УДК 517.977.52

Э. Н. Махмудов

Задачи на экстремум для дискретных и дифференциальных включений с распределенными параметрами гиперболического типа

Впервые для первой смешанной задачи для дискретных и дифференциальных включений гиперболического типа доказываются необходимые и достаточные условия экстремума. Некоторые результаты обобщаются на многомерный случай с эллиптическим оператором второго порядка для ограниченных цилиндрических областей.

Вперше для першої змішаної задачі для дискретних та диференціальних включень гіперболічного типу доводяться необхідні та достатні умови екстремуму. Деякі результати узагальнюються на багатовимірний випадок з еліптичним оператором другого порядку для обмежених циліндричних областей.

Идея получения основных результатов настоящей работы основывается на использовании аппарата локально-сопряженных отображений (ЛСО) [1] с применением конструкций выпуклого и негладкого анализа. Далее, некоторые результаты для дифференциальных включений обобщаются на многомерный случай с эллиптическим оператором второго порядка для ограниченных цилиндрических областей. По дискретным включениям гиперболического типа, а именно, типа Гурса — Дарбу при весьма ограничительных предположениях имеется единственная работа [2], а в статье [3] рассматривается краевая задача Коши для гиперболического типа с многозначным максимально монотонным оператором.

Результаты работы могут быть применены в физических задачах, связанных с процессами колебаний, гидродинамики, газодинамики и т. д.

Основные определения и понятия, приведенные ниже, можно найти в [1]. Пусть R^n — n-мерное эвклидово пространство, (x_1, x_2) — пара векторов $x_i \in R^n$, $i = 1, 2$, $\langle x_1, x_2\rangle$ — их скалярное произведение.

Если $a: R^n \to 2^{R^n}$ — выпуклозначное отображение, то $a^*(y^*, z) = \{x^* : (-x^*, y^*) \in K_a^*(z)\}$, $y^* \in R^n$ называется локально сопряженными [1] к a в точке $z = (x, y) \in \operatorname{gf} a$, где $K_a(z) \equiv K_{\operatorname{gf} a}(z)$ — конус касательных направлений к $\operatorname{gf} a$ в точке z, а $K_a^*(z)$ — сопряженный ему конус. Положим

$$W_a(x, y^*) = \inf\{\langle y, y^*\rangle : y \in a(x)\}, \quad a(x, y^*) = \{y \in a(x) : \langle y, y^*\rangle = W_a(x, y^*)\}.$$

Сформулируем задачу для дискретных включений гиперболического (смысл названия «гиперболическое» станет ясным из дальнейшего) типа:

$$\sum_{t=2,\dots,T;\,\tau=1,\dots,L-1} f_{t,\tau}(x_{t,\tau}) \to \inf, \tag{1}$$

$$x_{t-1,\tau} \in \mathbf{a}_{t,\tau}(x_{t+1,\tau}, x_{t,\tau+1}, x_{t,\tau-1}, x_{t,\tau}),\ t = 1, \dots, T-1; \quad \tau = 1, \dots, L-1, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} x_{0,\tau} = \varphi_\tau^0, \\ x_{1,\tau} = \varphi_\tau^1, \quad \tau = 1, \dots, L-1, \\ x_{t,0} = \alpha_t^0, \\ x_{t,L} = \alpha_t^L, \quad t = 1, \dots, T-1, \end{gathered} \tag{3}$$

где $a_{t,\tau}: R^{4n} \to 2^{R^n}$, $f_{t,\tau}(\cdot): R^n \to R \cup \{\pm\infty\}$, T, L — фиксированные натуральные числа, φ_τ^i, $i = 0, 1$, α_t^i, $i = 0, L$, — заданные векторы.

Нетрудно проверить, что при краевых условиях (3) разными способами можно определить траектории $\{x_{t,\tau}\}_{(t,\tau)\in\mathscr{D}} = \{x_{t,\tau} : t = 0, \dots, T,\ \tau = 0, \dots, L,\ (t, \tau) \neq (0, 0), (0, L), (T, 0), (T, L)\}$, связанные соотношениями (2). Требуется найти среди допустимых траекторий такую $\{\tilde{x}_{t,\tau}\}_{(t,\tau)\in\mathscr{D}}$, которая минимизировала бы (1).

