УДК 517.5

В. Т. Мартынюк

Точные константы приближения периодических функций операторами Фейера

Получена точная оценка приближения непрерывных 2π-периодических функций сумматорными операторами Фейера, выраженная через модуль непрерывности функции. На классе функций, удовлетворяющих условию Липшица, получена точная константа приближения интегральными и сумматорными операторами Фейера.

Одержана точна оцінка наближення неперервних 2π-періодичних функцій суматорними операторами Фейєра, яка виражена через модуль неперервності функції. На класі функцій, які задовольняють умові Ліпшиця, одержана точна константа наближення інтегральними і суматорними операторами Фейєра.

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных и 2π-периодических функций с нормой $\|f\| = \max_x |f(x)|$, а $\omega(f; t) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant t} |f(x_1) - f(x_2)|$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Интегральные операторы Фейера в пространстве $C_{2\pi}$ определяются равенством (см., например, [1, с. 187])

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right)^2 dt, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Сумматорные аналоги операторов (1) определяются следующим образом. Для каждого натурального числа n определим семейство Λ_n наборов из $2n+1$ точек $\{x_k^{(n)}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, отрезка $[-\pi, \pi]$ таких, что

$$-\pi \leqslant x_{-n}^{(n)} < x_{-n+1}^{(n)} < \ldots < x_{-1}^{(n)} < x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant \pi$$

и

$$x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)} = \frac{2\pi}{2n+1}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots, \pm(n-1), n. \tag{2}$$

Ясно, что в силу (2) $-\frac{\pi}{2n+1} \leqslant x_0^{(n)} \leqslant \frac{\pi}{2n+1}$ и весь набор точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ определяется выбором точки $x_0^{(n)}$.

В пространстве C_2 определим сумматорный оператор Фейера с помощью равенства

$$U_n(f; \{x_k^{(n)}\}; x) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sum_{k=-n}^{n} f(x_k^{(n)}) \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}(x - x_k^{(n)})}{\sin \frac{1}{2}(x - x_k^{(n)})} \right)^2. \tag{3}$$

В настоящей работе находятся точные константы приближения функций операторами (1) и (3).

1. Точная константа приближения функций класса Липшица интегральными операторами Фейера. Свойства операторов Фейера (1) и точность приближения ими функций из $C_{2\pi}$ изучались во многих работах. В частности, в работе [2] получено точное неравенство

$$\| f - F_n(f) \| \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln(n+1)\, \omega\left(f; \frac{2\pi}{n+1}\right). \tag{4}$$

Для приближения функций класса Липшица с показателем 1 и константой $K > 0$ ($\mathrm{Lip}_K 1$) известна следующая оценка С. Н. Бернштейна (см., например, [3, с. 205])

$$\| f - F_n(f) \| \leqslant CK \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \tag{5}$$

где C — абсолютная положительная константа.

Неравенство (5) является частным случаем неравенства (4), причем $C = 2\pi/\ln 2$. Однако неравенство (5) при таком значении константы C уже не является точным, т. е. константу $C = 2\pi/\ln 2$ можно уменьшить и неравенство сохранится для всех $f \in \mathrm{Lip}_K 1$ и всех $n = 1, 2, \ldots$.

Легко видеть, что наименьшее значение константы $C > 0$ в неравенстве (5) определяется равенством

$$\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \inf C = \sup_{n=1,2,\ldots} \sup_{f \in \mathrm{Lip}_K 1} \frac{(n+1) \| f - F_n(f) \|}{K \ln(n+1)}.$$

Обозначим

$$\lambda_n = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_K 1} \frac{(n+1) \| f - F_n(f) \|}{K \ln(n+1)}.$$

Используя методику из [4], нетрудно убедиться, что

$$\lambda_n = \frac{(n+1) F_n(|t|; 0)}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\pi \ln(n+1)} \int_0^{\pi} t \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} t} \right)^2 dt. \tag{6}$$

