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // Успехи мат. наук.— 1955.— **10**, вып. 1.— С. 192—193.
2. *Колмогоров А. Н.* Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР.— 1956.— **108**.— С. 585—589.
3. *Витушкин А. Г.* К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР.— 1955.— **95**, № 4.— С 701—704.
4. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* $\varepsilon$-энтропия и $\varepsilon$-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук.— 1959.— **14**, вып. 2.— С. 3—86.
5. *Витушкин А. Г.* Абсолютная энтропия метрических пространств // Докл. АН СССР.— 1957.— **117**, № 2.— С. 745—748.
6. *Ерохин В. Д.* Об асимптотике $\varepsilon$-энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР.— 1958.— **120**, № 5.— С. 949—952.
7. *Тихомиров В. М.* Об $\varepsilon$-энтропии некоторых классов аналитических функций / Докл. АН СССР.— 1957.— **117**, № 2.— С. 191—194.
8. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Кусочно-полиномиальные приближения функций классов $W_p^\alpha$ // Мат. сб.— 1967.— **73**, № 3.— С. 331—355.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
10. *Сендов Бл., Пенков Б.* $\varepsilon$-энтропия и $\varepsilon$-емкость множества непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика.— 1962.— № 3.— С. 15—19.
11. *Сендов Бл., Пенков Б.* $\varepsilon$-ентропия и $\varepsilon$-капацитет на пространството от непрекъснатите функции // Изв. мат. ин-т БАН.— 1962.— № 6.— С. 27—50.
12. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования.— М. : Физматгиз, 1959.— 228 с.
13. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей.— М. : Наука, 1972.— 287 с.


Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.03.89