УДК 517.5

А. И. Степанец

Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближения целыми функциями. I

Вводятся классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функций, определенных на вещественной оси, которые в периодическом случае переходят в классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, определяющиеся посредством мультипликаторов $\psi(\cdot)$ и сдвигов по аргументу, равному β. Изучаются простейшие свойства этих классов, необходимые для исследования их аппроксимативных характеристик, которые будут изложены во второй части работы.

Вводяться класи функцій $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, визначених на дійсній осі, які в періодичному випадку переходять в класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, що означаються за допомогою мультиплікаторів $\psi(\cdot)$ та зсувів аргументу, рівного β. Вивчаються найпростіші властивості цих класів, необхідні для дослідження їх апроксимативних характеристик, які будуть викладені в другій частині роботи.

На протяжении ряда лет автором и его учениками изучались аппроксимативные свойства классов периодических функций $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, определяющихся тем, что обобщенные (ψ, β)-производные их элементов принадлежат множеству $\mathfrak{N}$. Ряд результатов по этим вопросам изложен в [1]. В настоящей работе рассматриваются классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ функций $f(\cdot)$, определенных на всей числовой оси, которые в общем случае не являются периодическими. Это классы функций, задающиеся традиционным (см. например, [2—4]) способом — свертки вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x+t)\,\Psi_{\beta}(t)\,dt,$$

где $\Psi_{\beta}(t)$ — преобразование Фурье функции $\psi(\cdot)$, а $h \in \mathfrak{N}$. Если $h(t)$ имеет период 2π, соответствующие классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ переходят в классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и, таким образом, являются обобщением последних. Изучаются равномерные приближения функций из классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ при помощи операторов $F_{\sigma}(f; x)$, которые в периодическом случае представляют собой частные суммы Фурье порядка $[\sigma] - 1$, а в общем — принадлежат множеству $\mathfrak{E}_{\sigma}$ целых функций экспоненциального типа, не превышающего σ, а также рассматриваются величины наилучших приближений функций из классов $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ посредством функций из множеств $\mathfrak{E}_{\sigma}$.

В первых четырех пунктах работы вводятся классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ и устанавливаются их простейшие свойства, а также обсуждаются приближающие агрегаты. В последующих — излагаются результаты по приближениям функций из этих классов. Основные результаты этой работы анонсированы автором в препринте [5].

1. Классы $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Пусть $\hat{L}_p$, $p \geqslant 1$, — множество функций, заданных на всей действительной оси R и имеющих там конечную норму $\|\varphi\|_{\hat{p}}$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|\varphi\|_{\hat{p}} = \sup_{a \in R} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t+a)|^p \Big)^{1/p} \tag{1}$$

и $\|\varphi\|_{\hat{\infty}} = \|\varphi\|_M = \operatorname{esssup} |\varphi|(t)|$, $\hat{L}_\infty \overset{\mathrm{df}}{=} M$. Пусть, далее, $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 0$ и β — фиксированное число,

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t; \beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \psi(v) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv. \tag{2}$$

Тогда через $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ обозначим множество функций $f \in \hat{L}_1$, которые почти при всех x представляются равенствами

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t)\, \hat{\psi}(t; \beta)\, dt = A_0 + (\varphi * \hat{\psi}_\beta)(x), \tag{3}$$

где A_0 — некоторая постоянная и $\varphi \in \hat{L}_1$, а интеграл понимается как предел интегралов по симметричным расширяющимся промежуткам. Если $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и при этом $\varphi \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\hat{L}_1$, то полагаем $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Подмножества непрерывных функций из $\hat{L}^{\psi}_{\beta}$ и $\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаются соответственно через $\hat{C}^{\psi}_{\beta}$ и $\hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Для данных функции $\psi(\cdot)$ и числа β через L^{ψ}_{β} обозначим множество суммируемых 2π-периодических функций $f(x)$, $f \in L(0, 2\pi)$, с рядом Фурье

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4}$$

при условии, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} (a_k \cos(kx + \beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2)) \tag{5}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. При этом функцию $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ называют (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ и $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(0, 2\pi)$, то полагают $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$; подмножества непрерывных функций из L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначают C^{ψ}_{β} и $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ [1]. Докажем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\psi(v)$ — непрерывная при всех $v \geqslant 0$, $\beta \in R$ и преобразование $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t; \beta)$ суммируемо на всей оси ($\hat{\psi} \in L(R)$):*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(t)|\, dt = K < \infty. \tag{6}$$

Тогда

$$\hat{L}^{\psi}_{\beta} L^0(0, 2\pi) = L^{\psi}_{\beta}, \tag{7}$$

где $L^0(0, 2\pi)$ — множество 2π-периодических функций $\varphi(\cdot)$, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0,$$

т. е. $\varphi \perp 1$ и, стало быть, если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L^0 (0,

2π), *то*

$$\hat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}, \quad \hat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}. \tag{7'}$$

Доказательство. Пусть сначала $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta} L^0(0, 2\pi)$. Покажем, что тогда $f \in L^{\psi}_{\beta}$. В этом случае $f(\cdot)$ представима в виде (3), где $\varphi \in L^0(0, 2\pi)$. Поэтому она 2π-периодическая и суммируемая на $[-\pi, \pi]$. Покажем, что $f(\cdot)$ обладает (ψ, β)-производной, причем почти всюду $f^{\psi}_{\beta}(\cdot) = \varphi(\cdot)$.