В работе [5] (см. также [3, с. 210]) исследовано поведение последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. В частности, получено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \dfrac{2}{\pi}$. Покажем, что $\lambda > 2/\pi$. Воспользовавшись тождеством

$$\left(\frac{\sin \frac{m}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \right)^2 = m + 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) \cos k\alpha, \tag{7}$$

из (6) получим

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi \ln(n+1)} \left(\frac{(n+1)\pi^2}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \frac{n-2k}{(2k+1)^2} \right). \tag{8}$$

Далее, используя равенство (см., например, [6, с. 21]) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$, из (8) получаем

$$\lambda_n = \frac{4}{\pi \ln(n+1)} \left((n+1) \sum_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \frac{1}{2k-1} \right).$$

Отсюда, используя неравенства

$$\frac{1}{2}\ln(2m+1) < \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{2k+1} < 1 + \frac{1}{2}\ln(2m-1),$$

$$\int_{m+1}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2} < \sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} < \int_{m}^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^2},$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\lambda_n < \frac{2}{\pi} + \frac{6}{\pi\ln(n+1)} + \frac{4}{\pi(n-1)\ln(n+1)},$$

$$\lambda_n > \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi\ln(n+1)} - \frac{2}{\pi(n+2)\ln(n+1)}.$$

Отсюда получаем асимптотическое равенство [5]

$$\lambda_n = \frac{2}{\pi} + O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right),$$

а для $n \geqslant 3$ — неравенство

$$\lambda_n < \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi\ln 2} < 2{,}5.$$

С другой стороны, из (8) непосредственно получаем

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2-4}{\pi\ln 2} > 2{,}6; \quad \lambda_2 = \frac{1}{\pi\ln 3}\left(\frac{3\pi^2}{2} - 8\right) < 2.$$

Следовательно,

$$\lambda = \sup_{n=1,2,\ldots}\lambda_n = \lambda_1 = \frac{\pi^2-4}{\pi\ln 2}.$$

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения

Теорема 1. *Если $f(x)$ — 2π-периодическая функция, принадлежащая классу* $\mathrm{Lip}_K 1$ и $F_n(f)$ — *интегральный оператор Фейера* (1), *то для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$\| f - F_n(f) \| \leqslant \frac{\pi^2-4}{\pi\ln 2}\frac{\ln(n+1)}{n+1}. \tag{9}$$

Константа $\dfrac{\pi^2-4}{\pi\ln 2}$ *в правой части неравенства* (9) *является точной.*

2. Точные константы приближения функций сумматорными операторами Фейера. Рассмотрим теперь приближение функций из $C_{2\pi}$ сумматорными операторами (3). Для случая $x_k^{(n)} = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$, эти операторы исследовал С. Н. Бернштейн (см., например, [3, с. 561]). В частности показано, что для каждой функции $f \in C_{2\pi}$ последовательность $\{U_n(f; \{x_k^{(n)}\}; x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $f(x)$. С помощью тех же рассуждений легко показать, что это справедливо и для любого набора точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$. Исследуем точность приближения функций операторами (3). Как и в [3, с. 565], учитывая (2), легко убеждаемся, что для каждого набора точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ справедливы равенства

$$\sum_{k=-n}^{n}\cos mx_k^{(n)} = \sum_{k=-n}^{n}\sin mx_k^{(n)} = 0, \; m = 1, 2, \ldots, n; \; n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Используя (10), легко убеждаемся, что тождественно по x выполняются равенства

$$U_n(1;\ \{x_k^{(n)}\};\ x) \equiv 1, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Учитывая (10) и свойства модуля непрерывности $\omega(f, t)$, убеждаемся, что каким бы ни был набор точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$, для каждой функции $f \in C_{2\pi}$ и оператора (3) существует такая абсолютная константа $C > 0$, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$\| f - U_n(f;\ \{x_k^{(n)}\}) \| \leqslant C \ln(n+1)\, \omega\left(f;\ \frac{2\pi}{2n+1}\right). \tag{12}$$

