УДК 517.9

Т. Я. Азизов, д-р физ.-мат. наук (Воронеж. ун-т),
Ю. П. Гинзбург, д-р физ.-мат. наук (Одес. технол. ин-т пищ. пром-сти),
Г. Лангер, д-р математики (Германия)

О РАБОТАХ М. Г. КРЕЙНА ПО ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

This is a survey of the papers by M. G. Krein (and his disciples) devoted to the theory of operators in the spaces with indefinite metric and its applications.

Наведено огляд результатів М Г. Крейна (в тому числі і спільних з учнями) з теорії операторів в просторах з індефінітною метрикою та з деяких застосувань цієї теорії.

Чтобы в небольшом объеме статьи отразить вклад М. Г. Крейна в теорию пространств с индефинитной метрикой, сосредоточим внимание на ряде работ М. Г. Крейна (в том числе и с соавторами), не вдаваясь в приоритетные вопросы и, к сожалению, не касаясь развития его идей в многочисленных исследованиях других авторов, в частности, учеников Марка Григорьевича (об этом см., например, [1 – 3]).

1. Линейное пространство $\mathfrak{H}$, снабженное полуторалинейной формой $[x, y]$, $x, y \in \mathfrak{H}$, называют пространством с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot]$. Векторам пространства $\mathfrak{H}$ и его линеалам приписывается знак, определяемый индефинитным скалярным произведением. Например, вектор $x \in \mathfrak{H}$ называют положительным (соответственно отрицательным, нейтральным), если $[x, x] > 0$ (соответственно < 0, $= 0$). Естественный смысл вкладывается в понятия неотрицательный линеал, неположительный линеал, нейтральный линеал, индефинитный линеал и т. д. Множество максимальных неотрицательных линеалов обозначим символом $\mathfrak{M}^+$. За редким исключением, мы не будем приводить определения, имеющие аналоги в теории гильбертовых пространств или понятные из контекста. Это относится, в частности, к понятию $[\cdot, \cdot]$-ортогональности векторов и линеалов.

Пусть

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ \, [\dot{+}] \, \mathfrak{H}^- \tag{1}$$

— разложение пространства $\mathfrak{H}$ в $[\cdot, \cdot]$-ортогональную сумму положительного $\mathfrak{H}^+$ и отрицательного $\mathfrak{H}^-$ подпространств. Если существует такое разложение (1), что $\mathfrak{H}^\pm$ — полные нормированные пространства относительно норм $|[x, x]|^{1/2}$, $x \in \mathfrak{H}^\pm$, то пространство $\mathfrak{H}$ называют пространством Крейна, а при $\kappa := \min\{\dim \mathfrak{H}^+, \dim \mathfrak{H}^-\} < \infty$ — пространством Понтрягина Π_κ (для определенности будем считать, что $\kappa = \dim \mathfrak{H}^-$). Пространство Крейна является гильбертовым со скалярным произведением

$$(x, y) = [x_+, y_+] - [x_-, y_-]$$

при

$$x = x_+ + x_-, \quad y = y_+ + y_-, \quad x_\pm, y_\pm \in \mathfrak{H}^\pm.$$

Отсюда $[x, y] = (Jx, y)$, где J — разность взаимно дополнительных ортопроекторов P^+ и P^- на $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$ соответственно: $J = P^+ - P^-$. В дальнейшем вместо $[\cdot, \cdot]$-ортогональности будем говорить о J-ортогональности (в частном случае пространства Понтрягина — о π-ортогональности). Это же замечание относится и к другим понятиям. Отметим, что разложение (1) называют каноническим разложением $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — J-пространство Крейна, (1) — его каноническое разложение и $\mathfrak{K}$ — множество сжатий, действующих из $\mathfrak{H}^+$ в $\mathfrak{H}^-$. Между множествами $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{K}$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое тем, что каждое подпространство $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}^+$ является графиком некоторого оператора $K \in \mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{L} = \{x_+ + Kx_+ \mid x_+ \in \mathfrak{H}^+\}$$

и, обратно, график оператора из $\mathfrak{K}$ является элементом $\mathfrak{M}^+$. K называют угловым оператором подпространства $\mathfrak{L}$.

В заключение отметим, что определения почти всех рассматриваемых классов операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, вводятся по аналогии с соответствующими „дефинитными" определениями. Исключением из этого правила являются плюс-операторы: операторы T с областью определения $\mathfrak{D}_T$, отображающие неотрицательные векторы из $\mathfrak{D}_T$ во множество $\mathfrak{F}^+$ неотрицательных векторов (предполагается, что $\mathfrak{D}_T \cap \mathfrak{F}^+ \neq \emptyset$).

2. Пожалуй, первой публикацией М. Г. Крейна по теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой является заметка [4] (подробное изложение этих результатов см. в [5]). Фактически в этих статьях изучались J-неотрицательные вполне непрерывные интегральные операторы. Доказано, что спектр J-неотрицательного вполне непрерывного интегрального оператора A веществен, ядра $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ и $\operatorname{Ker}(A - \mu I)$ J-ортогональны при $\lambda \neq \mu$, а также, по существу, получено J-спектральное разложение оператора A, точнее, возможность представить его в виде суммы $A = A_0 + A_1$ J-неотрицательных операторов A_0 и A_1, удовлетворяющих условиям: а) $A_0^2 = A_0 A_1 = A_1 A_0 = 0$; б) A_1 представим в виде интеграла через „J-спектральную функцию" (соответствующее определение и теорема существования приведены в п. 6).

Кроме того, показано, что J-положительный вполне непрерывный оператор имеет полную систему собственных векторов и при этом его отрицательный спектр состоит из конечного числа κ собственных значений тогда и только тогда, когда J-пространство является пространством Понтрягина Π_κ.