Коэффициенты Фурье $a_k = a_k(g)$ и $b_k(g)$, $k = 1, 2, \ldots$, функции $g \in L^{\psi}_{\beta}$ и коэффициенты Фурье $\alpha_k = \alpha_k(g^{\psi}_{\beta})$ и $\beta_k = \beta_k(g^{\psi}_{\beta})$, $k = 1, 2, \ldots$, ее (ψ, β)-производной связаны соотношениями [1, с. 34]

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\psi(k)}(a_k \cos\beta\pi/2 + b_k \sin\beta\pi/2), \\ \beta_k &= \frac{1}{\psi(k)}(b_k \cos\beta\pi/2 - a_k \sin\beta\pi/2), \end{aligned} \tag{8}$$

или

$$\begin{aligned} a_k &= \psi(k)(\alpha_k \cos\beta\pi/2 - \beta_k \sin\beta\pi/2), \\ b_k &= \psi(k)(\alpha_k \sin\beta\pi/2 + \beta_k \cos\beta\pi/2). \end{aligned} \tag{8'}$$

Значит, чтобы доказать включение $f \in L^{\psi}_{\beta}$, достаточно показать, что коэффициенты Фурье $a_k = a_k(f)$ и $b_k = b_k(f)$ функции $f(\cdot)$ и коэффициенты Фурье $\alpha_k = a_k(\varphi)$ и $\beta_k = b_k(\varphi)$ функции $\varphi(\cdot)$ удовлетворяют условиям (8'). Для этого потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 0$ и ее преобразование*

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t; \beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv = \hat{\psi}_+(t)\cos\beta\pi/2 - \hat{\psi}_-(t)\sin\beta\pi/2$$

суммируемо на всей действительной оси. Тогда в каждой точке $v \in [0, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dt = \psi(v) \tag{9}$$

и, в частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_+(t)\cos vt\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_-(t)\sin vt\,dt = \psi(v). \tag{9'}$$

Эта лемма является простым следствием из общей теории интегралов Фурье. В таком виде впервые она формулировалась, по-видимому, С. А. Теляковским [6]. Произведение $\varphi(x + t)\,\hat{\psi}(t; \beta)\cos kx$ суммируемо в полосе $x \in [-\pi, \pi]$, $t \in R$. Поэтому, применяя теорему Фубини о замене порядка интегрирования и используя равенства (9'), получаем

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t)\,\hat{\psi}(t; \beta)\cos kx\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t; \beta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \times$$

$$\times \cos kx\,dx\,dt = a_k(\varphi)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t; \beta)\cos kt\,dt + b_k(\varphi)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(t; \beta)\sin kt\,dt =$$

$$= a_k(\varphi)\cos\beta\pi/2\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_+(t)\cos kt\,dt - b_k(\varphi)\sin\beta\pi/2\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_-(t)\sin kt\,dt =$$

$$= \psi(k)(a_k(\varphi)\cos\beta\pi/2 - b_k(\varphi)\sin\beta\pi/2).$$

Аналогично имеем

$$b_k(f) = \psi(k)(a_k(\varphi)\sin\beta\pi/2 + b_k(\varphi)\cos\beta\pi/2).$$

Таким образом, $f \in L^{\psi}_{\beta}$, причем почти всюду $f^{\psi}_{\beta}(\cdot) = \varphi(\cdot)$.

Пусть теперь $f \in L^{\psi}_{\beta}$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\,\hat{\psi}(t;\beta)\,dt. \tag{10}$$

Поскольку $f^{\psi}_{\beta} \in L^0(0, 2\pi)$ и $\hat{\psi} \in L(R)$, то $g(\cdot)$ — 2π-периодическая, суммируема и по только что доказанному ее ряд Фурье совпадает с рядом $S[f]$. Поэтому почти всюду $g(x) = f(x)$ и так как $g \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}L^0(0, 2\pi)$, то и $f \in \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}L^0(0, 2\pi)$. Соотношение (7) доказано. Равенства (7′) теперь очевидны.

Если выполнено равенство (7), то функция $\varphi(\cdot)$ в представлении (3) совпадает с (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$. В связи с этим функцию $\varphi(\cdot)$ из (3) естественно называть (ψ, β)-производной функции $f(\cdot)$ и в непериодическом случае и полагать $\varphi(\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$. Оператор, сопоставляющий функции $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ ее (ψ, β)-производную, обозначим через D^{ψ}_{β}, так что $D^{\psi}_{\beta} f \times \times (\cdot) = f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

2. Отношение порядка для (ψ, β)-производных. По аналогии с периодическим случаем [1, с. 35] введем отношение порядка для (ψ, β)-производных.

