УДК 517.956.226

В. Ф. Бутузов, Т. А. Уразгильдина

Асимптотическое решение задачи о распространении тепла в тонких телах

1. Постановка задачи. Для решения задачи о распространении тепла в тонких телах используют одномерное уравнение теплопроводности. Вместе с тем эта упрощенная модель не может удовлетворить требованиям, предъявляемым в настоящее время к теплофизическим расчетам. Например, точность одномерной аппроксимации заметно уменьшается с ростом интен-

сивности теплообмена на боковой поверхности [1], что даже при малых значениях критерия Био Bi (им обычно характеризуют интенсивность теплообмена) приводит к заметному отличию решения одномерной задачи от решения двумерной задачи.

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для уравнения теплопроводности с нелинейной правой частью в тонких областях: прямоугольнике и стержне постоянного поперечного сечения при малом значении критерия Био ($\mathrm{Bi} = A\varepsilon > 0$), строятся и обосновываются асимптотические разложения решений этих задач по малому параметру ε ($\varepsilon > 0$).

Рассмотрим следующую краевую задачу для уравнения теплопроводности в «тонком» прямоугольнике $g = (0 \leqslant x \leqslant a) \times (0 \leqslant z \leqslant \varepsilon b)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$\partial u/\partial t - a(x)(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial z^2) = f(u, x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x, z),$$
$$(\partial u/\partial z - A\varepsilon u)|_{z=0} = 0, \quad (\partial u/\partial z + A\varepsilon u)|_{z=\varepsilon b} = 0, \quad u|_{x=0} = \psi_1(z, t),$$
$$u|_{x=a} = \psi_2(z, t).$$

Сделаем замену переменных $z = \varepsilon y$. Тогда задача примет вид сингулярно возмущенной задачи

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \partial u/\partial t - a(x)(\varepsilon^2 \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2) = \varepsilon^2 f(u, x, t), (x, y, t) \in G =$$
$$= (0 < x < a) \times (0 < y < b) \times (0 < t \leqslant T), \tag{1}$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x, \varepsilon y), \tag{2}$$
$$(\partial u/\partial y - A\varepsilon^2 u)|_{y=0} = 0, \quad (\partial u/\partial y + A\varepsilon^2 u)|_{y=b} = 0, \quad u|_{x=0} = \psi_1(\varepsilon y, t),$$
$$u|_{x=a} = \psi_2(\varepsilon y, t). \tag{3}$$

Будем рассматривать начальное (2) и краевые условия (3) в более общем виде, когда функции φ, ψ_1 и ψ_2 зависят не от произведения εy, а в отдельности от y и ε, например $\varphi = \varphi(x, y, \varepsilon)$.

Ниже будет построено и обосновано асимптотическое разложение погранслойного типа для решения задачи (1) — (3) при следующих требованиях:

1°. Функции $a > 0$, f, φ, ψ_1 и ψ_2 при $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ являются достаточно гладкими (для простоты можно считать их бесконечно дифференцируемыми).

2°. Выполняются условия согласования начальных и граничных данных: $\varphi(0, y, \varepsilon) = \psi_1(y, 0, \varepsilon)$, $\varphi(a, y, \varepsilon) = \psi_2(y, 0, \varepsilon)$. Остальные требования будут наложены по ходу построения асимптотики.

2. Алгоритм построения асимптотики. Асимптотическое разложение решения задачи (1) — (3) ищется в виде

$$u(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, t, \varepsilon) + Q(\xi, y, t, \varepsilon) + \tilde{Q}(\tilde{\xi}, y, t, \varepsilon) + \Pi(x, y, \tau, \varepsilon) +$$
$$+ P(\xi, y, \tau, \varepsilon) + \tilde{P}(\tilde{\xi}, y, \tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\bar{u}_i(x, y, t) + Q_i(\xi, y, t) + \tilde{Q}_i(\tilde{\xi}, y, t) +$$
$$+ \Pi_i(x, y, \tau) + P_i(\xi, y, \tau) + \tilde{P}_i(\tilde{\xi}, y, \tau)), \tag{4}$$

где $\bar{u}(x, y, t, \varepsilon)$ — регулярная часть асимптотики; $Q, \tilde{Q}, \Pi, P, \tilde{P}$ — различные погранфункции, назначение которых описано ниже; $\xi = x/\varepsilon$, $\tilde{\xi} = (a - x)/\varepsilon$, $\tau = t/\varepsilon^2$ — погранслойные переменные.