Определение 1. *В случае выпуклости задачи* (1) — (3) ($a_{t,\tau}$ — *выпуклые отображения,* $f_{t,\tau}$ — *выпуклые собственные функции) будем говорить, что условие невырожденности удовлетворяется, если для некоторой допустимой траектории* $\{x_{t,\tau}^0\}_{(t,\tau)\in\mathscr{D}}$ *выполняются условия*

$$(x_{t+1,\tau}^0, x_{t,\tau+1}^0, x_{t,\tau-1}^0, x_{t,\tau}^0, x_{t-1,\tau}^0) \in \operatorname{ri}\operatorname{gf} a_{t,\tau}, \quad t = 1, \dots, T-1; \ \tau = 1, \dots, L-1,$$

$$x_{t,\tau}^0 \in \operatorname{ri}\operatorname{dom} f_{t,\tau}, \quad t = 2, \dots, T, \quad \tau = 1, \dots, L-1.$$

Для невыпуклых задач будем считать, что выполняется условие H: отображения $a_{t,\tau}$ таковы, что конусы касательных направлений $K_{a_{t,\tau}}(\tilde{x}_{t+1,\tau}, \tilde{x}_{t,\tau+1}, \tilde{x}_{t,\tau-1}, \tilde{x}_{t,\tau}, \tilde{x}_{t-1,\tau})$ являются локальными шатрами [1, с. 196]. Кроме того, $f_{t,\tau}(\cdot)$ в точках $\tilde{x}_{t,\tau}$ допускают верхнюю выпуклую аппроксимацию [1, с. 206], непрерывную по $\tilde{x}$, и тем самым определен субдифференциал $\partial f_{t,\tau}(\tilde{x}_{t,\tau})$ в точке $\tilde{x}_{t,\tau}$.

В п. 2 путем аппроксимации на равномерной сетке исследуется выпуклая экстремальная задача:

$$I(x(\cdot,\cdot)=\iint_Q f(x(t,\tau),t,\tau)\,dtd\tau+\int_0^1 f_0(x(1,\tau),\tau)\,d\tau\to\inf, \tag{4}$$

$$\square\, x(t,\tau)\in a(x_t'(t,\tau),x_\tau'(t,\tau),x(t,\tau)),\quad \square\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} x(0,\tau)=\varphi^0(\tau),\\ x_t'(0,\tau)=\varphi^1(\tau),\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} x(t,0)=\alpha_0(t),\\ x(t,1)=\alpha_1(t),\quad Q=[0,1]\times[0,1],\end{gathered} \tag{7}$$

где $a:R^{3n}\to 2^{R^n}$ — выпуклое замкнутое отображение; непрерывные функции $f:R^n\times Q\to R^1$ и $f_0:R^n\times[0,1]\to R^1$ выпуклы по x; φ^i, α_i, $i=0,1$, с областью значений в R^n непрерывны. Во множестве классических решений (см. ниже) требуется найти такое, которое минимизирует $I(x(\cdot,\ \cdot))$ $(x:Q\to R^n)$.

В п. 3 задача (4) — (7) обобщается на многомерный случай:

$$I(x(\cdot,\cdot))=\int_0^1\int_G f(x(t,\tau),t,\tau)\,d\tau dt+\int_G f_0(x(1,\tau),\tau)\,d\tau\to\inf, \tag{8}$$

$$x_{tt}''(t,\tau)-\mathscr{L}x(t,\tau)\in a(x_t'(t,\tau),x_{\tau_1}'(t,\tau),\ldots,x_{\tau_n}'(t,\tau),x(t,\tau)) \tag{9}$$

$$\begin{gathered} x(0,\tau)=\varphi^0(\tau),\\ x_t'(0,\tau)=\varphi^1(\tau),\quad \tau\in G\subset R^n,\end{gathered} \tag{10}$$

$$x(t,\tau)=\alpha(t,\tau),\quad \tau\in S,\quad 0<t<1, \tag{11}$$

где $f:R^n\times[0,1]\times G\to R^1$, $f_0:R^n\times[0,1]\to R^1$, $\varphi^0:G\to R^n$, $\varphi^1:G\to R^n$, $a:R^{n(n+2)}\to 2^{R^n}$ — выпуклое замкнутое отображение, G — область изменения аргументов $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_n)$, $D=\{\tau\in G,\ 0<t<1\}\subset R^{n+1}$ — ограниченный цилиндр, являющийся областью задания (9), Γ — боковая поверхность цилиндра $D:\Gamma=\{\tau\in S,\ 0<t<1\}$, где S — кусочно гладкая граница области G, $\{0\}\times G$, $\{1\}\times G$ — соответственно нижнее и верхнее основания. Эллиптический оператор второго порядка $\mathscr{L}$ имеет вид

$$\mathscr{L}x=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial\tau_i}\left(a_{ij}(\tau)\frac{\partial x}{\partial\tau_j}\right)+\sum_{i=1}^n b_i(\tau)\frac{\partial x}{\partial\tau_i}+c(\tau)x,$$

где $\|a_{ij}(\tau)\|$ — симметрическая положительно определенная матрица, $a_{ij}(\tau)$ — скалярные функции из $C^1(\overline{G})$, $b_i(\tau)$ — $(n\times n)$-матрица с элементами из $C^1(\overline{G})$, $c(\tau)$ — с элементами из $C(\overline{G})$.