Пусть $\psi_1(v)$ и $\psi_2(v)$ — функции, непрерывные при всех $v \geqslant 0$, β_1 и β_2 — фиксированные числа. Скажем, что пара (ψ_1, β_1) L-предшествует паре (ψ_2, β_2), если $\hat{L}^{\psi_2}_{\beta_2} \subseteq \hat{L}^{\psi_1}_{\beta_1}$. В этом случае будем писать $(\psi_1, \beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \beta_2)$. Если $\hat{L}^{\psi_2}_{\beta_2} \subset \hat{L}^{\psi_1}_{\beta_1}$, то пишем $(\psi_1, \beta_1) \overset{L}{<} (\psi_2, \beta_2)$.

В периодическом случае легко доказывается, что если функция $f(\cdot)$ принадлежит $L^{\psi_2}_{\beta_2}$ и $(\psi_1, \beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \beta_2)$, то у нее существует производная $f^{\psi_1}_{\beta_1}(\cdot)$, которая содержится в $L^{\psi_2/\psi_1}_{\beta_2-\beta_1}$, причем [1, с. 35]

$$S[(f^{\psi_1}_{\beta_1})^{\psi_2/\psi_1}_{\beta_2-\beta_1}] = S[f^{\psi_2}_{\beta_2}]. \tag{11}$$

Аналог этого утверждения справедлив и в общем случае. Именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть функции $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ и $\psi_3(v) = \psi_2(v)/\psi_1(v)$ непрерывны при всех $v \geqslant 0$ и таковы, что их преобразования $\hat{\psi}_1(t; \beta_1)$, $\hat{\psi}_2(t; \beta_2)$ и $\hat{\psi}_3(t; \beta_3)$, где $\beta_3 = \beta_2 - \beta_1$ суммируемы на R и, кроме того, функция $\psi_3(v)$ удовлетворяет следующему условию (условию $A^{\psi}_{\beta_3}$): функция*

$$\hat{\psi}^*_3(t) = \hat{\psi}^*_3(t;\beta) = \begin{cases} \sup\limits_{x \geqslant t} |\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|, & t \geqslant 0, \\ \sup\limits_{x \leqslant t} |\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|, & t < 0, \end{cases} \tag{12}$$

ограничена и суммируема на R. Тогда $(\psi_1, \beta_1) \overset{L}{\leqslant} (\psi_2, \beta_2)$ и $\forall f \in \hat{L}^{\psi_2}_{\beta_2}$ существует производная $f^{\psi_1}_{\beta_1}(\cdot)$, которая принадлежит $\hat{L}^{\psi_3}_{\beta_3}$, причем почти всюду

$$f^{\psi_1}_{\beta_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi_2}_{\beta_2}(x+t)\,\hat{\Psi}_3(t;\beta)\,dt. \tag{13}$$

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть функции $g(v)$ и $h(v)$ заданы и непрерывны при всех $v \geqslant 0$, и преобразования вида (2) $\hat{g}(t; \beta_1)$, $\hat{h}(t; \beta_2)$ и $\hat{f}(t; \beta)$, где $f(v) = g(v)$*

$h(v)$ *и* $\beta = \beta_1 - \beta_2$, *суммируемы на всей оси*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(t; \beta_1)| \, dt \leqslant M_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(t; \beta_2)| \, dt \leqslant M_2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t; \beta)| \, dt \leqslant M_3. \tag{14}$$

Тогда почти для всех $x \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x + t; \beta_1) \hat{h}(t; \beta_2) \, dt = \hat{f}(x; \beta), \tag{15}$$

т. е. почти всюду

$$(\hat{g}_{\beta_1} * \hat{h}_{\beta_2})(x) = (\widehat{gh})_{\beta}(x) \tag{16}$$

Несобственный интеграл в левой части (15) понимается как $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \ldots$

Доказательство. Умножим каждую часть равенства (15) на $\cos(vx + \beta\pi/2)$ и проинтегрируем по промежутку $t \in (-\infty, \infty)$. Так как функция $f(v)$ непрерывна и $\hat{f}(t; \beta)$ суммируема на R, то в силу леммы 1 в каждой точке $v \in R$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x; \beta) \cos(vx + \beta\pi/2) \, dx = f(v) = g(v) h(v). \tag{17}$$

Далее, в силу первых двух неравенств из (14), произведение $|\hat{g}(x + t; \beta_1) \hat{h}(t; \beta_2)|$ суммируемо на R^2. Поэтому, применяя теорему Фубини о замене порядка интегрирования и пользуясь леммой 1, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x + t; \beta_1) \hat{h}(t; \beta_2) \, dt \right) \cos(vx + \beta\pi/2) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t; \beta_2) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x+t; \beta_1) \times$$

$$\times \cos(vx + \beta\pi/2) \, dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t; \beta_2) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z; \beta_1) \cos[(vz + \beta_1\pi/2) -$$

$$-(vt + \beta_2\pi/2)] \, dz dt = g(v) h(v) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t; \beta_2) \sin(vt + \beta_2\pi/2) \, dt \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(z; \beta_1) \sin(vz + \beta_1\pi/2) \, dz = g(v) h(v), \tag{18}$$