Подставляя (4) в (1) и представляя f в виде $f = \bar{f} + Qf + \tilde{Q}f + \Pi f + Pf + \tilde{P}f$ [2], стандартным способом получаем уравнения для членов асимптотики. Функции φ, ψ_1 и ψ_2 также представляем в виде рядов по степеням ε, например $\varphi(x, y, \varepsilon) = \varphi_0(x, y) + \varepsilon\varphi_1(x, y) + \ldots + \varepsilon^n \varphi_n(x, y) + \ldots$.

I. Регулярная часть асимптотики. Функция $\bar{u}_0(x, y, t)$ определяется из системы $\dfrac{\partial^2 \bar{u}_0}{\partial y^2} = 0$, $\left.\dfrac{\partial \bar{u}_0}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\dfrac{\partial \bar{u}_0}{\partial y}\right|_{y=b} = 0$. Ее решением является произвольная функция переменных $x, t: \bar{u}_0 = \alpha_0(x, t)$. Таким образом, имеет место критический случай: решение вырожденной задачи определяется не однозначно, а зависит от произвольной функции [3]. Эта функция определится в ходе дальнейшего построения асимптотики. Аналогично находим произвольную функцию $\bar{u}_1 = \alpha_1(x, t)$.

Для $\bar{u}_2(x, y, t)$ получаем задачу

$$a(x)\,\partial^2\bar{u}_2/\partial y^2 = \partial\alpha_0/\partial t - a(x)\,\partial^2\alpha_0/\partial x^2 - f(\alpha_0, x, t), \quad \left.\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y}\right|_{y=0} = A\alpha_0,$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y}\right|_{y=b} = -A\alpha_0.$$

Общее решение уравнения, удовлетворяющее первому краевому условию, имеет вид

$$\bar{u}_2 = \left(\frac{1}{a(x)}\frac{\partial\alpha_0}{\partial t} - \frac{\partial^2\alpha_0}{\partial x^2} - \frac{1}{a(x)} f(\alpha_0, x, t)\right)\frac{y^2}{2} + A\alpha_0 y + \alpha_2(x, t),$$

где $\alpha_2(x, t)$ — произвольная функция. Чтобы выполнялось второе краевое условие, функция α_0 должна удовлетворять уравнению

$$\partial\alpha_0/\partial t - a(x)\,\partial^2\alpha_0/\partial x^2 = g(\alpha_0, x, t), \tag{5}$$

где $g(\alpha_0, x, t) = f(\alpha_0, x, t) - \dfrac{2A}{b} a(x)\,\alpha_0$. Начальное и краевые условия для функции α_0 будут получены ниже при построении погранфункций.

С учетом уравнения (5) выражение для $\bar{u}_2$ представим в виде $\bar{u}_2 = -\dfrac{2A}{b}\alpha_0\dfrac{y^2}{2} + A\alpha_0 y + \alpha_2(x, t)$. Для $\bar{u}_i(x, y, t)$ при $i \geqslant 3$ получаем задачу

$$a(x)\,\partial^2\bar{u}_i/\partial y^2 = \partial\bar{u}_{i-2}/\partial t - a(x)\partial^2\bar{u}_{i-2}/\partial x^2 - f_u(\alpha_0, x, t)\,\bar{u}_{i-2},$$

$$\left.\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y}\right|_{y=0} = A\bar{u}_{i-2}|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial y}\right|_{y=b} = -A\bar{u}_{i-2}|_{y=b}. \tag{6}$$

Решение этой задачи определяется с точностью до произвольной функции $\alpha_i(x, t)$, а для функции $\alpha_{i-2}(x, t)$, входящей аддитивно в выражение для $\bar{u}_{i-2}$, из условия разрешимости задачи (6) находим линейное уравнение вида

$$\partial\alpha_{i-2}/\partial t - a(x)\partial^2\alpha_{i-2}/\partial x^2 = g_{\alpha_0}(\alpha_0, x, t)\,\alpha_{i-2} + \beta_{i-2}(x, t), \tag{7}$$

где $\beta_1(x, t) = 0$, а $\beta_{i-2}(x, t)$, $i \geqslant 4$, выражается определенным образом через $\alpha_j(x, t)$, $j \leqslant i - 4$.