Функцию $x(t,\ \tau)\in C^2(D)\cap C^1[D\cup\Gamma\cup(\{0\}\times\overline{G})]$, удовлетворяющую в D включению (9), на $\{0\}\times G$ начальным условиям (10) и на Γ граничным условиям (11), назовем классическим решением первой смешанной задачи для включения (9). Задача состоит в выборе траектории $\tilde{x}(t,\tau)$ минимизирующей $I(x(\cdot,\ \cdot))$ $(x:[0,\ 1]\times G\to R^n)$.

1 Необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных включений.

Теорема 1. *Пусть* $f_{t,\tau}$ — *непрерывны в точках некоторой допустимой траектории* $\{x^0_{t,\tau}\}_{(t,\tau)\in\mathcal{D}}$. *Тогда для того чтобы* $\{\tilde{x}^0_{t,\tau}\}_{(t,\tau)\in\mathcal{D}}$ *являлась решением выпуклой задачи* (1) — (3), *необходимо, чтобы нашлись одновременно не равные нулю число* $\lambda\in\{0,1\}$ *и векторы* $\{\psi^*_{t,\tau},\psi^*_{0,\tau}\}$, $\{\eta^*_{t,\tau},\eta^*_{t,0}\}$, $\{\zeta^*_{t,\tau},\zeta^*_{t,L}\}$, $\{x^*_{t,\tau},x^*_{T,\tau}\}$, $t=1,\dots,T-1$; $\tau=1,\dots,L-1$, *такие, что*:

1) $(\psi^*_{t,\tau},\eta^*_{t,\tau},\zeta^*_{t,\tau},\ x^*_{t+1,\tau})\in a^*_{t,\tau}(x^*_{t,\tau};\ (\tilde{x}_{t+1,\tau},\tilde{x}_{t,\tau+1},\ \tilde{x}_{t,\tau-1},\tilde{x}_{t,\tau},\ \tilde{x}_{t-1,\tau}))+$ $+\{0^{3n}\}\{\lambda\partial f_{t,\tau}(\tilde{x}_{t,\tau})+\psi^*_{t-1,\tau}+\zeta^*_{t,\tau+1}+\eta^*_{t,\tau-1}\}$;

2) $x^*_{T,\tau}=0,\ -\psi^*_{T-1,\tau}\in\lambda\partial f_{T,\tau}(\tilde{x}_{T,\tau}),\ \tau=1,\dots,L-1,\ \zeta^*_{t,L}=0,\ \eta^*_{t;0}=0,$ $t=1,\dots,T-1$.

При выполнении условия невырожденности эти условия и достаточны для оптимальности траектории $\{\tilde{x}_{t,\tau}\}_{(t,\tau)\in\mathcal{D}}$.

Доказательство. Основой идеи доказательства является сведение поставленной задачи к минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. Положим $x_t=(x_{t,0},\dots,x_{t,L})\in R^{n(L+1)}$, $t=1,\dots,T-1$, $x_0=(x_{0,1},\dots,x_{0,L-1})\in R^{n(L-1)}$, $x_T=(x_{T,1},\dots,x_{T,L-1})\in R^{n(L-1)}$. В пространстве R^m, $m=2n(L-1)+n(T-1)(L+1)$, введем множества

$$\begin{gathered} M_{t,\tau}=\{w=(x_0,\dots,x_T):(x_{t+1,\tau},x_{t,\tau+1},x_{t,\tau-1},x_{t,\tau},x_{t-1,\tau})\in \mathrm{gf}\,a_{t,\tau}\},\\ t=1,\dots,T-1;\qquad \tau=1,\dots,L-1,\\ N=\{w=(x_0,\dots,x_T):x_{1,\tau}=\varphi^1_\tau,\quad \tau=1,\dots,L-1\},\\ M_1=\{w=(x_0,\dots,x_T):x_{0,\tau}=\varphi^0_\tau,\quad \tau=1,\dots,L-1\},\\ M^L=\{w=(x_0,\dots,x_T):x_{t,L}=\alpha^L_t,\quad t=1,\dots,T-1\},\\ M_2=\{w=(x_0,\dots,x_T):x_{t,0}=\alpha^0_t,\ t=1,\dots,T-1\}. \end{gathered}\tag{12}$$

