УДК 517.984.48

Г. В. Радзиевский

Эквивалентность производных цепочек, отвечающих краевой задаче на конечном отрезке, для полиномиальных пучков операторов

Исследуется эквивалентность производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиальных пучков операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Эти производные цепочки соответствуют различным краевым задачам на конечном отрезке для операторно-дифференциального уравнения.

Досліджується еквівалентність похідних ланцюжків, побудованих за кореневими векторами поліноміальних жмутків операторів, які діють в гільбертовому просторі. Ці похідні ланцюжки відповідають різним крайовим задачам на скінченному відрізку для операторно-диференціального рівняння.

Настоящая работа посвящена исследованию эквивалентности производных цепочек, построенных по корневым векторам полиномиальной оператор-функции и отвечающих краевой задаче на конечном отрезке для соответствующего полиномиальному пучку операторно-дифференциального уравнения. Из утверждений об эквивалентности следует результаты о минимальности производных цепочек (что в свою очередь связано с вопросом об однозначном представлении решения данной краевой задачи в виде суммы элементарных решений [1, с. 82—86]), которые будут приведены в другой работе.

1. Постановка задачи и основная теорема. Все дальнейшие построения проводятся в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; при необходимости рассмотреть несколько гильбертовых пространств они нумеруются индексами. В работе изучается полиномиальный пучок операторов (оператор-функция) вида

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \ldots + \lambda^n L_n, \qquad (1)$$

где L_v,— вообще говоря, неограниченные операторы, действующие в $\mathfrak{H}$, а λ принадлежит комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Чтобы сформулировать постановки решаемых здесь задач, введем необходимые обозначения и определения. Область определения, область значения и ядро оператора F обозначаются соответственно через $\mathfrak{D}(F)$, $\mathfrak{R}(F)$ и $\mathfrak{Z}(F)$. Прямая сумма n экземпляров гильбертового пространства $\mathfrak{H}$ обозначается через $\mathfrak{H}^n$ и состоит из элементов $\tilde{x}^n = \{x^1, \ldots, x^n\}$, где векторы $x^i \in \mathfrak{H}$, а норма $\tilde{x}^n$ задана равенством $\|\tilde{x}^n\|^2 = \|x^1\|^2 + \ldots + \|x^n\|^2$. Аналогично определяется прямая сумма множеств $\mathfrak{E}_l \subseteq \mathfrak{H}$, причем $\bigoplus_{l=1}^{n} \mathfrak{E}_l \subseteq \mathfrak{H}^n$. В случае, когда $\mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}$, применяется также запись $\bigoplus_{l=1}^{n} \mathfrak{E}_l = \mathfrak{E}^n$.

Векторы и линейные многообразия из пространства $\mathfrak{H}^n$ при $n > 1$, а также операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$, обозначаются, как правило, волной сверху, что позволяет отличать их от векторов, линейных многообразий и операторов из основного пространства $\mathfrak{H}$.

Пусть линейное многообразие $\mathfrak{L} = \bigcap_{v=0}^{n} \mathfrak{D}(L_v)$. Элементы $x_0, \dots, x_d \in \mathfrak{L}$ называются **цепочкой корневых векторов** (или **цепочкой собственного и присоединенных к нему векторов**), отвечающей характеристическому числу μ оператор-функции (1), если собственный вектор $x_0 \neq 0$ и $\|L(\lambda) \sum_{h=0}^{d} (\lambda - \mu)^h x_h\| = O(|\lambda - \mu|^{d+1})$ в окрестности точки μ. Элемент x_h называется **корневым вектором порядка** h.