Таким образом, все члены регулярной части асимптотики определены пока с точностью до некоторых произвольных функций $\alpha_i(x, t)$, подчиненных уравнениям (5) и (7). Однозначное определение $\alpha_i(x, t)$ будет проведено после построения погранфункций.

II. Погранслой в окрестностях сторон $x = 0$ и $x = a$. Функция $Q(\xi, y, t, \varepsilon)$ совместно с регулярной частью должна удовлетворять краевому условию при $x = 0$ и определяется из системы

$$\varepsilon^2\partial Q/\partial t - (a_0 + a_1\varepsilon\xi + a_2\varepsilon^2\xi^2 + \ldots)(\partial^2 Q/\partial\xi^2 + \partial^2 Q/\partial y^2) = \varepsilon^2 Qf,$$

$$(\partial Q/\partial y - A\varepsilon^2 Q)|_{y=0} = 0, \quad (\partial Q/\partial y + A\varepsilon^2 Q)|_{y=b} = 0, \quad Q|_{\xi=0} = \psi_1(y, t, \varepsilon) -$$

$$- \bar{u}(0, y, t, \varepsilon),$$

где $a_0, a_1, \ldots$ — коэффициенты разложения функции $a(x)$ в ряд Тейлора. Кроме того, функция $Q(\xi, y, t, \varepsilon)$ должна быть погранфункцией по переменной ξ, т. е.

$$Q(\xi, y, t, \varepsilon) \to 0 \text{ при } \xi \to \infty. \tag{8}$$

Для $Q_0(\xi, y, t)$ получаем задачу (t играет роль параметра, $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial y^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < y < b, \quad \left.\frac{\partial Q_0}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial Q_0}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

$$Q_0|_{\xi=0} = \psi_{10}(y, t) - \alpha_0(0, t).$$

В последнее краевое условие входит неизвестная пока функция $\alpha_0(0, t)$. Решение этой задачи находим методом разделения переменных [4]:

$$Q_0(\xi, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_{0n}(t) \exp\left(-\frac{\pi n}{b}\xi\right) \cos\frac{\pi n}{b} y,$$

где $d_{0n}(t) = \frac{\delta_n}{b}\int\limits_0^b (\psi_{10}(y, t) - \alpha_0(0, t)) \cos\frac{\pi n}{b} y dy$, $\delta_n = 1$ при $n = 0$ и $\delta_n = 2$ при $n > 0$. Чтобы функция Q_0 удовлетворяла условию (8), должно выполняться равенство $d_{00}(t) = 0$. Отсюда определяется $\alpha_0(0, t)$ — краевое значение функции $\alpha_0(x, t)$ при $x = 0: \alpha_0(0, t) = \frac{1}{b}\int\limits_0^b \psi_{10}(y, t)\, dy \equiv \alpha_0^0(t)$. Таким образом, функция Q_0 полностью определена и имеет экспоненциальную оценку

$$|Q_0(\xi, y, t)| \leqslant C \exp(-\varkappa\xi), \quad \xi \geqslant 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{9}$$

(здесь и далее через C и $\varkappa$ обозначены некоторые положительные постоянные, не зависящие от ε).

Аналогично определяется $Q_1(\xi, y, t)$, а для $Q_i(\xi, y, t)$ при $i \geqslant 2$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 Q_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial y^2} = q_i(\xi, y, t), \quad \xi > 0, \quad 0 < y < b, \left.\frac{\partial Q_i}{\partial y}\right|_{y=0} = AQ_{i-2}|_{y=0},$$

$$\left.\frac{\partial Q_i}{\partial y}\right|_{y=b} = -AQ_{i-2}|_{y=b}, \quad Q_i|_{\xi=0} = g_i(y, t),$$