Тогда нетрудно видеть, что задача (1) — (3) эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered} f(w)=\sum_{t=2,\dots,T;\ \tau=1,\dots,L-1} f_{t,\tau}(x_{t,\tau})\to\inf,\\ w\in P=\Big(\bigcap_{\substack{t=1,\dots,T-1\\ \tau=1,\dots,L-1}} M_{t,\tau}\Big)\cap N\cap M_1\cap M^L\cap M_2. \end{gathered}\tag{13}$$

Применяя теорему 2.4.IV [1] к задаче (13), можно заключить, что существуют одновременно не равные нулю числа $\lambda\in\{0,1\}$ и векторы

$$w^*(t,\tau)\in K^*_{M_{t,\tau}}(\tilde{w}),\ \bar{w}^*\in K^*_N(\tilde{w}),\quad w^{1*}\in K^*_{M_1}(\tilde{w}),\quad w^{L*}\in K^*_{M^L}(\tilde{w}),$$

$$w^{2*}\in K^*_{M_2}(\tilde{w}),\ w^{0*}\in\partial_w f(\tilde{w}),\quad w^{0*}=(x^{0*}_0,x^{0*}_1,\dots,x^{0*}_T),\ \tilde{w}=(\tilde{x}_0,\dots,\tilde{x}_T)$$

такие, что

$$\sum_{\substack{t=1,\dots,T-1\\ \tau=1,\dots,L-1}} w^*(t,\tau)+\bar{w}^*+\hat{w}^*+w^{L*}+w^{1*}+w^{2*}=\lambda w^{0*}.\tag{14}$$

При этом

$$\begin{gathered} K^*_{M_{t,\tau}}(\tilde{w})=\{w^*=(x^*_0,\dots,x^*_T):(x^*_{t+1,\tau},x^*_{t,\tau+1},x^*_{t,\tau-1},x^*_{t,\tau},x^*_{t-1,\tau})\in K^*_{a_{t,\tau}}(\tilde{x}_{t+1,\tau},\\ \tilde{x}_{t,\tau+1},\tilde{x}_{t,\tau-1},\tilde{x}_{t,\tau},\tilde{x}_{t-1,\tau}),\ x^*_{i,j}=0,\ (i,j)\neq(t+1,\tau),(t,\tau+1),(t,\tau),\ (t=1,\tau)\},\\ t=1,\dots,T-1;\qquad \tau=1,\dots,L-1. \end{gathered}\tag{15}$$

Таким образом, используя определение введенных множеств (12) и вычисляя указанные сопряженные конусы, нетрудно убедиться, что покомпонентное представление (14) имеет вид

$$x^*_{t,\tau}(t+1,\tau)+x^*_{t,\tau}(t,\tau+1)+x^*_{t,\tau}(t,\tau)+x^*_{t,\tau}(t,\tau-1)+x^*_{t,\tau}(t-1,\tau)= \\ =\lambda x^{0*}_{t,\tau},\quad t=1,\dots,T-1;\qquad \tau=1,\dots,L-1,$$

$$x^*_{t,1}(t,0)=0,\quad x^*_{t,L-1}(t,L)=0,\ t=1,\dots,T,\ x^*_{T-1,\tau}(T,\tau)=0,\ \tau=1,\dots,L-1, \tag{16}$$

$$x^*_{T,\tau}(T-1,\tau)=\lambda x^{0*}_{T,\tau},\ \tau=1,\dots,L-1,\quad x^{0*}_{t,\tau}\in\partial f_{t,\tau}(\tilde{x}_{t,\tau}).$$

Далее, из формулы (15) и определения ЛСО получаем

$$(-x^*_{t+1,\tau}(t,\tau),-x^*_{t,\tau+1}(t,\tau),-x^*_{t,\tau-1}(t,\tau)-x^*_{t,\tau}(t,\tau))\in a^*_{t,\tau}(x^*_{t-1,\tau}(t,\tau); \tag{17}$$

$$(\tilde{x}_{t+1,\tau},\tilde{x}_{t,\tau+1},\tilde{x}_{t,\tau-1},\tilde{x}_{t,\tau},\tilde{x}_{t-1,\tau})),\quad t=1,\dots,T-1;\qquad \tau=1,\dots,L-1.$$

Тогда, определяя из (16) $x^*_{t,\tau}(t,\tau)$ и подставляя в (17), с учетом обозначений $x^*_{t+1,\tau}(t,\tau)\equiv-\psi^*_{t,\tau}$, $x^*_{t,\tau+1}(t,\tau)\equiv-\eta^*_{t,\tau}$, $x^*_{t,\tau-1}(t,\tau)\equiv-\zeta^*_{t,\tau}$, $x^*_{t-1,\tau}(t,\tau)\equiv x^*_{t,\tau}$ получаем условия 1, 2.