Будем искать наименьшее значение μ константы C в неравенстве (12). Легко видеть, что это значение определяется равенством

$$\mu = \sup_{n=1,2,\dots} \sup_{\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n} \sup_{\substack{f \in C_{2\pi} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\| f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \|}{\ln(n+1)\, \omega\left(f;\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\right)}.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в [7] при изучении аналогичной величины, получаем

$$\mu = \sup_{n=1,2,\dots} \sup_{\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n} \frac{1}{\ln(n+1)} U_n(f_n; \{x_k^{(n)}\}; 0), \tag{13}$$

где $f_n(x)$ — четная 2π-периодическая функция, определенная на $[0, \pi]$ соотношениями

$$f_n(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(n+1)x}{2\pi}\right] + 1, & \text{если } \dfrac{2k\pi}{2n+1} < x < \dfrac{2(k+1)\pi}{2n+1}, \\ & k = 0, 1, \dots, n \\ \left[\dfrac{2(n+1)x}{2\pi}\right], & \text{если } x = \dfrac{2k\pi}{2n+1}. \end{cases} \tag{14}$$

Обозначим

$$\mu_n(\{x_k^{(n)}\}) = \frac{1}{\ln(n+1)} U_n(f_n; \{x_k^{(n)}\}; 0), \tag{15}$$

$$A_n(t) = \left(\frac{\sin \dfrac{n+1}{2} t}{\sin \dfrac{1}{2} t} \right)^2. \tag{16}$$

Предположим сначала, что $x_0^{(n)} = 0$.

Учитывая (3), (14) — (16), для всех $n \geqslant 2$ имеем

$$\mu_n\left(\left\{\frac{2k\pi}{2n+1}\right\}\right) = \frac{2}{(n+1)(2n+1)\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k A_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2n+1}{2(n+1)\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\ln(2n+1)}{\ln(n+1)} < 1 + \frac{\ln 2}{\ln 3} < 1{,}65.$$

Далее,

$$\mu_1\left(\left\{\frac{2k\pi}{3}\right\}\right) = \frac{1}{3\ln 2} < 0{,}5.$$

Таким образом, для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\mu_n\left(\left\{\frac{2k\pi}{2n+1}\right\}\right) < 1{,}65. \qquad (17)$$

Пусть теперь $x_0^{(n)} \neq 0$. Предположим для определенности, что $0 < x_0^{(n)} \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2n+1}$ $\left(\text{случай} -\frac{\pi}{2n+1} \leqslant x_0^{(n)} < 0 \text{ рассматривается аналогично}\right)$. В этом случае, учитывая (11), (14) — (16), для всех $n \geqslant 5$ имеем

$$\mu_n(\{x_k^{(n)}\}) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)\ln(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)A_n(x_k^{(n)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} kA_n(x_{-k}^{(n)})\right) = \frac{1}{\ln(n+1)}\left(1 + \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} kA_n(x_k^{(n)}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=2}^{n}(k-1)A_n(x_{-k}^{(n)})\right)\right) \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\left(1 + \frac{\pi^2}{(n+1)(2n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(x_k^{(n)})^2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{(x_{-k}^{(n)})^2}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$\frac{2k\pi}{2n+1} < x_k^{(n)} \leqslant \frac{2k+1}{2n+1}\pi, \quad \frac{2k-1}{2n+1}\pi \leqslant |x_{-k}^{(n)}| < \frac{2k\pi}{2n+1},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (18)$$

имеем

$$\mu_n(\{x_k^{(n)}\}) \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}\left(1 + \frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{(2k-1)^2}\right)\right) <$$

$$< \frac{1}{\ln(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k} + 2\sum_{k=2}^{6}\frac{k-1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=6}^{n}\frac{1}{k}\right) <$$

$$< \frac{1}{\ln(n+1)}\left(2{,}83 + \sum_{k=6}^{n}\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{dx}{x}\right) < 1{,}64.$$