Приведенные выше результаты являются переформулировкой соответствующих результатов М. Г. Крейна для нагруженных интегральных уравнений, функции распределения которых не монотонны. Хотя в этих работах и введено индефинитное скалярное произведение и его индефинитность подчеркнута, тем не менее в дальнейших своих работах М. Г. Крейн говорит о знаменитой статье Л. С. Понтрягина [6] как о пионерской, открывшей новое направление в функциональном анализе и теории операторов.

3. Первые работы М. Г. Крейна и его учеников [7–10] (см. также [11]) по абстрактной теории индефинитных пространств посвящены пространствам Понтрягина. Особое место занимают статьи [9, 10], написанные совместно с И. С. Иохвидовым, первым из учеников Марка Григорьевича, привлеченных им к индефинитной тематике. Почти 20 лет эти работы были единственным систематическим изложением теории пространств Π_κ и служили введением в эту теорию целому поколению математиков. В отличие от статьи Л. С. Понтрягина [6], где основным аппаратом исследования были тонкие аналитические методы, в [7 – 11] применялись геометрические методы. Это позволило развить аксиоматику пространств Π_κ, более просто получить основные результаты из [6] и существенно их развить, открыть ряд новых направлений. В частности, был построен фундамент для развития теории расширений π–изометрических и π-симметрических операторов, описаны различные типы расширений в зависимости от сигнатуры дефектных подпространств.

Основное же место в этих статьях уделено изучению плюс-операторов, в частности, π-несжимающих, π-изометрических и π-унитарных. Кроме того, что эти операторы возникают в приложениях так же естественно, как и π-эрмитовы, особое к ним внимание объясняется, с одной стороны, тем, что к ним оказалось проще применить геометрические методы, а с другой, как показал И. С. Иохвидов, использование преобразования Кэли – Неймана позволяет получать результаты для π-эрмитовых операторов как следствие соответствующих положений для π-изометрических.

В указанных работах, в частности, изучены корневые линеалы и элементарные делители π-изометрических операторов, получен общий вид π-унитарных и π-полуунитарных операторов, проведена классификация инвариантных подпространств π-унитарных и π-самосопряженных операторов, а также приведен ряд приложений, в том числе, к исследованию индефинитных теплицевых форм, проблеме продолжения винтовых дуг в пространстве Лобачевского и др. Из всего многообразия глубоких результатов этих работ выделим два, что оправдано их важностью (см., например, приведенные в пп. 4 и 6 приложения к дробно-линейным преобразованиям и квадратичным пучкам) и краткостью доказательств.

Теорема 1. *Пусть* $\Pi_\kappa = \Pi^+ [+] \Pi^-$ — *каноническое разложение пространства Понтрягина. Для того чтобы оператор* $U\colon \Pi_\kappa \to \Pi_\kappa$, *задаваемый матрицей* $\|U_{ij}\|_{i,j=1}^2$ *относительно разложения* (1), *был* π-*унитарным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$U_{11} = (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \qquad U_{12} = \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-,$$

$$U_{21} = \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}U_+, \quad U_{22} = (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}U_-,$$

где U_+ *и* U_- *суть унитарные операторы, действующие в* Π^+ *и* Π^- *соответственно, а* $\Gamma\colon \Pi^+ \to \Pi^-$ — *равномерное сжатие, т. е.* $\|\Gamma\| < 1$.

Доказательство. *Достаточность* проверяется непосредственно.

Доказывая *необходимость*, следует в качестве Γ взять угловой оператор подпространства $U\Pi^+$, а в качестве U_+ и U_- — соответственно $(I - \Gamma^*\Gamma)^{1/2}U_{11}$ и $(I - \Gamma\Gamma^*)^{1/2}U_{22}$.

Теорема 1 получила свое дальнейшее развитие; в частности, в статье [12] доказано, что аналогичными формулами задается и J-унитарный оператор в пространстве Крейна, что, впрочем, следует из приведенной схемы доказательства.

Одним из центральных вопросов теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой является проблема существования максимальных неотрицательных инвариантных подпространств у операторов рассматриваемых классов. Ниже сформулируем одну из основных теорем в этом направлении и приведем два метода ее доказательства, первый из которых М. Г. Крейн применил [8] в случае π-несжимающего, а второй [13] — J-несжимающего оператора.

Теорема 2. *Пусть* $V = \|V_{ij}\|_{i,j=1}^2$ — *матричное представление* J-*несжимающего оператора* V *относительно разложения* (1), *причем* $V\mathfrak{H}^+ \in \mathfrak{M}^+$ *и* V_{12} — *вполне непрерывный оператор:* $V_{12} \in \gamma_\infty$. *Тогда оператор* V *имеет максимальное неотрицательное инвариантное подпространство.*

Доказательство. а) *Метод аппроксимаций.* Рассмотрим операторы $V_\varepsilon =$

$= VI_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где $I_\varepsilon = \sqrt{1+\varepsilon}\,P^+ + \sqrt{1-\varepsilon}\,P^-$. Так как $[V_\varepsilon x, V_\varepsilon x] \ge [I_\varepsilon x, I_\varepsilon x] = [x, x] + \varepsilon(x, x)$, то единичная окружность свободна от спектра оператора V_ε. С помощью проекторов Риса выделим инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_\varepsilon$ оператора V_ε, соответствующее его спектру, лежащему вне единичного круга. Подпространство $\mathfrak{L}_\varepsilon$ является максимальным неотрицательным. Пусть K_ε — угловой оператор $\mathfrak{L}_\varepsilon$. Инвариантность $\mathfrak{L}_\varepsilon$ относительно V_ε равносильна равенству

$$\sqrt{1+\varepsilon}\,K_\varepsilon V_{11} + \sqrt{1-\varepsilon}\,K_\varepsilon V_{12} K_\varepsilon - \sqrt{1+\varepsilon}\,V_{21} - \sqrt{1-\varepsilon}\,V_{22} K_\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Поскольку $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}$, то без ограничения общности можно считать, что K_ε сходится в слабой операторной топологии при $\varepsilon \to 0$ к некоторому оператору K_0. Из полной непрерывности V_{12} следует, что равенство (2) при $\varepsilon \to 0$ переходит в равенство

$$K_0 V_{11} + K_0 V_{12} K_0 - V_{21} - V_{22} K_0 = 0,$$

что эквивалентно инвариантности подпространства $\mathfrak{L}_0 \in \mathfrak{M}^+$ с угловым оператором K_0 относительно V.