Через $\Delta(L, \Omega)$, где подмножество $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, обозначается совокупность всех мультииндексов (h, j, k), нумерующих векторы, входящие в цепочки корневых векторов $x_{0,j,k}, x_{1,j,k}, \dots,$ которые отвечают характеристическим числам $\mu_k \in \Omega$ оператор-функции (1). Следовательно, первый индекс h показывает порядок присоединенного вектора, а значит, принимает лишь целые неотрицательные значения; индекс j в мультииндексе (h, j, k) нумерует каким-либо образом цепочки корневых векторов, отвечающие данному характеристическому числу μ_k, и поэтому значения j и k, вообще говоря, несчетны. Далее правило нумерации цепочек корневых векторов $x_{0,j,k}$, $x_{1,j,k}, \dots$ (т. е. сопоставление им индексов j и k) не имеет значения.

Рассмотрим такие оператор-функции $Q_l(\lambda)$, что $\mathfrak{L} = \bigcap_{v=1}^{n} \mathfrak{D}(L_v) \subseteq \mathfrak{D}(Q_l(\lambda))$ при $l = \overline{1, m}$, а λ принадлежит уже области Ω, и для любого элемента $x \in \mathfrak{L}$ вектор-функции $Q_l(\lambda)x$ являются аналитическими по $\lambda \in \Omega$. По каждой цепочке корневых векторов $x_{0,j,k}, \dots, x_{d,j,k}$, отвечающей характеристическому числу $\mu_k \in \Omega$ оператор-функции (1), построим векторы

$$x_{h,j,k}(Q_l(\mu)) = \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s Q_l(\lambda) x_{h-s,j,k}}{d\lambda^s} \right|_{\lambda=\mu_k}, \quad h = \overline{0, d}, \tag{2}$$

по которым в пространстве $\mathfrak{H}^m$ образуем элементы

$$x_{h,j,k}(Q_1(\mu), \dots, Q_m(\mu)) = \{x_{h,j,k}(Q_1(\mu)), \dots, x_{h,j,k}(Q_m(\mu))\}. \tag{3}$$

Упорядоченная цепочка векторов, состоящая из элементов (3) при $h = \overline{0, d}$, называется **производной по** $Q_1(\lambda), \dots, Q_m(\lambda)$ **цепочкой**, а элемент (3) — **производным по** $Q_1(\lambda), \dots, Q_m(\lambda)$ **вектором порядка** h. В случае скалярных оператор-функций $Q_l(\lambda)$, т.е. когда $Q_l(\lambda) = \alpha_l(\lambda) I$, где $\alpha_l(\lambda)$ — числовая аналитическая по $\lambda \in \Omega$ функция, а I — тождественный в $\mathfrak{H}$ оператор, применяется обозначение: $x_{h,j,k}(Q_1(\mu), \dots, Q_m(\mu)) = x_{h,j,k}(\alpha_1(\mu), \dots, \alpha_m(\mu))$, т.е. оператор I опускается.

Отметим, что если элементы $x_{0,j,k}, \dots, x_{d,j,k}$ образуют цепочку корневых векторов, отвечающую характеристическому числу μ_k оператор-функции (1), то вектор-функции

$$\hat{x}_{h,j,k}(t) = e^{\mu_k t}\left(\frac{t^h}{h!} x_{0,j,k} + \dots + \frac{t}{h!} x_{h-1,j,k} + x_{h,j,k}\right), \quad h = \overline{0, d}, \tag{4}$$

являются решениями операторно-дифференциального уравнения

$$L(d/dt)\hat{x}(t) \equiv L_0 \hat{x}(t) + L_1 \hat{x}^{(1)}(t) + \dots + L_n \hat{x}^{(n)}(t) = 0 \tag{5}$$

и называются **элементарными решениями** этого уравнения. Крышка над $\hat{x}_{h,j,k}(t)$ в обозначении решения (4) ставится для того, чтобы отличить это решение от производного по μI вектора $x_{h,j,k}(\mu)$, построенного по формуле (2). Поэтому далее, как и в (5), как правило, крышку над вектор-функциями со значениями в $\mathfrak{H}$ и зависящими от вещественной переменной t будем сохранять.