где $q_i(\xi, y, t)$ выражается через Q_j, $j \leqslant i-2$, и имеет оценку типа (9), $g_i(y, t) = \psi_{1i}(y, t) - \bar{u}_i(0, y, t)$. С помощью замены $Q_i = \bar{Q}_i + \hat{Q}_i$, где $\hat{Q}_i$ — известная функция, имеющая оценку типа (9), сведем краевые условия при $y = 0$ и $y = b$ к однородным и для $\bar{Q}_i(\xi, y, t)$ получим задачу

$$\frac{\partial^2 \bar{Q}_i}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{Q}_i}{\partial y^2} = \bar{q}_i(\xi, y, t), \quad \xi > 0, \quad 0 < y < b, \quad \left.\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

$$\bar{Q}_i|_{\xi=0} = \bar{g}_i(y, t), \tag{10}$$

где $\bar{q}_i = q_i - (\partial^2\hat{Q}_i/\partial\xi^2 + \partial^2\hat{Q}_i/\partial y^2)$, $\bar{g}_i(y, t) = g_i(y, t) - \hat{Q}_i(0, y, t)$. Решение задачи (10) снова может быть найдено методом разделения переменных:

$$\bar{Q}_i(\xi, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(d_{in}(t)\exp\left(-\frac{\pi n}{b}\xi\right) + \gamma_{in}(\xi, t)\right)\cos\frac{\pi n}{b} y.$$

Здесь $d_{in}(t) = \frac{\delta_n}{b}\int\limits_0^b \bar{g}_i(y, t)\cos\frac{\pi n}{b} y dy$, а $\gamma_{in}(\xi, t)$ являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 \gamma_{in}}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 \gamma_{in} = \bar{q}_{in}(\xi, t), \quad \xi > 0; \quad \gamma_{in}(0, t) = 0, \tag{11}$$

где $\bar{q}_{in}(\xi, t) = \frac{\delta_n}{b}\int\limits_0^b \bar{q}_i(\xi, y, t)\cos\frac{\pi n}{b} y dy$. Второе краевое условие для γ_{in}

получим из требования (8) к Q-функциям:

$$d_{i0}(t)+\gamma_{i0}(\infty,t)=0, \tag{12}$$

$$\gamma_{in}(\infty,t)=0, \quad n=1,2,\ldots. \tag{13}$$

Отметим, что $d_{i0}(t)$ содержит аддитивно неизвестную пока функцию $\alpha_i(0,t)$ — краевое значение $\alpha_i(x,t)$ при $x=0$. Решая задачу (11), (12) при $n=0$, находим $\gamma_{i0}(\xi,t)$ и функцию $\alpha_i(0,t)$, которую представим в виде $\alpha_i(0,t)=\alpha_i^0(t)$. При этом сумма $d_{i0}(t)+\gamma_{i0}(\xi,t)$ имеет оценку типа (9). Функции $\gamma_{in}(\xi,t)$, $n=1,2,\ldots$, являются решениями задач (11), (13), находятся в явном виде и имеют экспоненциальные оценки по погранслойной переменной ξ. Таким образом, можно найти в явном виде функции $Q_i(\xi,y,t)$ до любого номера n. Они имеют экспоненциальные оценки типа (9).

Функции $\tilde{Q}_i(\tilde{\xi},y,t)$, которые совместно с членами регулярной части должны удовлетворять краевому условию при $x=a$, определяются аналогично функциям $Q_i(\xi,y,t)$ и имеют экспоненциальную оценку по переменной $\tilde{\xi}$. При их построении находим краевые значения для функций $\alpha_i(x,t)$ при $x=a:\alpha_i(a,t)=\alpha_i^a(t)$.

III. Погранслой в окрестности начального момента времени. Функция $\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)$ совместно с регулярной частью должна удовлетворять начальному условию и определяется из системы

$$\partial\Pi/\partial\tau-a(x)(\varepsilon^2\partial^2\Pi/\partial x^2+\partial^2\Pi/\partial y^2)=\varepsilon^2\Pi f, \quad \Pi|_{\tau=0}=\varphi(x,y,\varepsilon)-\bar{u}(x,y,0,\varepsilon),$$

$$(\partial\Pi/\partial y-A\varepsilon^2\Pi)|_{y=0}=0, \quad (\partial\Pi/\partial y+A\varepsilon^2\Pi)|_{y=b}=0.$$