поскольку каждый из двух последних интегралов тождественно равен нулю. Проверим это утверждение, к примеру, для второго из них. Имеем

$$I_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t; \beta_1) \sin(vt + \beta_1\pi/2) \, dt = \frac{1}{2\pi} \sin \beta_1\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(u) \cos ut du \right) \times$$

$$\times \cos vt dt - \frac{1}{2\pi} \sin \beta_1\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(u) \sin ut du \right) \sin vt dt + \frac{1}{\pi} \cos^2 \beta_1\pi/2 \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} (g(u) \cos ut du \right) \sin vt dt - \frac{1}{\pi} \sin^2 \beta\pi/2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} g(u) \sin ut du \right) \cos vt dt. \tag{19}$$

Последние два интеграла равны нулю как интегралы по симметричным промежуткам от нечетных функций. Первые же два представляют собой интегралы Фурье от функций $g(u) \sin \beta_1\pi$ и $-g(u) \sin \beta_1\pi$. Поэтому $I_1 = 0$. Таким образом, согласно (17) и (18) рассматриваемые интегралы тождественно равны. Стало быть, тождественно равны преобразования Фурье обеих частей соотношения (15). Следовательно, равенство (15) на самом деле выполняется почти всюду. Лемма доказана. Перейдем непосредственно к доказательству предложения 2. Покажем, что $\forall f \in \hat{L}^{\psi_2}_{\beta_2}$ существует производная $f^{\psi_1}_{\beta_1}(\cdot)$ и почти всюду выполняется равенство (13). Этим, очевидно, нужное утверждение будет доказано.

Если $f \in \hat{L}^{\psi_2}_{\beta_2}$, то почти всюду

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi_2}_{\beta_2}(x+t)\,\hat{\psi}_2(t;\beta_2)\,dt = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi_2}_{\beta_2}(x+t)\,(\widehat{\psi_3\psi_1})(t;\beta_2)\,dt. \quad (20)$$

В то же время в силу леммы 2

$$(\widehat{\psi_3\psi_1})(t;\beta_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \psi_3(v)\,\psi_1(v)\cos(vt+\beta_2\pi/2)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_3(t+\tau;\beta_2-\beta_1)\times$$

$$\times\,\hat{\psi}_1(\tau;-\beta_1)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_3(t-\tau;\beta_2-\beta_1)\,\hat{\psi}_1(\tau;\beta_1)\,d\tau. \quad (21)$$

Таким образом, согласно (20) и (21) почти всюду

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi_2}_{\beta_2}(x+t)\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_3(t-\tau;\beta_3)\,\hat{\psi}_1(\tau;\beta_1)\,d\tau dt, \quad \beta_3 = \beta_2-\beta_1. \quad (22)$$

Покажем, что в последнем представлении можно поменять порядок интегрирования. С этой целью воспользовавшись тем, что функция $\psi_3(t;\beta_3)$ удовлетворяет условию A^*, убедимся, что существует повторный интеграл

$$I_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(\tau,\beta_1)| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u+t)|\,|\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|\,dt d\tau,\ \varphi(u+t) = f^{\psi_2}_{\beta_2}(x+t+\tau). \quad (23)$$

Вследствие условий (14) для этого достаточно показать, что интеграл

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u+t)|\,|\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|\,dt$$

равномерно ограничен $\forall\varphi \in \hat{L}_1$. Функция $\hat{\psi}^*_3(t;\beta_3)$ при всех $t \in R$ удовлетворяет неравенству $|\psi_3(t;\beta_3)| \leqslant |\hat{\psi}^*_3(t;\beta_3)|$ и монотонно стремится к нулю при $|t| \to \infty$. Поэтому

$$I_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\varphi(u+t)|\,|\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} |\varphi(u+t)|\,|\hat{\psi}_3(t;\beta_3)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\psi}^*_3(2k\pi) \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\varphi(u+t)|\,dt + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{\psi}^*_3(-2(k-1)\pi) \int_{-2k\pi}^{-2(k-1)\pi} |\varphi(u+t)|\times$$

$$\times\,dt \leqslant \|\varphi(\cdot)\|_{\hat{1}}\left(2\hat{\psi}^*_3(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*_3(t)\,dt\right). \quad (23')$$

Функция $\hat{\psi}_3(t)$ ограничена и суммируема на всей оси. Значит, согласно (23), интеграл I_3 действительно равномерно ограничен и, стало быть, в представлении (22) можно поменять порядок интегрирования, вследствие чего получим

$$f(x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}_1(\tau;\beta_1)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u+t)\,\hat{\psi}_3(t;\beta_3)\,dt\right)d\tau =$$

$$= A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} g(x+t)\,\hat{\psi}_1(t;\beta_1)\,dt, \quad (24)$$

где

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi_2}_{\beta_2}(u+t)\,\hat{\psi}_3(t;\beta_3)\,dt.$$

Оценка (23) показывает, что функция $g(u)$ равномерно ограничена при всех $u \in R$, значит, $g \in \hat{L}_1$. Поэтому из представления (24) заключаем, что $f(x)$ действительно имеет (ψ_1, β_1)-производную $f_{\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$, для которой почти всюду справедливо равенство (13). Предложение 2 доказано.