Из формулы (2) и равенства (4) получим $x_{h,j,k}(\mu^{l-1}e^{\mu T}) = \hat{x}^{(l)}_{h,j,k}(T)$. Поэтому, если положить для любой $n-1$ раз дифференцируемой вектор-функции $\hat{x}(t)$ со значениями в $\mathfrak{H}$ вектор-функцию

$$\tilde{x}^n(t) = \{\hat{x}(t), \hat{x}^{(1)}(t), \dots, \hat{x}^{(n-1)}(t)\} \tag{6}$$

со значениями уже в пространстве $\mathfrak{H}^n$, то для элементарных решений (4) уравнения (5) справедливо равенство

$$x_{h,j,k}(e^{\mu T}, \mu e^{\mu T}, \dots, \mu^{n-1}e^{\mu T}) = \tilde{x}^n_{h,j,k}(T). \tag{7}$$

При $T=0$ вектор $x_{h,j,k}(1, \mu, \dots, \mu^{n-1})$ $(=\tilde{x}^n_{h,j,k}(0))$ называется п р о и з в о д н ы м п о К е л д ы ш у в е к т о р о м п о р я д к а h и р а з м е р а n, а упорядоченная цепочка этих векторов при $h = 0, 1, \dots$ — п р о и з в о д н о й п о К е л д ы ш у ц е п о ч к о й р а з м е р а n [2, с.26; 1, с.83]. Как видно из равенств (4) — (7), элементы $x_{h,j,k}(1, \mu, \dots, \mu^{n-1})$ возникают при рассмотрении задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения (5), а элементы

$$x_{h,j,k}(1, \mu, \dots, \mu^{q-1}, e^{\mu T}, \mu e^{\mu T}, \dots, \mu^{r-1}e^{\mu T}) = \tilde{x}^q_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^{(r)}_{h,j,k}(T) \tag{8}$$

— при рассмотрении для этого же уравнения краевой задачи на отрезке $[0, T]$. Далее, если не оговорено противное, считаем число $T \geqslant 0$. Заметим, что в правой части тождества (8) использована запись $f \oplus g$, означающая вектор из прямой суммы двух гильбертовых пространств, которым соответственно принадлежат элементы f и g. Так, в (8) — пространствам $\mathfrak{H}^q$ и $\mathfrak{H}^r$. Используя это обозначение, вектор $\tilde{x}^n = \{x^1, \dots, x^n\}$ можно записать в виде $\tilde{x}^n = \{x^1, \dots, x^q\} \oplus \{x^{q+1}, \dots, x^n\}$ для $q = \overline{1, n-1}$. Аналогичная запись применяется и для прямой суммы операторов.

Введем понятие эквивалентности двух систем векторов f_α и g_α, принадлежащих соответственно гильбертовым пространствам $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ и занумерованных индексом $\alpha \in \Delta$, где Δ — некоторое множество индексов, мощность которого не оговаривается, и поэтому Δ может быть несчетным. Обозначим через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ замкнутые по нормам пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно линейные оболочки векторов f_α и g_α при $\alpha \in \Delta$. Тогда системы векторов f_α и g_α при $\alpha \in \Delta$ называются э к в и в а л е н т н ы м и, если существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор S, действующий из пространства $\mathfrak{F}$ в пространстве $\mathfrak{G}$, что $Sf_\alpha = g_\alpha$ при $\alpha \in \Delta$. В этом случае применяется запись $f_\alpha \simeq g_\alpha$ при $\alpha \in \Delta$.

Далее символ $\sum\limits_\alpha{}'$ означает, что суммирование ведется лишь по конечному набору индексов $\alpha \in \Delta$. Из определения эквивалентности двух систем векторов вытекает следующая лемма.

Л е м м а 1. *Две системы элементов f_α и g_α при $\alpha \in \Delta$ эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\varkappa_1 \Big\| \sum_\alpha{}' c_\alpha f_\alpha \Big\| \leqslant \Big\| \sum_\alpha{}' c_\alpha g_\alpha \Big\| \leqslant \varkappa_2 \Big\| \sum_\alpha{}' c_\alpha f_\alpha \Big\|, \tag{9}$$

где постоянные $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$ и не зависят от комплексных чисел c_α.