Кроме того, П-функция должна быть погранфункцией по переменной τ, т. е.

$$\Pi(x,y,\tau,\varepsilon)\to 0 \text{ при } \tau\to\infty. \tag{14}$$

Для $\Pi_0(x,y,\tau)$ получаем задачу (x играет роль параметра, $0\leqslant x\leqslant a$)

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}-a(x)\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial y^2}=0, \quad 0<y<b, \quad \tau>0,$$

$$\Pi_0|_{\tau=0}=\varphi_0(x,y)-\alpha_0(x,0), \ \left.\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial\Pi_0}{\partial y}\right|_{y=b}=0.$$

Ее решение, удовлетворяющее (14), имеет вид

$$\Pi_0(x,y,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{0n}(x)\exp\left(-a(x)\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\tau\right)\cos\frac{\pi n}{b}y,$$

где $b_{0n}(x)=\dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b\varphi_0(x,y)\cos\frac{\pi n}{b}y\,dy$. При этом для функции $\alpha_0(x,t)$ находим начальное значение: $\alpha_0(x,0)=\dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^b\varphi_0(x,y)\,dy\equiv\alpha_{00}(x)$. Экспоненциальная оценка для $\Pi_0(x,y,\tau)$ по погранслойной переменной τ очевидна. Аналогично определяется $\Pi_1(x,y,\tau)$, а для $\Pi_i(x,y,\tau)$ при $i\geqslant 2$ получаем задачу

$$\frac{\partial\Pi_i}{\partial\tau}-a(x)\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial y^2}=\pi_i(x,y,\tau), \quad 0<y<b, \quad \tau>0, \quad \Pi_i|_{\tau=0}=\varphi_i(x,y)-$$

$$-\bar{u}_i(x,y,0), \quad \left.\frac{\partial\Pi_i}{\partial y}\right|_{y=0}=A\Pi_{i-2}|_{y=0}, \quad \left.\frac{\partial\Pi_i}{\partial y}\right|_{y=b}=-A\Pi_{i-2}|_{y=b},$$

где $\pi_i(x,y,\tau)$ выражается через Π_j, $j\leqslant i-2$, и имеет экспоненциальную оценку по τ, а в начальное условие аддитивно входит неизвестная пока функция $\alpha_i(x,0)$. Аналогично Q-функциям Π_i можно найти методом разделения переменных. При этсм для функции $\alpha_i(x, t)$ определяется начальное значение: $\alpha_i(x, 0) = \alpha_{i0}(x)$, а $\Pi_i(x, y, \tau)$ имеет экспоненциальную оценку по переменной τ.

IV. Функции α (x, t). В п. I были получены уравнения (5) и (7) для функций $\alpha_i(x, t)$, $i=0, 1, \ldots$, а в пп. II и III при построении погранфункций определены начальное и краевые значения для $\alpha_i(x, t)$. Легко показать, что они являются согласованными в силу требования 2°, т. е. $\alpha_{i0}(0) = \alpha_i^0(0)$, $\alpha_{i0}(a) = \alpha_i^a(0)$.

3°. Пусть уравнение (5) с дополнительными условиями $\alpha_0(x, 0) = \alpha_{00}(x)$, $\alpha_0(0, t) = \alpha_0^0(t)$, $\alpha_0(a, t) = \alpha_0^a(t)$ имеет решение.

Функции $\alpha_i(x, t)$ при $i \geqslant 1$ определяются далее последовательно как решения линейных уравнений (7) с найденными выше дополнительными условиями.

V. Угловые погранфункции. Функции $P(\xi, y, \tau, \varepsilon)$ и $\tilde{P}(\tilde{\xi}, y, \tau, \varepsilon)$ (угловые погранфункции) используются для устранения невязок, внесенных погранфункциями $Q(\xi, y, t, \varepsilon)$ и $\tilde{Q}(\tilde{\xi}, y, t, \varepsilon)$ в начальное условие при $t = 0$ и погранфункцией $\Pi(x, y, \tau, \varepsilon)$ в краевые условия при $x = 0$, $x = a$.