б) *Метод неподвижной точки.* Если $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}^+$ и K — угловой оператор $\mathfrak{L}$, то $V\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}^+$ и его угловой оператор имеет вид

$$F(K) = (V_{21} + V_{22}K)(V_{11} + V_{12}K)^{-1}. \tag{3}$$

Следовательно, $V\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда K — неподвижная точка дробно-линейного преобразования F. Из полной непрерывности V_{12} следует непрерывность функции F в слабой операторной топологии. Поскольку $F\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ (см. п. 4) и $\mathfrak{K}$ — выпуклый бикомпакт в слабой операторной топологии, то функция F имеет неподвижную точку.

Заметим, что каждый из этих методов позволяет получить некоторую дополнительную информацию об инвариантных подпространствах. С помощью первого из них доказано, что спектр $\sigma(V|\mathfrak{L}_0)$ оператора $V|\mathfrak{L}_0$ не содержит точек открытого единичного круга, а с помощью второго — что каждое инвариантное неотрицательное подпространство можно расширить до максимального неотрицательного инвариантного подпространства.

Если в условиях теоремы 2 оператор V J-унитарен, то его неунитарный спектр $\sigma_{\text{неун}}(V)$ состоит из нормальных собственных значений. Пусть

$$\sigma_{\text{неун}}(V) = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_2 = \{\,\bar{\lambda}^{-1} \,|\, \lambda \in \Omega_1\} \quad \text{и} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing.$$

Тогда существует такое подпространство $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}^+$, инвариантное относительно V, что $\sigma_{\text{неун}}(V|\mathfrak{L}) = \Omega_1$ [13].

4. Среди исследований М. Г. Крейна по теории индефинитных пространств следует выделить серию его работ с Ю. Л. Шмульяном [12, 14 – 16], в которых всесторонне и глубоко изучены плюс-операторы. Приведем некоторые результаты из этих работ.

Пусть V — плюс-оператор. Определим функции

$$\mu_+(V) = \inf\{[Vx, Vx] \,|\, [x, x] = 1\},$$

$$\mu_-(V) = \sup\{-[Vx, Vx] \,|\, [x, x] = -1\}.$$

Отсюда $\mu_+(V) \geq \mu_-(V)$ и $[Vx, Vx] \geq \mu[x, x]$ тогда и только тогда, когда $\mu \in [\mu_-(V), \mu_+(V)]$. Следовательно, если $\mu_+(V) = 0$, то область значений плюс-оператора V — неотрицательный линеал. Плюс-оператор V называется строгим, коль скоро $\mu_+(V) > 0$. Такой оператор коллинеарен J-несжимающему: $\mu_+(V)^{-1/2}V$ — J-несжимающий оператор.

Если вместе с V J-несжимающим будет и его J-сопряженный оператор V^c, то V называют J-бинесжимающим.

Пусть V — строгий плюс-оператор в пространстве Крейна и $\mathfrak{L} \in \mathfrak{M}^+$. Определим величину $\operatorname{def} V := \dim(\mathfrak{H}^+ / P^+ V\mathfrak{L})$. Оказывается, что эта величина не зависит от выбора $\mathfrak{L}$ и $\operatorname{def} V = 0$ тогда и только тогда, когда V коллинеарен J-бинесжимающему оператору.

Оператор V называют равномерно-J-растягивающим, если $[Vx, Vx] \geq [x, x] + \delta\|x\|^2$ при некотором $\delta > 0$.

Плюс-оператор V называется устойчивым, если все операторы из некоторой его окрестности являются плюс-операторами.

Доказано, что условия: а) V — устойчивый плюс-оператор; б) V — строгий плюс-оператор и $\mu_+(V) > \mu_-(V)$; в) V коллинеарен равномерно-J-растягивающему оператору — эквивалентны.

Пусть A — ограниченный оператор. J-самосопряженный оператор R называется его J-модулем, если:

$$\sigma(R) \subset [0, \infty), \quad R^2 = A^cA, \quad \operatorname{Ker} R = \operatorname{Ker} A^cA.$$

Доказано, что если V — строгий плюс-оператор и $\sigma(V^cV) \subset [0, \infty)$, то V имеет J-модуль R. Условие $\sigma(V^cV) \subset [0, \infty)$ выполнено, например, коль скоро V^c — также плюс-оператор. В указанных условиях существует такой J-изометрический оператор W, что $R = WV$. Отсюда, в частности, вытекает, что каждый J-бинесжимающий оператор V допускает J-полярное разложение: $V = UR$, где U — частично J-изометрический оператор, а R — J-модуль оператора.

В [12, 16] подробно изучено преобразование (3), которое получило название дробно-линейного преобразования Крейна – Шмульяна. Приведем некоторые полученные здесь результаты. Пусть $\mathfrak{K}^0$ — внутренность множества $\mathfrak{K}$ сжатий, действующих из $\mathfrak{H}^+$ в $\mathfrak{H}^-$. Для того чтобы преобразование (3) отображало $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^0$ в $\mathfrak{K}^0$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $V = \left\| V_{ij} \right\|_{i,j=1}^2$ был коллинеарен J-бинесжимающему оператору; это отображение биективно на $\mathfrak{K}$ в том и только том случае, если V коллинеарен J-унитарному оператору.

Из последнего утверждения и теоремы 1 (в ее усиленном варианте) непосредственно вытекает параметрическое описание биективных дробно-линейных преобразований единичного шара. Далее: для того чтобы (3) переводило $\mathfrak{K}$ в $r\mathfrak{K}$ при некотором $r \in (0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы V был коллинеарен равномерно-J-бирастягивающему оператору.