При исследовании функций $f(\cdot)$ из множеств $\hat{C}_\beta^\psi \mathfrak{N}$ естественно рассматривать их «младшие» непрерывные производные. Поэтому важно для данной пары (ψ, β) определить такие пары (ψ_1, β_1), чтобы производные $f_{\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$ были непрерывными. Понятно, что свойство непрерывности этих производных тесно связано с множеством $\mathfrak{N}$. В связи с этим дадим следующее определение. Будем говорить, что пара (ψ_1, β_1) $C\mathfrak{N}$-предшествует паре (ψ_2, β_2) $((\psi_1, \beta_1) \overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant} (\psi_2 \beta_2))$, если из включения $f \in \hat{C}_{\beta_2}^{\psi_2}\mathfrak{N}$ следует, что $f_{\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$ непрерывна на R $(f_{\beta_1}^{\psi_1} \in C)$.

Повторяя схему доказательства предложения 2 и учитывая при этом, что если функция $\varphi(\cdot)$ принадлежит множеству M, а $g \in L(R)$, то свертка $h(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+t) g(t)\, dt$ непрерывна на R, получаем следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть функции* $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ *и* $\psi_3(v) = \psi_2(v)/\psi_1(v)$ *непрерывны при всех* $v \geqslant 0$ *и их преобразования* $\hat{\psi}_1(t; \beta_1)$, $\hat{\psi}_2(t; \beta_2)$ *и* $\hat{\psi}_3(t; \beta_3)$, $\beta_3 = \beta_2 - \beta_1$, *суммируемы на* R. *Тогда* $(\psi_1, \beta_1) \overset{C\mathfrak{N}}{\leqslant} (\psi_2, \beta_2)$ *и если* $f \in \hat{L}_{\beta_2}^{\psi_2} M$, *то существует непрерывная производная* $f_{\beta_1}^{\psi_1}(\cdot)$, *которая принадлежит* $\hat{C}_{\beta_3}^{\psi_3} M$ *и в каждой точке* $x \in R$ *выполняется равенство* (13).

3. Приближающие функции. Пусть $\Lambda = \{\lambda_\sigma(v)\}$ — семейство функций, непрерывных при всех $v \geqslant 0$, зависящее от действительного параметра σ. Каждой функции $f \in \hat{L}_\beta^\psi$ сопоставим выражение

$$U_\sigma(f; x) = U_\sigma(f; x; \Lambda) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \psi(v) \lambda_\sigma(v) \cos(vt + \beta\pi/2) \times$$

$$\times\, dv dt = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+t) (\widehat{\psi\lambda_\sigma})(t; \beta)\, dt, \tag{25}$$

представляющее собой формулу суммирования для интеграла в (3). Именно такие выражения используются в настоящей работе в качестве приближающих агрегатов для функции $f \in \hat{L}_\beta^\psi$.

Рассмотрим сначала случай, когда функции $\lambda_\sigma(v)$ задаются по формуле

$$\lambda_\sigma(v) = \lambda_\sigma(v; c) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant v \leqslant c, \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}, & c \leqslant v \leqslant \sigma, \\ 0, & v \geqslant \sigma. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь c — некоторое число из промежутка $[0, \sigma]$. Семейство таких функций $\lambda_\sigma(\cdot)$ будем обозначать через Λ_c. Установим ряд свойств функций $U_\sigma(f; x; \Lambda_c)$.

Поскольку

$$\hat{\lambda}_\sigma(t; c) = \hat{\lambda}_\sigma(t; c; 0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \lambda_\sigma(v; c) \cos vt dv = \frac{\cos ct - \cos \sigma t}{(\sigma - c) t^2} =$$

$$= \frac{2 \sin(\sigma - c) t/2 \sin(\sigma + c) t/2}{(\sigma - c) t^2}, \tag{27}$$

то $\hat{\lambda}_\sigma(t; c)$ при любом $c \in [0, \sigma)$ ограничена, принадлежит $L(R)$ и $L_2(R)$ и удовлетворяет условию $\overset{*}{A_0}$. Поэтому с учетом леммы 2 заключаем, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 0$ и ее преобразование $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}(t; \beta)$ суммируемо на R. Тогда $\forall \sigma > 0$ и $\forall c \in [0, \sigma)$ в каждой точке x выполняется равенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \psi(v)\lambda_\sigma(v; c)\cos(vx + \beta\pi/2)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_\beta(v + x)\,\hat{\lambda}_\sigma(v; c; 0)\,dv = (\hat{\psi}_\beta * \hat{\lambda}_\sigma)(x). \tag{28}$$