При условии невырожденности достаточность условий 1, 2 вытекает из того факта, что по теореме 3.10. II [1] для точки $w^{0*}\in\partial_w f(\tilde{w})\cap\cap K^*_p(\tilde{w})$ соотношение (14) справедливо при $\lambda=1$.

З а м е ч а н и е 1. При условии H с применением теоремы 4.2.V [1, с. 243] также можно проверить, что условия 1, 2 теоремы 1 являются необходимыми условиями в более общей невыпуклой задачи.

2. Н е о б х о д и м ы е и д о с т а т о ч н ы е у с л о в и я д л я д и с к р е т н о - а п п р о к с и м а ц и о н н о й з а д а ч и. Пусть N_1 и N_2 — фиксированные натуральные числа. Выберем шаги $\delta=1/N_1$ и $h=1/N_2$ по осям t и τ соответственно и на равномерной сетке $\overline{H}_{\delta h}$ на Q, воспользовавшись сеточными функциями $x(t,\tau)=x_{\delta h}(t,\tau)$, заменим $\square\, x(t,\tau)$, $x'_t(t,\tau)$ и $x'_\tau(t,\tau)$ в задаче (4) — (7) разностными операторами [4]

$$\tilde{\square}x(t,\tau)=\frac{x(t+\delta,\tau)-2x(t,\tau)+x(t-\delta,\tau)}{\delta^2}- \\ -\frac{x(t,\tau+h)-2x(t,\tau)+x(t,\tau-h)}{h^2},$$

$$A_1x(t,\tau)=\frac{x(t+\delta,\tau)-x(t,\tau)}{\delta},\quad A_2x(t,\tau)=\frac{x(t,\tau+h)-x(t,\tau)}{h},$$

$$(t,\tau)\in H_{\delta h}.$$

Здесь $H_{\delta h}$ — множество внутренних узлов ($H_{\delta h}=\{(i\delta,jh):i=1,\dots,N_1-1,$ $j=1,\dots,N_2-1\}$).

Задаче (4) — (7) сопоставим следующую дискретно-аппроксимационную задачу:

$$I_{\delta h}(x,(\cdot,\cdot))=\sum_{\substack{t=0,\dots,1-\delta\\ \tau=0,\dots,1-h}}\delta h f(x(t,\tau),t,\tau)+\sum_{\tau=0,\dots,1-h}hf_0(x(1,\tau),\tau)\to\inf,$$

$$\begin{gathered}\tilde{\square}x(t,\tau)\in a(A_1x(t,\tau),A_2x(t,\tau),x(t,\tau)),\quad(t,\tau)\in H_{\delta h},\\ x(0,\tau)=\varphi^0(\tau),\\ x(\delta,\tau)-x(0,\tau)=\delta\varphi^1(\tau),\quad \tau=h,2h,\dots,1-h,\\ x(t,0)=\alpha_0(t),\\ x(t,1)=\alpha_1(t),\quad t=\delta,2\delta,\dots,1-\delta.\end{gathered}\tag{18}$$

Теперь можно убедиться, что задачу (18) можно преобразовать так:

$$I_{\delta h}(x(\cdot,\cdot))\to\inf,$$

$$x(t-\delta,\tau)\in\tilde{a}(x(t+\delta,\tau),x(t,\tau+h),x(t,\tau-h),x(t,\tau)),\quad (t,\tau)\in H_{\delta h},$$

$$x(0,\tau)=\varphi^0(\tau),\tag{19}$$

$$x(\delta,\tau)=\varphi^0(\tau)+\delta\varphi^1(\tau),\quad \tau=h,2h,\dots,1-h,$$

$$x(t,0)=\alpha_0(t),$$

$$x(t,1)=\alpha_1(t),\quad t=\delta,2\delta,\dots,1-\delta,$$

$$\tilde{a}(x_1,x_2,x_3,x)=2(1-\sigma)x-x_1+\sigma x_2+\sigma x_3+\delta^2 a\left(\frac{x_1-x}{\delta},\frac{x_2-x}{h},x\right),$$

$$\sigma=\frac{\delta^2}{h^2}.$$

Итак, задача (19) приведена к виду (1)—(3) и для применения теоремы 1 необходимо ЛСО $\tilde{a}^*$ выразить через a^*.