Функция $P(\xi, y, \tau, \varepsilon)$ определяется из системы

$$\partial P/\partial\tau - (a_0 + a_1\varepsilon\xi + \ldots)(\partial^2 P/\partial\xi^2 + \partial^2 P/\partial y^2) = \varepsilon^2 P f, \quad P|_{\tau=0} = -Q|_{t=0},$$

$$P|_{\xi=0} = -\Pi|_{x=0}, \quad (\partial P/\partial y - A\varepsilon^2 P)|_{y=0} = 0, \quad (\partial P/\partial y + A\varepsilon^2 P)|_{y=b} = 0.$$

Кроме того, функция $P(\xi, y, \tau, \varepsilon)$ должна быть погранфункцией по переменным ξ и τ, т. е. $P(\xi, y, \tau, \varepsilon) \to 0$ при $\xi + \tau \to \infty$.

Для $P_0(\xi, y, \tau)$ получаем задачу

$$\frac{\partial P_0}{\partial\tau} - a_0\left(\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2}\right) = 0, \quad \xi > 0, \quad 0 < y < b, \quad \tau > 0,$$

$$P_0|_{\tau=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} d_{0n}(0)\exp\left(-\frac{\pi n}{b}\xi\right)\cos\frac{\pi n}{b}y, \quad \left.\frac{\partial P_0}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial P_0}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

$$P_0|_{\xi=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{0n}(0)\exp\left(-a_0\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\tau\right)\cos\frac{\pi n}{b}y.$$

В силу требования 2° $d_{0n}(0) = b_{0n}(0)$, т. е. для функции P_0 выполнены условия согласования начального и краевого значений при $\xi = 0$, $\tau = 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Решение задачи ищем в виде

$$P_0(\xi, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(v_{0n}(\xi, \tau) - d_{0n}(0)\exp\left(-a_0\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\tau - \frac{\pi n}{b}\xi\right)\right)\cos\frac{\pi n}{b}y.$$

Тогда для $v_{0n}(\xi, \tau)$ получим задачу

$$\partial v_{0n}/\partial\tau = a_0(\partial^2 v_{0n}/\partial\xi^2 - (\pi n/b)^2 v_{0n}) + h_{0n}(\xi, \tau), \quad \xi > 0, \quad \tau > 0,$$

$$v_{0n}|_{\tau=0} = 0, \quad v_{0n}|_{\xi=0} = 0,$$

где $h_{0n}(\xi, \tau) = -a_0 d_{0n}(0)\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\exp\left(-a_0\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\tau - \frac{\pi n}{b}\xi\right)$. Ее решение можно представить в виде

$$v_{0n}(\xi, \tau) = \int_0^{\tau} d\tau_0 \int_0^{\infty} G_n(\xi, \xi_0, \tau - \tau_0)\, h_{0n}(\xi_0, \tau_0)\, d\xi_0,$$

где $$G_n(\xi, \xi_0, \tau - \tau_0) = \frac{\exp\left(-a_0\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2(\tau - \tau_0)\right)}{2\sqrt{\pi a_0(\tau - \tau_0)}}\left(\exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{4a_0(\tau - \tau_0)}\right) - \right.$$

$-\exp\left(-\dfrac{(\xi+\xi_0)^2}{4a_0(\tau-\tau_0)}\right)\Bigg)$. Пользуясь этим представлением, нетрудно доказать, что $|v_{0n}|\leqslant C|d_{0n}(0)|\exp(-\varkappa(n^2\tau+n\xi))$. Следовательно, $P_0(\xi, y, \tau)$ имеет экспоненциальную оценку по переменным ξ и τ

$$|P_0(\xi, y, \tau)|\leqslant C\exp(-\varkappa(\xi+\tau)),\quad \xi\geqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad \tau\geqslant 0.$$

Для $P_i(\xi, y, \tau)$ при $i\geqslant 1$ получаем аналогичную задачу с ненулевой правой частью в уравнении и неоднородными краевыми условиями при $y=0$ и $y=b$ для $i\geqslant 2$. Ее решение также может быть найдено методом разделения переменных и имеет экспоненциальную оценку.

$\widetilde{P}$-Функции строятся таким же образом и имеют экспоненциальную оценку по погранслойным переменным $\tilde{\xi}$ и τ.