В тех же терминах формулируются предложения о дробно-линейных преобразованиях операторной „верхней полуплоскости" в себя; такие преобразования используются при описаниях множеств решений некоторых задач типа экстраполяции для оператор-функций (ср. с п. 10).

5. Важным событием было появление лекций М. Г. Крейна [17] по теории индефинитных пространств, в которых впервые обобщен вклад многих ученых.

В них отразилась не только теория, но и ее разнообразные приложения, в частности, к вопросам устойчивости решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Значительное место такие приложения занимают в совместной с Ю. Л. Далецким монографии [18]. Упомянем здесь о признаке экспоненциальной дихотомичности уравнения $dx/dt = A(t)x$ с периодическим гамильтонианом A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Этот признак формулируется в терминах поведения оператор-функции $A(t)$ при оснащении $\mathfrak{H}$ некоторой индефинитной метрикой.

6. В 1961 – 1962 гг. Марк Григорьевич совместно с Г. Лангером интенсивно занимался исследованием операторов в пространствах Крейна с приложениями к квадратичным операторным пучкам (см. статьи [19 – 21, 13] и лекции [17]). Отметим некоторые результаты этих исследований.

После того, как было получено [10] интегральное представление теплицевой последовательности с $\kappa(<\infty)$ отрицательными квадратами (что, как известно, при $\kappa = 0$ по существу эквивалентно разложению единицы для унитарного оператора в гильбертовом пространстве) и после построения общей спектральной теории операторов с вещественным спектром и умеренным ростом резольвенты (см., например, [22]), остался один шаг к доказательству существования спектральной функции у π-самосопряженного оператора в Π_κ. Это и было сделано М. Г. Крейном. Затем более полная теория была развита им совместно с Г. Лангером.

Напомним прежде всего, что ограниченный J-самосопряженный оператор A в пространстве Крейна $\mathfrak{H}$ называется дефинизируемым (важность этого понятия выяснена еще в [10]), если существует такой многочлен p, что $[p(A)x, x] \geq$ ≥ 0, $x \in \mathfrak{H}$. В качестве примеров дефинизируемых операторов можно привести: 1) интегральный оператор с положительно определенным ядром и индефинитным весом (в этом случае $p(\lambda) \equiv \lambda$; о таких операторах шла речь в п. 2); 2) любой ограниченный π-самосопряженный оператор в Π_κ. Последний факт является аналитическим следствием геометрической теоремы Понтрягина о существовании κ-мерного неположительного инвариантного подпространства $\mathfrak{L}$ у π-самосопряженного оператора A в Π_κ (см. пп. 2, 3). Действительно, если q — минимальный многочлен сужения $A\,|\,\mathfrak{L}$, то, как легко видеть,

$$[\,\overline{q}(A)q(A)x, x\,] = [\,q(A)x, q(A)x\,] \geq 0$$

для любоко $x \in \Pi_\kappa$ (здесь символом $\overline{q}$ обозначен многочлен $\overline{q(\overline{\lambda})}$).

Сформулируем основной результат о J-спектральной функции (ср. п. 2) действующего в пространстве Крейна $\mathfrak{H}$ ограниченного оператора с вещественным спектром и дефинизирующим многочленом p наименьшей степени. Обозначим через $\mathbb{R}_p$ кольцо подмножеств вещественной оси, порожденное всеми интервалами, концы которых не являются корнями многочлена p.

Теорема 3. *Пусть оператор A имеет указанные свойства. Тогда каждому $\Delta \in \mathbb{R}_p$ соответствует такой ограниченный J-самосопряженный проектор $E(\Delta)$ в $\mathfrak{H}$, что:* 1) $E(\Delta)E(\Delta') = E(\Delta \cap \Delta')$; 2) $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta')$, *если* $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$; 3) $E(\Delta)\mathfrak{H}$ — *положительное (отрицательное) подпространство, если* $p(\Delta) > 0$ $(p(\Delta) < 0)$; 4) $E(\mathbb{R}) = I$; 5) $AE(\Delta) = E(\Delta)A$; 6) $\sigma(A\,|\,E(\Delta)\mathfrak{H}) =$ $= \operatorname{clos} \Delta$.

Эта теорема для пространства Π_κ была анонсирована в [19], в общей форме доказана в диссертации Г. Лангера (1965 г.), а для частного случая J-неотрицательных операторов другим методом — М. Г. Крейном и Ю. Л. Шмульяном в статье [15], где этот результат был использован для решения задачи о полярных представлениях плюс-операторов (см. п. 4).

Отметим, что новым по сравнению с дефинитным случаем является наличие у J-спектральной функции $E(\Delta)$ конечного числа критических точек (так называется точка $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, для которой $\| E(\Delta) \| \to \infty$, когда один из концов интервала Δ стремится к λ_0).

С помощью J-спектральной функции оператора A строится его J-спектральное разложение (ср. п. 2).

7. После появления работы Даффина [23] М. Г. Крейн переформулировал его теорему о существовании двух базисов из собственных векторов сильно демпфированного матричного пучка второго порядка как предложение о существовании матричных решений Z_+ и Z_- уравнения $Z^2 + BZ + C = 0$. Затем Г. Лангер, используя свое обобщение теоремы Л. С. Понтрягина, распространил этот результат на случай пучка $\lambda^2 + \lambda B + C$, где B — самосопряженный, а $C \geq 0$ — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве. Дальнейшие совместные исследования в этом направлении, осуществленные М. Г. Крейном и Г. Лангером и отраженные в статьях [20, 21], были стимулированы проблемами теории несамосопряженных операторов [24].

Заметим, что статья [21] (даже своим названием) демонстрирует черту, присущую многим исследованиям М. Г. Крейна, а именно — тесную связь с задачами механики. Сформулируем один из основных результатов этой работы.