Если задана, вообще говоря, неограниченная полуторалинейная форма $\Phi(x, y)$ на множестве $x, y \in \mathfrak{L}$, то ассоциированную с ней квадратичную форму будем обозначать через $\Phi[x] \equiv \Phi(x, x)$ при $x \in \mathfrak{L}$, а термины «полуторалинейная» или «квадратичная», как правило, будем опускать, так как из самой записи ясно какая из форм рассматривается. В формулировках утверждений об эквивалентности участвуют формы $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$, заданные на векторах $\tilde{x}^n = \{x_1, \dots, x^n\}$ и $\tilde{y}^n = \{y^1, \dots, y^n\} \in \mathfrak{L}^n$ по следующему правилу. Положив операторы $L_v = 0$, если $v < 0$ или $v > n$, по операторным коэффициентам L_v, входящим в (1), введем при $m = \overline{1, n+1}$ формы

$$\Phi_{1,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = (i)^m \sum_{s=2}^{m-1} (-1)^s \sum_{v=1}^{s-1} (L_{s+v-m} x^v, x^s), \tag{10}$$

$$\Phi_{2,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = -(i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s \sum_{v=s+1}^{\infty} (L_{s+v-m} x^v, y^s), \tag{11}$$

$$\Phi_{3,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = (i)^m \left[\sum_{s=1}^{m-1} (-1)^s (L_{2s-m} x^s, y^s) - \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s (L_{2s-m} x^s, y^s) \right]. \tag{12}$$

При этом в формах (10), (12) и далее предполагается, что суммы, у которых нижний передел суммирования больше верхнего, равны нулю (в частности, $\Phi_{1,1}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \Phi_{1,2}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = 0$). Кроме того, считается, что суммы (11) и (12) не содержат слагаемых с индексами $s > n$ или $v > n$ (например, $\Phi_{2,n}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \Phi_{2,n+1}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = 0$). Это предположение не уменьшает общности записи форм $\Phi_{l,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ в силу условия $L_v = 0$, если $v > n$. И, наконец, положим

$$\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \Phi_{1,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) + \Phi_{2,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) + \Phi_{3,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) + \\ + \overline{\Phi_{1,m}(\tilde{y}^n, \tilde{x}^n)} + \overline{\Phi_{2,m}(\tilde{y}^n, \tilde{x}^n)}, \quad m = \overline{1, n+1}. \tag{13}$$

В дальнейшем запись $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^p$ означает набор p вещественных чисел $\tilde{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$. Если все числа $\xi_1, \dots, \xi_p$ неотрицательные (неположительные), то пишем $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^p_+$ ($\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^p_-$).

Введем формы

$$\Phi_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \sum_{q=1}^{[n/2]+1} \xi_q \Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n), \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{[n/2]+1}, \tag{14}$$

$$X_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \sum_{q=1}^{[(n+1)/2]} \xi_q \Phi_{2q}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n), \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{[(n+1)/2]}, \tag{15}$$

$$\Psi_{\tilde{\xi}}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n) = \sum_{q=1}^{n+1} \xi_q \Phi_q(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n), \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{16}$$

Далее предполагается, что формы операторов L_v из (1) подчинены одному из следующих условий при $x \in \mathfrak{L}$:

$$(-1)^s \operatorname{Im}(L_{2s}x, x) \leqslant 0, s = \overline{0, [n/2]}, \text{ а } \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) = 0, \quad s = \overline{0, [(n-1)/2]}, \tag{17}$$

$$\operatorname{Im}(L_{2s}x, x) = 0, s = \overline{0, [n/2]}, \text{ а } (-1)^s \operatorname{Re}(L_{2s+1}x, x) \geqslant 0, \quad s = 0, [(n-1)/2], \tag{18}$$

$$\operatorname{Im}(i)^s (L_s x, x) = 0, \quad s = \overline{0, n}. \tag{19}$$

Отметим, что из условий (17) и (19) следует вещественность квадратичных форм $\Phi_{2q-1}[\tilde{x}^n]$, а значит, и формы $\Phi_{\tilde{\xi}}[\tilde{x}^n]$, а из условий (18) и (19) вытекает вещественность форм $\Phi_{2q}[\tilde{x}^n]$, а значит, и $X_{\tilde{\xi}}[\tilde{x}^n]$. Поэтому в случае выполнения условия (19) форма $\Psi_{\tilde{\xi}}[\tilde{x}^n]$ вещественна.