3. Оценка остаточного члена. Обозначим через $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ частичную сумму порядка n разложения (4).

Теорема. *Если выполнены условия* $1°-3°$, *то при достаточно малых* ε *задача* (1)—(3) *имеет единственное решение, причем* $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ *является для этого решения равномерным в* $\overline{G}$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$, *т. е.* $\max\limits_{\overline{G}}|u-U_n|=O(\varepsilon^{n+1})$.

Доказательство. Положим $w=u-U_{n+2}$. Подставляя $u=U_{n+2}+w$ в (1)—(3), получаем для остаточного члена w следующую задачу:

$$L_\varepsilon w-\varepsilon^2 f_u(U_0, x, t)\,w=h(w, x, y, t, \varepsilon),\ (x, y, t)\in G, \tag{15}$$

$$w|_{t=0}=O(\varepsilon^{n+3}),\qquad (\partial w/\partial y-A\varepsilon^2 w)|_{y=0}=O(\varepsilon^{n+3}),\qquad (\partial w/\partial y+A\varepsilon^2 w)|_{y=b}=$$
$$=O(\varepsilon^{n+3}),\quad w|_{x=0}=O(\varepsilon^{n+3}),\quad w|_{x=a}=O(\varepsilon^{n+3}). \tag{16}$$

Здесь $h(w, x, y, t, \varepsilon)=\varepsilon^2(f(U_{n+2}+w, x, t)-f_u(U_0, x, t)\,w)-L_\varepsilon U_{n+2}$. Функцию w будем искать в виде $w=\exp(kt)\cdot v$, где $k>0$ — постоянная, которую выберем из условия $k>\sup\limits_{G\times(0,\varepsilon_0]}|f_u(U_0, x, t)|$. Тогда для v получим уравнение

$$L_\varepsilon v+\varepsilon^2(k-f_u(U_0, x, t))\,v=H(v, x, y, t, \varepsilon),\quad (x, y, t)\in G,$$

с дополнительными условиями типа (16), где $H(v, x, y, t, \varepsilon)=\exp(-kt)\times\times h(\exp(kt)\,v, x, y, t, \varepsilon)$. Отметим, что в силу выбора k коэффициент $\varepsilon^2(k-f_u(U_0, x, t))$ при функции v является положительным. Нелинейная функция H обладает следующими свойствами:

1) $|H(0, x, y, t, \varepsilon)|=O(\varepsilon^{n+3})$ равномерно в $\overline{G}$;

2) $\left|\dfrac{\partial H}{\partial v}(v, x, y, t, \varepsilon)\right|=O(\varepsilon^2(\varepsilon+|v|))$. К полученной задаче для v применим метод последовательных приближений, положив $v_0=0$, $L_\varepsilon v_{k+1}+\varepsilon^2(k-f_u(U_0, x, t))\,v_{k+1}=H(v_k, x, y, t, \varepsilon)$, $k=0, 1, \ldots$, и задав для v_{k+1} те же дополнительные условия, что и для v.

Оценим первое приближение. Учитывая положительность коэффициента при v и свойство 1 функции H, на основании принципа максимума получаем

$$\max_{\overline{G}}|v_1|\leqslant C_0\varepsilon^{n+1}, \tag{17}$$

где $C_0>0$ — некоторое число. Положим $V_{k+1}=v_{k+1}-v_k$. Тогда для V_{k+1} получаем уравнение

$$L_\varepsilon V_{k+1}+\varepsilon^2(k-f_u(U_0, x, t))\,V_{k+1}=H(V_k+v_{k-1}, x, y, t, \varepsilon)-H(v_{k-1}, x, y, t, \varepsilon)$$

с однородными начальными и краевыми условиями. Используя свойство 2 функции H и принцип максимума, нетрудно доказать по индукции, что при достаточно малых ε для функций V_k и v_k справедливы оценки

$$\max_{\overline{G}}|V_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}\max_{\overline{G}}|V_k|,\quad \max_{\overline{G}}|v_k|\leqslant 2C_0\varepsilon^{n+1}.$$

Первое неравенство обеспечивает равномерную в $\bar{G}$ сходимость последовательных приближений v_k, а из второго неравенства следует, что предельная функция $v(x, y, t, \varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $\max\limits_{\bar{G}} |v| \leqslant 2C_0\varepsilon^{n+1}$. Таким образом, задача (15), (16) имеет единственное решение, причем $\max\limits_{\bar{G}} |w| = O(\varepsilon^{n+1})$. Так как $U_{n+2} - U_n = O(\varepsilon^{n+1})$, то $\max\limits_{\bar{G}} |u - U_n| \leqslant \max\limits_{\bar{G}} |u - U_{n+2}| + \max\limits_{\bar{G}} |U_{n+2} - U_n| = O(\varepsilon^{n+1})$, что и доказывает теорему.