Таким образом, для всех $n \geqslant 5$

$$\sup_{\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n} \mu_n(\{x_k^{(n)}\}) < 1{,}64. \qquad (19)$$

Далее, учитывая (3), (14) — (16), имеем

$$\mu_1(\{x_k^{(1)}\}) = \frac{1}{\ln 2}\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\sin x_1^{(1)}}{\sin\frac{1}{2}x_1^{(1)}}\right)^2\right) = \frac{4 + \cos x_1^{(1)}}{3\ln 2}$$

и

$$\sup_{\{x_k^{(1)}\} \in \Lambda_1} \mu_1(\{x_k^{(1)}\}) = \frac{4 + \cos\frac{2\pi}{3}}{3\ln 2} = \frac{7}{6\ln 2} > 1{,}65. \qquad (20)$$

Аналогично

$$\mu_2(\{x_k^{(2)}\}) = \frac{1}{\ln 3}\left(1 + \frac{1}{15}\left(\sum_{k=1}^{2} kA_2(x_k^{(2)}) + A_2(x_{-2}^{(2)})\right)\right).$$

Учитывая (18), после простых преобразований для любого набора $\{x_k^{(2)}\} \in \Lambda_2$ получаем

$$\mu_2(\{x_k^{(2)}\}) \leqslant \frac{1}{\ln 3}\left(1 + \frac{1}{15}\left(16 - \cos^3\frac{\pi}{5} - 4\cos\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

и после непосредственного подсчета имеем

$$\sup_{\{x_k^{(2)}\}\in\Lambda_2} \mu_2(\{x_k^{(2)}\}) < 1{,}6. \qquad (21)$$

Аналогично убеждаемся и в справедливости неравенств

$$\sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n} \mu_n(\{x_k^{(n)}\}) < 1,6, \qquad n = 3,\ 4. \qquad (22)$$

Из (13), (15), (17), (19) — (22) имеем

$$\mu = \sup_{n=1,2,\ldots} \mu_n(\{x_k^{(n)}\}) = \mu_1 = \frac{7}{6\ln 2}.$$

Таким образом, наименьшее значение константы C в неравенстве (12) равно $\frac{7}{6\ln 2}$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Каким бы ни был набор точек $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и оператора $U_n(f; \{x_k^{(n)}\})$, определенного равенством* (3), *справедливы неравенства*

$$\| f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| \leqslant \frac{7}{6\ln 2} \ln(n+1)\, \omega\left(f; \frac{2\pi}{2n+1}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (23)$$

Константа $\frac{7}{6\ln 2}$ в неравенстве (23) *является точной.*

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}_K 1$, то для любого набора точек $\{x_k^n\} \in \Lambda_n$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ существует константа $C > 0$ такая, что выполняется неравенство*

$$\| f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| \leqslant C\, \frac{K\ln(n+1)}{n+1}. \qquad (24)$$

Из (23) следует, что в качестве константы C в неравенстве (24) можно взять $\frac{14\pi}{9\ln 2}$. Но, оказывается, что такое значение константы не является точным.

Точное значение ν константы C в неравенстве (24) определяется равенством

$$\nu = \sup_{n=1,2,\ldots}\ \sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n}\ \sup_{f\in\mathrm{Lip}_K 1} \frac{(n+1)\| f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \|}{K\ln(n+1)}. \qquad (25)$$

Для вычисления ν используем методику из [7].

Пусть $f \in \mathrm{Lip}_K 1$, n и $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ фиксированы. Если

$$\| f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}) \| = | f(x_0) - U_n(f; \{x_k^{(n)}\}; x_0) |,$$

то рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x + x_0)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}_K 1$.