Учитывая введенные обозначения, установим основное утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_2$ — такие операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^{2n}$, для которых $\mathfrak{L}^{2n} \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{J}_1) \cap \mathfrak{D}(\tilde{J}_2)$ и*

$$c \| \tilde{J}_1 f^{2n} \| \leqslant \| (\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2) f^{2n} \| \tag{20}$$

с независящей от $f^{2n} \in \mathfrak{L}^{2n}$ постоянной $c > 0$. Предположим, что

$$\Phi_{\tilde{\xi}} [\tilde{x}^n] - \Phi_{\tilde{\xi}} [\tilde{y}^n] \leqslant c_1 \| \tilde{J}_1 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2 - c_2 \| \tilde{J}_2 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[n/2]+1}, \tag{21}$$

$$\mathrm{X}_{\tilde{\xi}} [\tilde{x}^n] - \mathrm{X}_{\tilde{\xi}} [\tilde{y}^n] \leqslant c_1 \| \tilde{J}_1 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2 - c_2 \| \tilde{J}_2 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[(n+1)/2]}, \tag{22}$$

$$\Psi_{\tilde{\xi}} [\tilde{x}^n] - \Psi_{\tilde{\xi}} [\tilde{y}^n] \leqslant c_1 \| \tilde{J}_1 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2 - c_2 \| \tilde{J}_2 (\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n) \|^2, \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{23}$$

с независящими от $\tilde{x}^n$ и $\tilde{y}^n \in \mathfrak{L}^n$ постоянными $c_1, c_2 > 0$. Тогда соотношение

$$\tilde{J}_1 [\tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^n_{h,j,k}(T)] \simeq (\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2) [\tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^n_{h,j,k}(T)] \tag{24}$$

справедливо для мультииндексов $(h, j, k) \in \Delta(L, \mathbb{C})$ в следующих случаях: 1) когда выполнены условия (17) и (21); 2) когда выполнены условия (18) и (22); 3) когда выполнены условия (19) и (23).

Доказательство этой теоремы основано на изучении форм (10) — (16) на вектор-функциях $\tilde{x}^n(t)$, заданных равенством (6) при условии, что $\hat{x}(t)$ является решением уравнения (5). Далее п о д р е ш е н и е м у р а в н е н и я (5) понимается бесконечно дифференцируемая по норме пространства $\mathfrak{H}$ вектор-функция $\hat{x}(t)$, определенная при $t \in \mathbb{R}$, для которой $\hat{x}^{(s)}(t) \in \mathfrak{L}$ для $s = \overline{0, \infty}$ и $d(L_v \hat{x}^{(s)}(t))/dt = L_v \hat{x}^{(s+1)}(t)$, когда $s = \overline{0, \infty}$ и $v = \overline{0, n}$ и $\hat{x}(t)$ удовлетворяет (5) при всех t. Очевидно, что элементарные решения (4) являются решениями уравнения (5) в указанном смысле. Кроме того, если $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ — два решения уравнения (5), то построенные по ним согласно правилу (6) вектор-функции $\tilde{x}^n(t)$ и $\tilde{y}^n(t) \in \mathfrak{L}^n$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому для них определены и дифференцируемы числовые функции $\Phi_{l,m}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t))$ и $\Phi_m(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t))$ при $l = \overline{1, 3}$ и $m = \overline{1, n+1}$.