Равенство (28) *позволяет выражение $U_\sigma(f; x; \Lambda_c)$ записать в виде*

$$U_\sigma(f; x; \Lambda_c) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_\beta(t + v)\,\hat{\lambda}_\sigma(v; c; 0)\,dvdt =$$

$$= A_0 + f_\beta^\psi * (\hat{\psi}_\beta * \hat{\lambda}_\sigma)(x).$$

Если выполнены условия предложения 4, то с учетом равенства (27) $\forall f \in \hat{L}_\beta^\psi$ легко обосновать замену порядка интегрирования в последнем выражении. Поэтому справедливо равенство

$$U_\sigma(f; x; \Lambda_c) = A_0 + [(f_\beta^\psi * \hat{\lambda}_\sigma) * \hat{\psi}_\beta](x) = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t + z) \times$$

$$\times\, \hat{\lambda}_\sigma(t; c)\,dt\hat{\psi}_\beta(z)\,dz = A_0 + \int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}_\beta(u - x)\int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(u + t)\,\hat{\lambda}_\sigma(t; c)\,dtdu. \tag{29}$$

Известно (см., например, [2, с. 255]), что если $\varphi(\cdot)$ есть целая функция экспоненциального типа τ ($\varphi \in E_\tau$) и, кроме того, $\varphi \in W^2$, т. е. функция $h(x) = \varphi_x/(1 + |x|)$ принадлежит пространству $L_2(R)$, то при всех $\tau \leqslant c$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x + t)\,\hat{\lambda}_\sigma(t; c)\,dt \equiv \varphi(x). \tag{30}$$

Поэтому с учетом равенства (29) приходим к следующему утверждению.

Предложение 5. *Пусть $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geqslant 0$, и $\hat{\psi}(\cdot; \beta) \in L(R)$. Тогда, если $F(x)$ такова, что $F_\beta^\psi \in \mathscr{E}_\tau \cap W^2$, то $\forall \tau \leqslant c < \sigma$ в каждой точке x*

$$U_\sigma(F; x; \Lambda_c) = F(x). \tag{31}$$

В частности, это равенство выполняется, если $F(x)$ — тригонометрический полином порядка $n \leqslant c$.

Далее, если $\varphi(\cdot)$ — 2π-периодическая, интегрируема на периоде функция и a_0, a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots$,— ее коэффициенты Фурье, то по теореме о свертке

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x + t)\,\hat{\lambda}_\sigma(t; c)\,dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \leqslant c}\lambda_\sigma(k; c)(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{32}$$

Объединяя этот факт с равенством (29), получаем следующее утверждение.

Предложение 6. *Если $f \in L_\beta^\psi$ и $\psi(\cdot)$ удовлетворяет условиям предложения 4, то $\forall c < \sigma$*

$$U_\sigma(f; x; \Lambda_c) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \leqslant c}\lambda_\sigma(k; c)(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{33}$$

где a_0, a_k и b_k, $k = 1, 2, \ldots$ — коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$. В част-

ности, если $n \in N$ и $c \in [n-1, n]$, то

$$U_n(f; x; \Lambda_c) = S_{n-1}(f; x), \tag{34}$$

где $S_{n-1}(f, x)$ — частная сумма порядка $n-1$ функции $f(\cdot)$.

Таким образом, в периодическом случае $U_\sigma(f; x; \Lambda_c)$ является тригонометрическим полиномом. Если же $f \in \hat{L}^\psi_\beta$, то при достаточно общих предположениях удается показать, что $U_\sigma(f; \cdot; \Lambda_c) \in \mathscr{E}_\sigma$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. *Пусть $\beta \in R$ и $\psi(v)$ — функция, абсолютно непрерывная при всех $v \geqslant 0$, причем $\psi(0)\sin\beta\pi/2 = 0$, $\forall a > 0$ $\psi' \in L_2(0, a)$ и $\hat{\psi}_\beta \in L(R)$. Тогда, если $f \in \hat{L}^\psi_\beta$ и $f^\psi_\beta(x)/(1+|x|) \in L_2(R)$, то $U_\sigma(f; x; \Lambda_c)$ — целая функция экспоненциального типа, не превышающего σ: $U_\sigma(f; \cdot; \Lambda) \in \mathscr{E}_\sigma$.*

Доказательство. Полагая $\gamma(v) = \psi(v)\lambda_\sigma(v; c)$, видим, что

$$\gamma(v) = \begin{cases} \psi(v), v \leqslant c, \\ \dfrac{\sigma - v}{\sigma - c}\psi(v), \quad c \leqslant v \leqslant \sigma, \\ 0, \quad v \geqslant c. \end{cases} \tag{35}$$

Стало быть, в соответствии с (29) имеем

$$U_\sigma(f; x; \Lambda_c) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\sigma \gamma(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\, dvdt. \tag{36}$$

Поэтому, чтобы получить желаемое утверждение, остается воспользоваться известным фактом (см., например, [2, с. 228]), заключающимся в том, что если $\gamma(v)$ абсолютно непрерывна на $[-\sigma, \sigma]$, $\gamma(-\sigma) = \gamma(\sigma)$, $\gamma' \in L_2(-\sigma, \sigma)$ и $h(x)$ такова, что $h(x)/(1+|x|) \in L(R)$, то свертка

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x+t)h(t)\,dt, \quad g(x) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\gamma(v)e^{ivx}dv,$$

принадлежит $\mathscr{E}_\sigma$, причем $\varphi(x)/(1+|x|) \in L_2(R)$.