Пусть $B = B^*$, $C > 0$ — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda B + C$. Нетрудно видеть, что невещественный спектр $\sigma_0(L)$ пучка L дискретен.

Теорема 4. *Каждому представлению* $\sigma_0(L) = \Lambda \cup \overline{\Lambda}$ $(\overline{\Lambda} := \{\lambda \mid \overline{\lambda} \in \Lambda\}$, $\Lambda \cap \overline{\Lambda} = \varnothing)$ *соответствует вполне непрерывный оператор* Z *в* $\mathfrak{H}$ *со свойствами*: 1) $Z^2 + BZ + C = 0$; 2) $Z^*Z \leq C$; 3) *невещественный спектр оператора* Z *совпадает с* Λ *и для* $\lambda \in \Lambda$ *жордановы цепочки пучка* L *и оператора* Z *совпадают.*

8. В середине шестидесятых годов у Марка Григорьевича появилась идея написать совместно с Г. Лангером монографию, посвященную операторам в J-пространствах. Но Марк Григорьевич полагал, что прежде всего было бы желательно развить приложения существовавшей тогда общей теории. Это и привело к тем исследованиям, о которых будет идти речь в настоящем и последующих пунктах.

В 1968 – 1971 гг. появилась серия работ (см., например, [25 – 27]), в которых изложено то, что ныне называют теорией Адамяна – Арова – Крейна и что послужило основой для многочисленных исследований теоретического и прикладного характера. Напомним, что часть результатов этой теории относится к описанию всех решений проблем типа экстраполяции при наличии полюсов у некоторых аналитических функций. Последнее, грубо говоря, равносильно наличию конечного числа отрицательных квадратов у некоторых эрмитовых форм (подробнее об этом см. п. 9). Эти соображения привели Марка Григорьевича к мысли, что, как и для аналогичных классических задач, решения упомянутых более общих проблем можно получить из теории π-самосопряженных расширений и обобщенных резольвент π-эрмитова оператора A. Такая теория для плотно заданного оператора A с равными дефектными числами и соответствующая теория для π-изометрии с невырожденной областью определения [28 – 30] были разработаны Марком Григорьевичем совместно с Г. Лангером.

Отметим, что часть этих результатов, связанная с описанием обобщенных резольвент, дала некую новую форму и общность соответствующим более ранним результатам Марка Григорьевича для симметрических операторов в гильбертовом пространстве, а некоторые предложения, например, характеристические свойства Q-функции (см. п. 9), были впервые получены именно для случая пространства Π_κ.

Сформулируем основной результат статьи [28].

Пусть A — плотно заданный замкнутый π-эрмитов оператор в Π_κ, $\sigma_p(A)$ — его точечный спектр, $\mathbb{C}^+$ и $\mathbb{C}^-$— открытые верхняя и нижняя полуплоскости,

$$\sigma_p^+(A) := \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}^+, \quad \sigma_p^-(A) := \sigma_p(A) \cap \mathbb{C}^-, \quad \mathfrak{N}_{\bar{z}} := \Pi_\kappa \, [-] \, (A - zI)\mathfrak{D}_A.$$

Тогда $\sigma_p^+(A)(\sigma_p^-(A))$ состоит из собственных значений A с суммой алгебраических кратностей $\le \kappa$, а $\dim \mathfrak{N}_{\bar{z}}$ сохраняет постоянное значение для $z \in \mathbb{C}^+ \setminus \sigma_p^+(A)$ $(z \in \mathbb{C}^- \setminus \sigma_p^-(A))$. Эта размерность $n^+(A)$ $(n^-(A))$ называется верхним (нижним) дефектным числом оператора A.

Далее рассматривается случай, когда $n^+(A) = n^-(A) = n \le \infty$. Пусть $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство размерности n, $\mathring{A}$ — π-самосопряженное расширение A без выхода из Π_κ, $z_0 \in \mathbb{C}^+ \cap \rho(\mathring{A})$, Γ_{z_0} — линейный непрерывный оператор, биективно отображающий $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{N}_{z_0}$,

$$\Gamma_z := (\mathring{A} - z_0 I)(\mathring{A} - zI)^{-1}\Gamma_{z_0} \quad (z \in \rho(\mathring{A})).$$

Введем в рассмотрение класс $\tilde{N}_0(\mathfrak{G})$ — множество симметрично определенных относительно вещественной оси голоморфных функций $\mathcal{T}(z)$, значениями которых при $z \in \mathbb{C}^+$ являются плотно заданные максимальные диссипативные (в том числе несобственные) операторы в $\mathfrak{G}$. Не уточняя этих понятий, отметим только, что в случае $n = 1$ класс $\tilde{N}_0(\mathfrak{G})$ $(= \tilde{N}_0(\mathbb{C}))$ — совокупность всех скалярных функций, локально голоморфных вне вещественной оси и имеющих свойства

$$\mathcal{T}(z) = \overline{\mathcal{T}(\bar{z})}, \quad \operatorname{Im}\mathcal{T}(z)/\operatorname{Im} z \ge 0, \quad \operatorname{Im} z \ne 0,$$

а также постоянной „∞”.

Если $\tilde{A}$ — π-самосопряженное расширение оператора A в пространстве $\tilde{\Pi}_\kappa \supset \Pi_\kappa$ (оба пространства с одним и тем же κ), P — π-ортогональный проектор $\tilde{\Pi}_\kappa$ на Π_κ, то аналогично дефинитному случаю оператор-функция $R_z :=$ $:= P(\tilde{A} - zI)^{-1} | \Pi_\kappa$ называется обобщенной резольвентой оператора A.