Лемма 1. *Следующие включения*:

1) $(x_1^*,x_2^*,x_3^*,x^*)\in\tilde{a}^*(v^*,(x_1,x_2,x_3,x_3,x,v))$;

2) $\left(\dfrac{x_1^*+v^*}{\delta},\dfrac{h(x_2^*-\sigma v^*}{\delta^2},\dfrac{x^*+x_1^*+x_2^*-v^*+\sigma v^*}{\delta^2}\right)\in a^*\left(v^*;\left(\dfrac{x_1-x}{\delta},\dfrac{x_2-x}{h},x,\dfrac{v-2(1-\sigma)x+x_1-\sigma x_2-\sigma x_3}{\delta^2}\right)\right)$

при условии, что $\sigma v^*=x_3^*$, *эквивалентны.*

Доказательство следует из теоремы 2.1. III [1] и из выражения субдифференциала $\partial W_{\tilde{a}}(x_1,x_2,x_3,x,v^*)$ через $\partial W_a\left(\dfrac{x_1-x}{\delta},\dfrac{x_2-x}{h},x,v^*\right)$. Другой способ доказательства опирается на использование определения ЛСО $\tilde{a}^*$, a^* и эквивалентность включений для конусов касательных направлений $K_{\tilde{a}}$ и K_a.

Тогда, применяя лемму 1, учитывая положительную определенность ЛСО a^* по первому аргументу (по v^*) и обозначения

$$F^*(t,\tau)=\frac{\psi^*(t,\tau)+x^*(t,\tau)}{\delta},\quad H^*(t,\tau)=\frac{h(\eta^*(t,\tau)-\sigma x^*(t,\tau))}{\delta^2},\tag{20}$$

нетрудно получить, что условия 1, 2 теоремы 1 для задачи (19) или (18) состоят в следующем:

$$(F^*(t,\tau),H^*(t,\tau),\tilde{\Box}x^*(t,\tau))\in a^*(x^*(t,\tau);(A_1\tilde{x}(t,\tau),A_2\tilde{x}(t,\tau),\tilde{x}(t,\tau),$$

$$\tilde{\Box}\tilde{x}(t,\tau)))+\{0^{2n}\}\times\{\lambda\partial f(\tilde{x}(t,\tau),t,\tau)-A_1F^*(t-\delta,\tau)-A_2H^*(t,\tau-h)\},$$

$$(t,\tau)\in H_{\delta h},\tag{21}$$

$$x^*(1,\tau)=0$$

$$\frac{x^*(1,\tau)-x^*(1-\delta,\tau)}{\delta}\in\lambda\partial f_0(\tilde{x}(1,\tau),\tau)+F^*(1-\delta,\tau),\quad \tau=h,\dots,1-h,$$

$$x^*(t,0)=-hH^*(t,0),\quad x^*(t,1)=0,\quad t=\delta,\dots,1-\delta.\tag{22}$$

Теорема 3. *Для оптимальности траектории* $\tilde{x}(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\overline{H}_{\delta h}$ *в задаче* (18) *необходимо, чтобы нашлись одновременно не равные нулю число* $\lambda=\lambda_{\delta h}\in\{0,1\}$ *и сеточные функции* $\{F^*(t,\tau),F^*(0,\tau)\}$, $\{H^*(t,\tau),$

$H^*(t,0)\}, \{x^*(t,\tau), x^*(T,\tau)\}$, $(t,\tau)\in H_{\delta h}$, *удовлетворяющие условиям* (21), (22). *При условии невырожденности эти условия и достаточны для оптимальности* $(t,\tau),(t,\tau)\in \overline{H}_{\delta h}$.

3. Достаточное условие оптимальности для дифференциальных включений. Полагая $\lambda_{\delta h}=1$, после формального перехода к пределу в (21), (22) при $\delta, h\to 0$ получаем

$$(F^*(t,\tau), H^*(t,\tau), \Box x^*(t,\tau))\in a^*(x^*(t,\tau); (\tilde{x}'_t(t,\tau), \tilde{x}'_\tau(t,\tau), \tilde{x}(t,\tau), \Box\tilde{x}(t,\tau))) +$$
$$+\{0^{2n}\}\times\{\partial f(\tilde{x}(t,\tau),t,\tau)-F_t^{*\prime}(t,\tau)-H_\tau^{*\prime}(t,\tau)\},\quad (t,\tau)\in Q,$$
$$H^*: Q\to R^n,\quad F^*: Q\to R^n, \tag{23}$$

$$x^*(1,\tau)=0,$$
$$-x_t^{*\prime}(1,\tau)\in\partial f_0(\tilde{x}(1,\tau),\tau)+F^*(1,\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$
$$x^*(t,0)=0, \tag{24}$$
$$x^*(t,1)=0,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Добавим сюда условие, гарантирующее непустоты ЛСО a^*;

$$\Box\tilde{x}(t,\tau)\in a(\tilde{x}'_t(t,\tau), \tilde{x}'_\tau(t,\tau), \tilde{x}(t,\tau), x^*(t,\tau)). \tag{25}$$