4. Асимптотическое решение задачи в стержне постоянного поперечного сечения. Рассматривается краевая задача

$$\varepsilon^2 \partial u/\partial t - a(x)(\varepsilon^2 \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2) = \varepsilon^2 f(u, x, t), \quad 0 < x < a,$$
$$(y, z) \in \Omega, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u|_{t=0} = \varphi(x, y, z, \varepsilon), \quad (\partial u/\partial \vec{n} + A\varepsilon^2 u)|_\Gamma = 0, \quad (18)$$
$$u|_{x=0} = \psi_1(y, z, t, \varepsilon), \quad u|_{x=a} = \psi_2(y, z, t, \varepsilon),$$

где Ω — область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $\Gamma = \partial\Omega \times (0 \leqslant x \leqslant a)$ — боковая поверхность стержня, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к Γ. Эта задача получается аналогично (1)—(3) из задачи для тонкого стержня растяжением переменных y и z с коэффициентом ε.

Асимптотическое разложение решения ищется в виде ряда (4), только теперь все члены ряда зависят также от z. Члены регулярной части асимптотики на каждом шаге определяются с точностью до произвольной функции $\alpha_i(x, t)$, $i = 0, 1, \ldots$, для которой из условия разрешимости краевой задачи для u_{i+2} получаем уравнения вида (5) и (7) (нужно лишь заменить число $2A/b$ на Ap/s, где s — площадь Ω, p — длина $\partial\Omega$). Начальное и краевые значения для $\alpha_i(x, t)$ снова определяются при рассмотрении погранфункций. Например, для $Q_0(\xi, y, z, t)$ получаем задачу

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad (y, z) \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial Q_0}{\partial \vec{n}}\right|_\Gamma = 0,$$
$$Q_0|_{\xi=0} = \psi_{10}(y, z, t) - \alpha_0(0, t).$$

Ее решение находим методом разделения переменных

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{\infty} d_{0n}(t) \exp(-\lambda_n \xi) \varphi_n(y, z),$$

где $\lambda_n (0 = \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots)$ и $\varphi_n(y, z)$ — собственные значения и собственные функции задачи

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \lambda^2 F = 0, \quad (y, z) \in \Omega, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (19)$$
$$d_{0n}(t) = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \iint\limits_{\Omega} (\psi_{10}(y, z, t) - \alpha_0(0, t)) \varphi_n(y, z)\, dy dz.$$

Чтобы функция $Q_0(\xi, y, z, t)$ была погранфункцией по погранслойной переменной ξ, должно выполняться условие $d_{00}(t) = 0$. Отсюда определяется краевое значение функции $\alpha_0(x, t)$ при $x = 0$: $\alpha_0(0, t) = \alpha_0^0(t)$. Построение остальных погранфункций проводится как и в п. 2. Отличие заключается лишь в том, что теперь разложение решений ведется по собственным функциям задачи (19).

При выполнении требований, аналогичных требованиям 1°—3° из пп. 1, 2, вытекает теорема о существовании и единственности решения задачи (18) и об оценке остаточного члена асимптотического разложения, как и в п. 3.

1. *Зино И. Е., Соковишин Ю. А.* О точности одномерной аппроксимации для двойных стержней // Инж.-физ. журн.— 1976.— 31, № 2.— С. 334—338.
2. *Бутузов В. Ф.* Асимптотика решений некоторых модельных задач химической кинетики с учетом диффузии // Докл. АН СССР.— 1978.— 242, № 2.— С. 268—271.
3. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 106 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.— 736 с.

Моск. ун-т

Получено 03.06.86