Теорема 5. *Между множеством обобщенных резольвент R_z оператора A и множеством $\tilde{N}_0(\mathfrak{G})$ оператор-функций $\mathcal{T}(z)$ существует биективное соответствие, задаваемое равенством*

$$R_z = (\mathring{A} - zI)^{-1} - \Gamma_z(\mathcal{T}(z) + Q(z))^{-1}\Gamma_{\bar{z}}^c, \quad z \in \rho(A) \cap \rho(\mathring{A}).$$

Здесь

$$Q(z) = C - iy_0\Gamma_{z_0}^c\Gamma_{z_0} + (z - \bar{z}_0)\Gamma_{z_0}^c\Gamma_z, \quad y_0 = \operatorname{Im} z_0,$$

— так называемая Q-функция оператора A, определяемая с точностью до ограниченного самосопряженного оператора C в $\mathfrak{G}$. При этом расширение

$\tilde{A}$ можно выбрать в исходном пространстве тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}$ — постоянный самосопряженный (вообще говоря, несобственный) оператор в $\mathfrak{G}$.

9. В связи с исследованием обобщенных резольвент эрмитовых и изометрических операторов в Π_κ выяснилась важность некоторых классов комплекснозначных и операторнозначных функций в полуплоскости или единичном круге. Дадим соответствующие определения для скалярных функций.

Сперва напомним: о комплекснозначном ядре $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$, определенном для s, t из непустого множества $D \subset \mathbb{C}$, говорят, что оно имеет $\kappa\ (\geq 0)$ отрицательных квадратов, если для любых $n \in \mathbb{N}$ и $s_1, \ldots, s_n \in D$ число отрицательных собственных значений матрицы $\left\| K(s_i, s_j) \right\|_{i,j=1}^{n}$ не превышает κ, а хотя бы для одного выбора $n, s_1, \ldots, s_n$ оно равно κ.

Функция Q, мероморфная в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, принадлежит обобщенному классу Р. Неванлинны N_κ, если ядро

$$N_Q(z,\zeta) = (z - \overline{\zeta})^{-1}(Q(z) - \overline{Q(\zeta)})$$

при z, ζ, принадлежащих области D_Q голоморфности Q, имеет κ отрицательных квадратов.

Функция F, мероморфная в открытом единичном круге $\mathbb{D}$, принадлежит обобщенному классу Каратеодори C_κ, если ядро

$$C_F(z,\zeta) = (1 - z\overline{\zeta})^{-1}(F(z) + \overline{F(\zeta)}), \quad z, \zeta \in D_F,$$

имеет κ отрицательных квадратов.

Функция θ, мероморфная в $\mathbb{D}$, принадлежит обобщенному классу Шура S_κ, если ядро

$$S_\theta(z,\zeta) = (1 - \overline{\zeta}z)^{-1}(1 - \overline{\theta(\zeta)}\theta(z)), \quad z, \zeta \in D_\theta,$$

имеет κ отрицательных квадратов.

Аналогично определяются соответствующие операторные классы $N_\kappa(\mathfrak{G})$, $C_\kappa(\mathfrak{G})$, $S_\kappa(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ — гильбертово пространство.

Оказывается (это основной результат работы [30]): оператор-функция $Q(z) = Q^*(\overline{z})$ является Q-функцией некоторого простого π-эрмитова оператора A с индексом дефекта (n, n) $(n \leq \infty)$ в Π_κ тогда и только тогда, когда: 1) $Q \in N_\kappa(\mathfrak{G})$, где $\dim \mathfrak{G} = n$; 2) $w - \lim_{y \uparrow \infty} y^{-1} Q(iy) = 0$; 3) $\lim_{y \uparrow \infty} y(\operatorname{Im} Q(iy)\xi, \xi) = \infty$ для всех $\xi \in \mathfrak{G}$, $\xi \neq 0$; 4) по крайней мере для одного z оператор $\operatorname{Im} Q(z)$ равномерно положителен.

Поясним, что π-эрмитов оператор в Π_κ называется простым, если он не имеет невещественных собственных чисел и $\bigvee_{z \neq \overline{z}} \mathfrak{N}_z = \Pi_\kappa$. Каждая Q-функция оператора является Q-функцией его простой части и обратно. Простой оператор определяется своей Q-функцией с точностью до π-унитарной эквивалентности.

М. Г. Крейном и Г. Лангером (см., например, [31]) были доказаны интегральные представления функций классов N_κ и C_κ с мерой, имеющей, возможно, сингулярности в конечном числе точек. Показано также, что $\theta \in S_\kappa$ в том и только том случае, когда $\theta(z) = B(z)^{-1}\theta_0(z)$, $z \in D_\theta$, где $\theta_0 \in S_0$, а B — произведение Бляшке порядка κ. В этой же работе установлено, что каждая голоморфная при $z = 0$ функция $\theta(z)$ класса S_κ является характеристической функцией некоторого π-унитарного узла U:

$$\theta(z) = U_{22} - zU_{21}(I - zU_{11})^{-1}U_{12}, \tag{4}$$

где матрица $U = \|U_{ij}\|_{i,j=1}^2$ задает π-унитарный оператор в прямой сумме $\Pi_\kappa [+] \mathbb{C}$. К слову, Марк Григорьевич, по-видимому, первым понял, что все многочисленные виды характеристических функций линейных операторов получаются из формулы (4), где оператор U имеет специальные свойства.

Как и в дефинитном случае ($\kappa = 0$) с классами $N_\kappa, C_\kappa, S_\kappa$ связаны различные проблемы экстраполяции и представления; некоторые из них отмечены во введении к работе [31]. Сформулируем две такие проблемы.

I. *Индефинитная проблема моментов.* Задана последовательность комплексных чисел $(s_j)_{j=0}^\infty$. Когда существует такая функция $Q \in N_\kappa$, что справедливо асимптотическое разложение

$$Q(z) \sim -\frac{1}{z}\left(s_0 + \frac{s_1}{z} + \frac{s_2}{z^2} + \ldots\right), \quad z = iy, \quad y \uparrow \infty?$$

Если Q не единственна, то дать описание всех таких функций.