Ввиду равенства

$$|f(x_0)-U_n(f;\{x_k^{(n)}\};x_0)|=|\varphi(0)-U_n(\varphi;\{u_k^{(n)}\};0)|,$$

где $\{u_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$, имеем, что для каждой функции $f\in\mathrm{Lip}_K 1$ и каждого набора точек $\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$ существуют функция $\varphi\in\mathrm{Lip}_K 1$ и $\{u_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$ такие, что

$$\|f-U_n(f;\{x_k^{(n)}\})\|=|\varphi(0)-U_n(\varphi;\{u_k^{(n)}\};0)|. \tag{26}$$

Для каждой 2π-периодической функции $\varphi\in\mathrm{Lip}_K 1$ функция $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$ также принадлежит классу $\mathrm{Lip}_K 1$ и

$$|\varphi(0)-U_n(\varphi;\{u_k^{(n)}\};0)|=|U_n(\psi;\{u_k^{(n)}\};0)|. \tag{27}$$

Обозначив через $\mathrm{Lip}_K^0 1$ множество функций $\psi(x)$ из класса $\mathrm{Lip}_K 1$, для которых $\psi(0)=0$, из (26) и (27) имеем

$$\sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n}\ \sup_{f\in\mathrm{Lip}_K 1}\|f-U_n(f;\{x_k^{(n)}\})\|=\sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n}\ \sup_{f\in\mathrm{Lip}_K^0 1}|U_n(f;\{x_k^{(n)}\};0)|. \tag{28}$$

Далее, обозначим через $f_0(x)$ четную функцию из $C_{2\pi}$, определенную на $[0,\pi]$ равенством $f_0(x)=Kx$. Ясно, что $f_0\in\mathrm{Lip}_K^0 1$ и, так как для каждой функции $f\in\mathrm{Lip}_K^0 1$ и всех x выполняется неравенство $f(x)\leqslant f_0(x)$, то, учитывая (3), (16), (25) и (28), имеем

$$\nu=\sup_{n=1,2,\ldots}\ \sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n}\frac{1}{(2n+1)\ln(n+1)}\sum_{k=-n}^{n}|x_k^{(n)}|A_n(x_k^{(n)}). \tag{29}$$

Как и ранее, предположим для определенности, что $0\leqslant x_0^{(n)}\leqslant\dfrac{\pi}{2n+1}$. Обозначим

$$\nu_n(\{x_k^{(n)}\})=\frac{1}{(2n+1)\ln(n+1)}\sum_{k=-n}^{n}|x_k^{(n)}|A_n(x_k^{(n)}). \tag{30}$$

Пусть теперь $n\geqslant 7$. Так как функция $\dfrac{x}{\sin x}$ возрастает для $0\leqslant x\leqslant\pi/2$, то, учитывая (18), для произвольного набора $\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n$ получаем

$$\nu_n(\{x_k^{(n)}\})\leqslant\frac{1}{(2n+1)\ln(n+1)}\left(\frac{\pi(n+1)^2}{2n+1}+4\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{x_k^{(n)}}\left(\frac{\frac12 x_k^{(n)}}{\sin\frac12 x_k^{(n)}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+4\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{|x_{-k}^{(n)}|}\left(\frac{\frac12 x_{-k}^{(n)}}{\sin\frac12 x_{-k}^{(n)}}\right)^2+\pi^2\sum_{k=7}^{n}\left(\frac{1}{x_k^{(n)}}+\frac{1}{|x_{-k}^{(n)}|}\right)\right)<$$

$$<\frac{\pi}{\ln(n+1)}\left(\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2+2\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}\left(\frac{\frac{2k+1}{30}}{\sin\frac{(2k+1)\pi}{30}}\right)+\right.$$

$$\left.+4\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{\frac{k}{15}}{\sin\frac{k\pi}{15}}\right)^2+\frac12\sum_{k=7}^{n}\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{dx}{x}+\sum_{k=7}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{2x-1}\right).$$