Под решением задачи (23), (24) понимается классическое решение (точное определение дается ниже для многомерной задачи (28), (29)), состоящее из набора функций $\{F^*(t,\tau), H^*(t,\tau), X^*(t,\tau)\}$

Теорема 4. *Пусть* $\tilde{x}(t,\tau)$ — *допустимое решение выпуклой задачи* (4)—(7). *Предположим, что существуют функции* $F^*(t,\tau)$, $H^*(t,\tau)$, $x^*(t,\tau)$, *которые составляют решение сопряженного включения* (23) *и удовлетворяют условиям* (24), (25). *Тогда* $x(t,\tau)$ *оптимально.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1.III [1], выражая ЛСО a^* через субдифференциал функции W_a и применяя теорему Моро — Рокафеллара [1, с. 78], из (23) нетрудно получить, что для произвольной допустимой функции $x(t,\tau)$

$$W_a(x'_t(t,\tau), x'_\tau(t,\tau), x(t,\tau), x^*(t,\tau)) - W_a(\tilde{x}'_t(t,\tau), \tilde{x}'_\tau(t,\tau), \tilde{x}(t,\tau), x^*(t,\tau)) +$$
$$+ f(x(t,\tau),t,\tau) - f(\tilde{x}(t,\tau),t,\tau)\geqslant\langle F^*(t,\tau), x'_t(t,\tau)-\tilde{x}'_t(t,\tau)\rangle + \langle H^*(t,\tau),$$
$$x'_\tau(t,\tau)-\tilde{x}'_\tau(t,\tau)\rangle + \langle\Box x^*(t,\tau)+F_t^{*\prime}(t,\tau)+H_\tau^{*\prime}(t,\tau), x(t,\tau)-\tilde{x}(t,\tau)\rangle. \tag{26}$$

Далее, второе из условий (24) означает следующее:

$$f_0(x(1,\tau),\tau)-f_0(\tilde{x}(1,\tau),\tau)\geqslant -\langle x_t^{*\prime}(t,\tau)+F^*(t,\tau), x(1,\tau)-\tilde{x}(1,\tau)\rangle. \tag{27}$$

Интегрируя (26) по области Q, а (27) по отрезку [0, 1] и складывая их, после очевидных упрощений имеем

$$\iint_Q [f(x(t,\tau),t,\tau)-f(\tilde{x}(t,\tau),t,\tau)]\,dtd\tau + \int_0^1 [f_0(x(1,\tau),\tau)-f_0(\tilde{x}(1,\tau),\tau)]\,d\tau\geqslant$$
$$\geqslant\iint_Q\langle\Box x^*(t,\tau), x(t,\tau)-\tilde{x}(t,\tau)\rangle\,dtd\tau - \iint_Q\langle\Box(x(t,\tau)-\tilde{x}(t,\tau)), x^*(t,\tau)\rangle dtd\tau\times$$
$$-\int_0^1\langle x_t^{*\prime}(1,\tau), x(1,\tau)-\tilde{x}(1,\tau)\rangle\,d\tau.$$

Применяя формулы интегрирования по частям, учитывая начальные (6) и граничные (7) условия ($x(t,\tau)$ и $\tilde{x}(t,\tau)$ — допустимые траектории), а также условие $x^*(1,\tau)=0$ и граничные условия в (24), легко убедиться, что правая часть последнего неравенства обращается в нуль, т. е. $I(x(t,\tau)) \geqslant I(\tilde{x}(t,\tau))$. Теорема доказана.

Заметим, что некоторые подобные результаты для дифференциальных включений с сосредоточенными параметрами содержатся в [5]. По аналогии с (23) назовем сопряженным для задачи (8)—(11) следующее включение:

$$(F^*(t,\tau), H^*(t,\tau), x^{*''}_{tt}(t,\tau) - \mathscr{L}^* x^*(t,\tau)) \in a^*(x^*(t,\tau); (\tilde{x}'_t(t,\tau), \tilde{x}'_{\tau_1}(t,\tau), \ldots$$

$$\ldots, \tilde{x}'_{\tau_n}(t,\tau), \tilde{x}(t,\tau), \Box\tilde{x}(t,\tau))) + \{0^{n(n+1)}\} \times \{\partial f(\tilde{x}(t,\tau), t,\tau) - F^{*'}_t(t,\tau) -$$

$$- \operatorname{div} H^*(t,\tau)\}, H^*(t,\tau) = (H_1^*(t,\tau), \ldots, H_n(t,\tau)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad \tau \in G, \tag{28}$$