Как известно, при $\kappa = 0$ сформулированная проблема эквивалентна классической проблеме моментов Гамбургера. Если сузить класс N_κ, дополнительно потребовав, чтобы $Q_0 \in N_0$, где $Q_0(z) = zQ(z)$, то получим индефинитный аналог проблемы моментов Стилтьеса.

II. *Проблема продолжения эрмитово-индефинитной функции с κ отрицательными квадратами.* Обозначим через $\mathfrak{F}_{\kappa;a}$, $0 < a \le \infty$, множество непрерывных на $(-2a, 2a)$ функций f таких, что $f(t) = \overline{f(-t)}$ ($|t| < 2a$) и ядро $f(t-s)$ ($|s|, |t| < a$) имеет κ отрицательных квадратов; равенство

$$Q(z) = i\int_0^\infty e^{izt}\,\overline{f(t)}\,dt, \quad \operatorname{Im} z > \gamma_f,$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathfrak{F}_{\kappa;\infty}$ и совокупностью, выделяемой из N_κ некоторыми условиями на поведение в бесконечности. Существует ли для заданной функции $f \in \mathfrak{F}_{\kappa;a}$, $a < \infty$, продолжение $\tilde{f} \in \mathfrak{F}_{\kappa;\infty}$? Если продолжение $\tilde{f}$ не единственно, то дать описание всех таких $\tilde{f}$.

Отметим, что задача о продолжении функции $f \in \mathfrak{F}_{0;a}$, $a < \infty$, т. е. о продолжении эрмитово-положительной непрерывной функции на всю ось, являлась одной из задач, которые находились в центре внимания Марка Григорьевича, предложившего несколько ее решений. Важность этой задачи очевидна для теории вероятностей, где $f \in \mathfrak{F}_{0;\infty}$ выступает как характеристическая функция случайного распределения и как корреляционная функция стационарного случайного процесса. Но удивительно, что эта задача играет и основную роль при решении Марком Григорьевичем обратных спектральных задач для дифференциальных операторов второго порядка. Он объяснил эту глубокую связь наглядными соображениями механики колеблющейся струны (подробнее см.

статью И. С. Каца в следующем номере журнала).

10. Отмеченные выше (и некоторые другие) проблемы продолжения тесно связаны (как и при $\kappa = 0$) с теорией целых π-эрмитовых операторов. Для гильбертова пространства эта глубокая теория была построена в конце сороковых годов. Считая ее одним из наиболее значительных своих достижений, Марк Григорьевич посвятил соответствующую статью [33] своему любимому учителю Н. Г. Чеботареву, к которому, как неоднократно подчеркивал, питал глубочайшую признательность. Обобщение этих результатов в совместных с Г. Лангером исследованиях уже не представляло особых трудностей. С привлечением теории резольвентных матриц в [32] был доказан следующий результат, который в то время являлся новым и для случая гильбертова пространства.

Пусть A — простой π-эрмитов оператор с дефектом $(1, 1)$ в пространстве Π_κ; $u \in \Pi_\kappa$ называется модулем для A, если $u \notin \mathfrak{R}(A - zI)$ хотя бы для одной точки $z \in \mathbb{C}^+$ и одной точки $z \in \mathbb{C}^-$, а следовательно, для всех $z \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$, за исключением, быть может, множества изолированных точек. Модуль u называется целым, если

$$\mathfrak{R}(A - zI) \dotplus \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \Pi_\kappa$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, а оператор A называется целым, если для него существует целый модуль. Такой оператор можно реализовать как оператор умножения на z в пространстве целых функций $f(z)$ экспоненциального типа $\le a$; наименьшее такое a (≥ 0) называется типом оператора A. Предположим также, что в Π_κ задана инволюция, так что можно говорить о вещественных элементах и операторах.

Теорема 6. *Пусть A — простой вещественный целый π-эрмитов оператор с индексом дефекта* $(1, 1)$ *типа a* (≥ 0) *в* Π_κ, *u — его вещественный модуль* (*определяемый по A однозначно с точностью до вещественного множителя*). *Тогда у оператора A существует u-резольвентная матрица* $\omega(z) = \|\omega_{ij}(z)\|_{i,j=1}^2$, *элементы которой являются вещественными целыми функциями экспоненциального типа a. При нормировке* $\omega(0) = I_2$, $\det\omega(z) \equiv 1$, $z \in \mathbb{C}$, *матрица* ω *определяется единственным образом.*

Здесь u-резольвентная матрица — это такая матрица-функция $\omega(z)$, что формула

$$\left[\left(\tilde{A} - zI\right)^{-1} u, u\right] = \frac{\omega_{11}(z)\mathcal{T}(z) + \omega_{12}(z)}{\omega_{21}(z)\mathcal{T}(z) + \omega_{22}(z)}$$

определяет биективное соответствие между всеми минимальными π-самосопряженными расширениями $\tilde{A}$ оператора A (возможно, с выходом в пространство $\tilde{\Pi}_\kappa \supset \Pi_\kappa$ с тем же κ) и всеми $\mathcal{T} \in \tilde{N}_0(\mathbb{C})$.

Для сформулированных выше проблем I и II в случае неединственности решений полное их описание получается с помощью теоремы 6. План такого подхода к этим проблемам был намечен во введении к статье [31]. Для проблемы I этот план был сразу же реализован [34]. Его реализация для проблемы II по ряду причин затянулась, хотя основной результат (описание множества решений в случае неединственности) был получен сравнительно скоро и анонсирован в [35]. Одной из причин задержки явилось следующее: с индефинитной проблемой моментов Стилтьеса в [34] была связана обобщенная стилтьесовская струна с положительными и отрицательными массами и диполями и хоть нет сомнений в том, что указанный результат должен обобщаться на четные функции класса $\mathfrak{F}_{\kappa;\infty}$. до сих пор это не доказано. С другой стороны, при рассмотрении частного случая функций $f \in \mathfrak{F}_{\kappa;\infty}$ с акселерантой (т. е.