После непосредственных подсчетов имеем $\nu_n(\{x_k^{(n)}\}) < 0{,}96\pi$. Следовательно,

$$\sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n} \nu_n(\{x_k^{(n)}\}) < 0{,}96\pi, \qquad n \geqslant 7. \tag{31}$$

Далее, из (29), учитывая (2) имеем

$$\nu_1(\{x_k^{(1)}\}) = \frac{2}{3\ln 2}\left(x_0^{(1)}(1+\cos x_0^{(1)}) + \left(x_0^{(1)} + \frac{2\pi}{3}\right)\left(1 + \cos\left(x_0^{(1)} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2\pi}{3} - x_0^{(1)}\right)\left(1 + \cos\left(x_0^{(1)} - \frac{2\pi}{3}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3\ln 2}\left(x_0^{(1)} + \frac{4\pi}{3} + x_0^{(1)}\cos x_0^{(1)} - \frac{2\pi}{3}\cos x_0^{(1)} - \sqrt{3}x_0^{(1)}\sin x_0^{(1)}\right).$$

Легко убедиться, что полученное выражение для $\nu_1(\{x_k^{(1)}\})$ принимает наибольшее значение при $x_0^{(1)} = \pi/3$. Следовательно, после простых подсчетов, имеем

$$\sup_{\{x_k^{(1)}\}\in\Lambda_1} \nu_1(\{x_k^{(1)}\}) = \frac{2\pi}{3\ln 2} > 0{,}96\pi. \tag{32}$$

Далее, для произвольного набора $\{x_k^{(2)}\} \in \Lambda_2$

$$\nu_2(\{x_k^{(2)}\}) \leqslant \frac{1}{5\ln 3}\sum_{k=-2}^{2} \max_{\frac{2k\pi}{5} \leqslant x \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{5}} \left(|x|\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5\ln 3}\left(\frac{\pi}{5}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 + \frac{4\pi}{5}\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \frac{4\pi}{5}\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{5}\right)^2 + \pi\right)$$

и после непосредственных подсчетов имеем

$$\sup_{\{x_k^{(2)}\}\in\Lambda} \nu_2(\{x_k^{(2)}\}) < 0{,}9\pi. \tag{33}$$

Аналогично убеждаемся и в справедливости неравенств

$$\sup_{\{x_k^{(n)}\}\in\Lambda_n} \nu_n(\{x_k^{(n)}\}) < \frac{2\pi}{3\ln 2}, \qquad n = 3, 4, 5, 6. \tag{34}$$

Из (29) — (34) получаем $\nu = \nu_1 = \dfrac{2\pi}{3\ln 2}$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Каким бы ни был набор точек* $\{x_k^{(n)}\} \in \Lambda_n$ *для любой функции* $f \in \mathrm{Lip}_K 1$ *и оператора* $U_n(f; \{x_k^{(n)}\})$, *определенного равенством* (3), *справедливы неравенства*

$$\|f - U_n(f; \{x_k^{(n)}\})\| \leqslant \frac{2\pi}{3\ln 2} K \frac{\ln(n+1)}{n+1} \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

Константа $\dfrac{2\pi}{3\ln 2}$ *в неравенстве* (35) *является точной.*

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
2. *Дудас В. А.* Приближение непрерывных периодическхх функций суммами Фейера // Вопросы теории приближения функций и ее приложений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 106—115.

3. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.— 688 с.
4. *Бугаец В. П., Мартынюк В. Т.* Точные константы приближения непрерывных функций интегралами Джексона // Укр. мат. журн.— 1974.— **26**, № 4.— С. 435—443.
5. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица суммами Фейера Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— 4.— С. 501—507.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1971.— 1100 с.
7. *Бугаец В. П., Мартынюк В. Т.* Точная константа приближения непрерывных функций сумматорными операторами типа Джексона // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 6.— С. 791—796.

Черновиц. ун-т

Получено 14.03.88