В дальнейшем удобно иметь дело с несколько измененными функциями $\lambda_\sigma(v)$. Именно, положим

$$\lambda^*_\sigma(v) = \lambda^*_\sigma(v; c) = \begin{cases} \lambda_\sigma(v), \quad v \in [0, c] \cup [\sigma, \infty), \\ 1 - \dfrac{v-c}{\sigma-c}\dfrac{\psi(\sigma)}{\psi(v)}, \quad c \leqslant v \leqslant \sigma. \end{cases}$$

Тогда

$$R_\sigma(f; x; \Lambda^*) = U_\sigma(f; x; \Lambda^*) - U_\sigma(f; x; \Lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^\psi_\beta(x+t)\hat{\delta}_\sigma(t)\,dt, \tag{37}$$

где

$$\hat{\delta}_\sigma(t) = \frac{1}{(\sigma-c)\pi}\int\limits_c^\sigma (v-c)(\psi(v) - \psi(c))\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv. \tag{38}$$

Отсюда заключаем, что справедливо такое утверждение.

Предложение 8. *Пусть $\beta \in R$, а функции $\psi(\cdot)$ и $f(\cdot)$ удовлетворяют всем требованиям предложения 7. Тогда функции $R_\sigma(f; x; \Lambda^*)$, а значит, и $U^*_\sigma(f; x; \Lambda^*)$ — целые функции экспоненциального типа $\leqslant \sigma$.*

Далее положим

$$\varphi(v) = \begin{cases} (v-c)(\psi(v) - \psi(\sigma)), & c \leqslant v \leqslant \sigma, \\ 0, & v \in [0, c] \cup [\sigma, \infty]. \end{cases} \tag{39}$$

Если $\psi(\cdot)$ непрерывна, то $\varphi \in L_2(R)$. Поэтому, заимствуя рассуждения из [2, п. 2, с. 255], приходим к следующему заключению.

П р е д л о ж е н и е 9. *Пусть функции* $\psi(\cdot)$, $\lambda_\sigma(\cdot)$ *и* $F(\cdot)$ — *те же, что и в предложении* 5. *Тогда* $\forall\tau \leqslant c\ R_\sigma(F\ ;\ x;\ \Lambda^*) \equiv 0$ *и, значит,* $U_\sigma(F;\ x;\ \Lambda_c^*) = F(x)$.

4. О д о п у с т и м ы х ф у н к ц и я х. Чтобы определить множества $\hat{L}_\beta^\psi$, на самом деле достаточно было потребовать существования почти для всех t интеграла в (2). Однако уже в самом начале на функции $\psi(\cdot)$ наложены условия непрерывности при всех $v \geqslant 0$; в предложениях 1—9 эти функции подчинены дополнительным требованиям. Теперь круг допустимых функций $\psi(\cdot)$ будет еще сужен.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество выпуклых вниз при всех $v \geqslant 1$, исчезающих на бесконечности функций $\psi(v)$:

$$\lim_{v\to\infty} \psi(v) = 0. \tag{40}$$

Каждую функцию $\psi \in \mathfrak{M}$ продолжим на участок $[0,\ 1)$ так, чтобы полученная функция (которую по-прежнему будем обозначать через $\psi(\cdot)$) была непрерывна при всех $v \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$ и ее производная $\psi'(v) = \psi'(v+0)$ имела ограниченную вариацию на промежутке $[0,\ \infty)$: $\overset{\infty}{\underset{0}{V}}\psi'(t) \leqslant K < \infty$. Множество таких функций обозначим через $\mathfrak{A}$. Подмножество функций $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых

$$\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < K < \infty, \tag{41}$$

обозначим через F.

В дальнейшем функции $\psi(\cdot)$ будут всегда принадлежать $\mathfrak{A}$. Для таких функций справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 10. *Если* $\psi \in F$, $\beta \in R$, *то функция*

$$\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}_\beta(t) = \hat{\psi}(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \psi(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\, dv \tag{42}$$

суммируема на R, *причем при* $|t| \to \infty$ $\hat{\psi}(t) = O(t^{-2})$. *Если же* $\psi \in \mathfrak{A}$, *то такое же заключение верно для функции* $\hat{\psi}_0(t) = \hat{\psi}(t;\ 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \int\limits_0^1 \psi(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\, dv + \int\limits_1^\infty \psi(\cos(vt + \beta\pi/2)\, dv \overset{\mathrm{df}}{=} I_1(t) + I_2(t). \tag{43}$$