$$f(t) = f(0) - \alpha|t| - \int_0^t (t-s)H(s)\,ds, \quad \alpha > 0, \quad H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$$

соответствующие результаты были получены довольно быстро; при этом накопилось столько материала, что было решено опубликовать его (см. [36]), не дожидаясь завершения исследований в общем случае. Следует отметить, что в отличие от общего случая при наличии акселеранты резольвентная матрица по функции f строится с помощью эффективной аналитической процедуры. Наконец, когда в начале восьмидесятых годов М. Г.Крейн и Г. Лангер серьезно думали о публикации полных доказательств результатов, связанных с проблемой II, Марк Григорьевич считал полезным изложить в первой главе с более общих позиций свои старые результаты о продолжениях положительно определенных функций (класса $\mathfrak{F}_{0;a}$) и их связи с обратными задачами для дифференциальных операторов, винтовыми дугами в гильбертовом пространстве и т. д. В процессе работы над этими вопросами появилась статья, в которой индефинитная метрика уже не упоминается и которая содержит и новые результаты, например, по теории экстраполяции стационарных случайных процессов. До сих пор эта рукопись, как и полное решение проблемы II, ждут опубликования. Это судьба многих важных исследований Марка Григорьевича, которые до сих пор не опубликованы или опубликованы лишь частично.

1. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. – Berlin: Springer, 1974. – 224 p.
2. *Азизов Т.Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
3. *Азизов Т.Я., Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1979. – **17**. – С. 115 – 207.
4. *Krein M.* Sur les equations integrales chargees // C. r. Acad. sci. Paris. – 1935. – **201**. – P. 24 – 26.
5. *Крейн М. Г.* О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны // Сб. памяти акад. Граве. – Киев, 1940. – С. 88 – 103.
6. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1944. – **8**. – С. 243 – 280.
7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, №1. – С. 3 – 95.
8. *Крейн М. Г.* Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой // Там же. – 1950. – **5**, №2. – С. 180 – 190.
9. *Иохвидов И. С., Крейн М. Г.* Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 367 – 432.
10. *Иохвидов И. С., Крейн М. Г.* Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II // Там же. – 1959. – **8**. – С. 413 – 496.
11. *Iohvidov I. S., Krein M. G., Langer H.* Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. – Berlin: Academie-Verlag, 1982. – 120 p.
12. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Мат. исследования. – 1967. – **2**, вып. 3 – С. 64 – 96.
13. *Крейн М. Г.* Об одном новом принципе применения метода неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. – 1964. – **154**, №5. – С. 1023 – 1026.
14. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой // Мат. исследования. – 1986. – **1**, вып. 1. – С. 131 – 161.
15. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* J-полярное представление плюс-операторов // Там же. – 1966. – **1**, вып. 2. – С. 172 – 210.
16. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* Об устойчивых плюс-операторах в J-пространствах // Линейные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1980. – С. 67 – 83.
17. *Крейн М. Г.* Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах // Вторая летн. мат. школа. – Киев, 1965. – Т. 1. – С. 15 – 92.

18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
19. *Крейн М. Г., Лангер Г.* О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. – 1963. – **152**, №1. – С. 39 – 42.
20 *Крейн М. Г., Лангер Г.* К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // Там же. – 1964. – **154**, №6. – С. 1258 – 1261.
21. *Крейн М. Г., Лангер Г.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Тр. Междунар. симп. по приложениям теории функций в механике сплошной среды. – 1966. – **2**. – С. 283 – 322.
22. *Любич Ю. Л., Мацаев В. И.* Об операторах с отделимым спектром // Мат. сб. – 1962. – **56**, №4. – С. 433 – 468.
23. *Duffin R. J.* A minimax theory for overdamped networks // J. Rational Mech. and Anal. – 1955. – **4**, №2. – P. 221 – 233.
24. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
25. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори – Фейера и Ф. Рисса // Функцион. анализ и его прил. – 1968. – **2**, №1. – С. 1 – 19.
26. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори – Фейера и И. Шура // Там же. – 1968. – **2**, №4. – С. 1 – 17.
27. *Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г.* Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // Изв. АН АрмССР. Математика. – 1971. – **6**, №2 – 3. – С. 87 – 112.
28. *Крейн М.Г., Лангер Г.* О дефинитных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве Π_κ // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, №2. – С. 59 – 71; №3. – С. 54 – 69.
29. *Krein M. G., Langer H.* Über die verallgemeinerten Resolventen und charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume Π_κ // Colloquia Math. Soc. Janos Boyai, 5; Hilbert space operators and operator algebras. – Amsterdam; London: North Holland, 1972. – P. 353 – 399.
30. *Krein M. G., Langer H.* Über die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators im Raume Π_κ // Acta sci. math. – 1973. – **34**. – P. 191 – 230.
31. *Krein M. G., Langer H.* Über einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhangen, I: Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen // Math. Nachr. – 1977. – **77**. – P. 187 – 236.
32. *Krein M. G., Langer H.* Über einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhangen, II: Verallgemeinerte Resolventen, u-Resolventen und ganze Operatoren // J. Funct. Anal. – 1978. – **30**, №3. – P. 390 – 447.
33. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. – 1949. – **1**, №2. – С. 3 – 66.
34. *Krein M. G., Langer H.* On some extension problems which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space Π_κ, III: Indefinite analogue of the Hamburger and Stieltjes moment problems // Beitr. Analysis. – 1979. – **14**. – P. 25 – 40; 1981. – **15**. – P. 27 – 45.
35. *Крейн М.Г., Лангер Г.* Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ними проблемы продолжения // Докл. АН СССР. – 1981. – **258**, №3. – С. 537 – 541.
36. *Krein M. G., Langer H.* On some continuation problems which are closely related to the theory of operators in spaces Π_κ, IV: Continuons analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of functions // J. Oper. Theory. – 1985. – **13**. – P. 299 – 417.

Получено 17. 06. 93