где $\mathscr{L}^*$ — сопряженный с $\mathscr{L}$ оператор. Условия (24), (25) в данном случае имеют вид

$$x^*(1,\tau) = 0,$$

$$-x^{*'}_t(1,\tau) \in \partial f_0(\tilde{x}(1,\tau),\tau) + F^*(1,\tau), \quad \tau \in G,$$

$$x^*(t,\tau) = 0, \quad (t,\tau) \in \Gamma, \tag{29}$$

$$\tilde{x}''_{tt}(t,\tau) - \mathscr{L}\tilde{x}(t,\tau) \in a(\tilde{x}'_t(t,\tau), \tilde{x}'_\tau(t,\tau), \ldots, \tilde{x}'_{\tau_n}(t,\tau), \tilde{x}(t,\tau), x^*(t,\tau)),$$

$$(t,\tau) \in [0,1] \times G.$$

Предполагается, что $F^*(t,\tau)$, $H_i^*(t,\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы по t и τ_i соответственно. Далее, будем считать что $x^*(t,\tau) \in C^2(D) \cap C^1[D \cup \Gamma \cup (\{1\} \times \bar{G})]$. Такие функции $\{F^*(t,\tau)$, $H^*(t,\tau)$, $x^*(t,\tau)\}$, удовлетворяющие в D сопряженному включению (28), на $\{1\} \times \bar{G}$ — конечным условиям и на Γ — однородным граничным условиям (см. (29)), назовем классическим решением.

Т е о р е м а 5. *Для оптимальности решения* $\tilde{x}(t,\tau)$ *задачи* (8)—(11) *достаточно существование решения* $\{F^*(t,\tau), H^*(t,\tau), X^*(t,\tau)\}$ *сопряженного дифференциального включения* (28), *удовлетворяющего условиям* (29).

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству теоремы 4 за исключением того, что здесь помимо формулы интегрирования по частям необходимо использовать известные формулы Гаусса — Остроградского и Грина для вычисления интегралов по области D и G.

З а м е ч а н и е. Наряду с классическим решением можно ввести понятие решения почти всюду (решения п. в.). По аналогии с классической теорией дифференциальных уравнений гиперболического типа функция $x(t,\tau) \in H^2(D)$ [6] называется решением п. в. задачи (7)—(11), если она удовлетворяет условиям (10), (11) и для п. в. $(t,\tau) \in D$ — включению (9).

В заключение рассмотрим пример в случае, когда в задаче (4)—(7),

$$\Box x = A_1 x'_t + A_2 x'_\tau + Ax + Bu, \quad u \in U, \tag{30}$$

где A_1, A_2, A — $(n \times n)$-матрицы, B — $(n \times r)$-матрицы, $U \subset R^r$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, $f(\cdot, t, \tau)$, $f_0(\cdot, \tau)$ — гладкие функции. Требуется найти такой управляющий параметр $\tilde{u}(t,\tau)$, чтобы соответствующее ему решение задачи (30), (6), (7) минимизировало $I(x(\cdot, \cdot))$. $a(x_1, x_2, x) = A_1x_1 + A_2x_2 + Ax + BU$, поэтому

$$a^*(v^*; (x_1, x_2, x, v)) = \{A_1^*v^*, A_2^*v^*, A^*v^*\}, \quad B^*v^* \in K_U^*(u).$$

Тогда нетрудно заключить, что (см. (23), (24))

$$\Box x^*(t,\tau) = -A_1^* x^{*'}_t(t,\tau) - A_2^* x^{*'}_\tau(t,\tau) + A^*x^*(t,\tau) + f'_x(\tilde{x}(t,\tau), t,\tau),$$

$$-x^{*'}_t(1,\tau) = f'_{0_x}(\tilde{x}(1,\tau),\tau) + A_1^*x^*(1,\tau).$$

В данном случае условие (25) имеет вид

$$\langle B\tilde{u}(t,\tau), x^*(t,\tau)\rangle = \min_{u \in U} \langle Bu, x^*(t,\tau)\rangle.$$

1. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М. : Наука, 1980.— 319 с.
2. *Фам Хыу Шак.* Опорный принцип в дискретных процессах // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11**, № 8.— С. 1485—1496.
3. *Tiba Dan.* Quelques remarques sur controle de la corde vibrante avec abstracle // C. r. Acad. sci. A.— 1984.— **299**, N 13.— P. 615—617.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 724 с.
5. *Mahmudov E. N.* Duality in the problems of optimal control for systems described by convex differential inclusions with delay // Probl. Contr. and inform. Theory.— 1987.— **16**, N 6.— P. 411—422.
6. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1976.— 392 с.

Ин-т кибернетики АН АзССР, Баку

Получено 22.09.88