Если $|t| < a$, где a — некоторое положительное число, то, очевидно, $|I_1 \times \times (t)| < K$. Поэтому функция $I_1(t)$ суммируема в любой окрестности начала координат. В [1, с. 59, 64] показано, что если $\psi \in F$ и $\beta \in R$ или же $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\beta = 0$, то функция $I_2(t)$ также будет суммируема в любой окрестности точки $t = 0$. Стало быть, и $\hat{\psi}_\beta(t)$ суммируема на любом отрезке $|t| < a$ при всех β, если $\psi \in F$, и при $\beta = 0$, если $\psi \in \mathfrak{A}$. Покажем теперь, что $\forall \psi \in \mathfrak{A}$ при любом $\beta \in R$

$$\hat{\psi}_\beta(t) = O(1)\, t^{-2}, \quad t \to \infty. \tag{44}$$

Этим предложение 10 будет доказано. Интегрируя по частям и учитывая, что $\psi(0) = \psi(\infty) = \psi'(\infty) = 0$, находим

$$\hat{\psi}_\beta(t) = \frac{\psi'(0)}{t^2}\cos\beta\pi/2 - \frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \cos(vt + \beta\pi/2)\, d\psi'(v), \tag{45}$$

откуда ввиду ограниченности вариации функции $\psi'(v)$ сразу получаем соотношение (44).

Из доказанного предложения вытекает, что функции из множества F при любом $\beta \in R$ и функции $\psi \in \mathfrak{A}$ при $\beta = 0$ удовлетворяют всем требованиям, которые предъявляются к ним в предложениях 1—9.

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ сопоставим пару функций $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ и $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, положив [1, с. 94]

$$\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2), \quad \mu(t) = t/(\eta(t) - t),$$

и с их помощью из $\mathfrak{M}$ выделим три подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$. К множеству $\mathfrak{M}_c$ отнесем все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых найдутся такие положительные числа K_1 и K_2 (вообще говоря, зависящие от $\psi(\cdot)$), что $0 < K_1 \leqslant \mu(\psi; t) \leqslant K_2 < \infty$; к множеству $\mathfrak{M}_0$ — функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $0 < \mu(\psi; t) < K$. Понятно, что $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_c$. В связи с этим полагаем $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0 \setminus \mathfrak{M}_c$. Обозначим еще через $\mathfrak{M}_\infty$ подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\mu(\psi; t)$ при $t \to \infty$ монотонно возрастает и неограничена сверху: $\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}$. Если $\psi \in \mathfrak{A}$ и при этом на участке $t \geqslant 1$ $\psi \in \mathfrak{M}_X$, где X обозначает либо c, либо 0, либо ∞, то будем полагать $\psi \in \mathfrak{A}_X$.

В [1], § 3.5 установлен ряд свойств функций из $\mathfrak{M}_X$. Эти свойства будем приводить по мере их использования, а сейчас отметим лишь следующие факты.

Предложение 11. *Если $\psi \in \mathfrak{A}_{c,\infty}$, $\mathfrak{A}_{c,\infty} = \mathfrak{A}_c \cup \mathfrak{A}_\infty$, то $\psi \in F$, т. е. $\mathfrak{A}_{c,\infty} \subset F$.*

Это утверждение вытекает из следствия 5.1 в [1, с. 95].

Предложение 12. *Пусть F_0 — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых*

$$0 < \eta'(t) = \eta'(\psi; t) < K, \quad t \geqslant 1, \quad \eta'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta'(t+0). \tag{46}$$

Тогда $\forall \psi \in F_0$ найдется положительная постоянная K_1 такая, что

$$\mu(\psi; t) > K_1 > 0 \quad \forall t \geqslant 1,$$

и, кроме того, выполняется условие (40).

Доказательство. Функция $\eta(t)$ монотонно возрастает. Поэтому, обозначая через $\eta^{-1}(\cdot)$ функцию, обратную к $\eta(t)$, будем иметь

$$\eta(t) - t = \int\limits_{\eta^{-1}(t)}^{t} \eta'(\tau)\, d\tau < K(t - \eta^{-1}(t)) < K. \tag{47}$$

Значит, при $t \geqslant \eta(1)$

$$\mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t) > K_1 > 0. \tag{47'}$$

При $t \in [1, \eta(1))$ это неравенство очевидно. Далее, с учетом (47), находим

$$\frac{1}{2}\psi(t) = \left| \int\limits_{t}^{\eta(t)} \psi'(\tau)\, d\tau \right| \leqslant |\psi'(t)|(\eta(t) - t) < K|\psi'(t)|\, t.$$

Отсюда сразу получаем оценку (40):

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\psi(t)}{t}\, dt \leqslant 2K \int\limits_{1}^{\infty} |\psi'(t)|\, dt = 2K\psi(1).$$

В дальнейшем множество функций $\psi \in \mathfrak{A}$, для которых выполнено (46), будем также обозначать через F_0. Итак, доказано, что $F_0 \subset F$.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации.— М. : Наука, 1965.— 407 с.
3. *Ибрагимов И. И.* Теория приближения целыми функциями.— Баку: Элм, 1979.— 468 с.
4. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 2.— С. 198—209.
5. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.— Киев, 1988.— С. 3—47.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
6. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1961.— 62.— С. 61—97.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 21.12.88