Пусть $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ — решения уравнения (5). Подставляя вектор-функции $\tilde{x}^n(t)$ и $\tilde{y}^n(t)$ в определение (10) формы $\Phi_{1,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$ и дифференцируя полученное равенство по t с учетом предположения $L_v = 0$ для $v < 0$, имеем

$$\Phi'_{1,m}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t)) = -(-i)^m \sum_{v=0}^{m-1} (L_v \hat{x}^{(v)}(t), \hat{y}^{(m-1)}(t)) -$$

$$-(i)^m \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s [L_{2s-m+1} \hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s)}(t)) + (L_{2s-m} \hat{x}^{(s-1)}(t), \hat{y}^{(s)}(t))].$$

Аналогично получаем

$$\Phi'_{2,m}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t)) = -(-i)^m \sum_{v=m}^{\infty} (L_v \hat{x}^{(v)}(t), \hat{y}^{(m-1)}(t)) -$$

$$-(i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s [(L_{2s-m+1} \hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s)}(t)) - (L_{2s-m} \hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s-1)}(t))]$$

$$\Phi'_{3,m}(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t)) = (i)^m \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s [(L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{s-1}(t)) + (L_{2s-m}\hat{x}^{(s-1)}(t),$$

$$\hat{y}^{(s)}(t))] - (i)^m \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s [(L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s-1)}(t)) + (L_{2s-m}\hat{x}^{(s-1)}(t), \hat{y}^{(s)}(t))]$$

для $m=\overline{1, n+1}$. Из этих равенств, воспользовавшись тем, что $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ являются решениями уравнения (5), и определением (13) формы $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$, выводим тождество

$$\Phi'_m(\tilde{x}^n(t), \tilde{y}^n(t)) = -\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [(i)^m (L_{2s-m+1}\hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s)}(t)) + (-i)^m (\hat{x}^{(s)}(t),$$

$$L_{2s-m+1}\hat{y}^{(s)}(t))] + \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s [(i)^m (L_{2s-m}\hat{x}^{(s)}(t), \hat{y}^{(s-1)}(t)) - (-i)^m (\hat{x}^{(s)}(t),$$

$$L_{2s-m}\hat{y}^{(s-1)}(t))] - \sum_{s=m}^{\infty} (-1)^s [(i)^m (L_{2s-m}\hat{x}^{(s-1)}(t), \hat{y}^{(s)}(t)) - (-i)^m \times$$

$$\times (\hat{x}^{(s-1)}(t), L_{2s-m}\hat{y}^{(s)}(t))].$$

Но когда $\operatorname{Im}(i)^s (L_s x, x) = 0$ для $x \in \mathfrak{L}$, то $(i)^s (L_s x, y) = (-i)^s (x, L_s y)$ для всех x и $y \in \mathfrak{L}$, откуда и из предположения $L_v = 0$, если $v < 0$ или $v > n$, получаем утверждение.

Лемма 2. *Пусть вектор-функции $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ являются решениями уравнения* (5). *Тогда, если операторы L_v удовлетворяют условию* (17) *и натуральное число $q \leqslant [n/2] + 1$, то*

$$\Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n(T), \tilde{y}^n(T)) = \Phi_{2q-1}(\tilde{x}^n(0), \tilde{y}^n(0)) - i \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \times$$

$$\times \int_0^T [(L_{2s}\hat{x}^{(q+s-1)}(t), \hat{y}^{(q+s-1)}(t)) - (\hat{x}^{(q+s-1)}(t), L_{2s}\hat{y}^{(q+s-1)}(t))]\, dt. \quad (25)$$

Если же выполнено условие (18) *и $q \leqslant [(n+1)/2]$, то*

$$\Phi_{2q}(\tilde{x}^n(T), \tilde{y}^n(T)) = \Phi_{2q}(\tilde{x}^n(0), \tilde{y}^n(0)) - \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^s \times$$

$$\times \int_0^T [(L_{2s+1}\hat{x}^{(q+s)}(t), \hat{y}^{(q+s)}(t)) + (\hat{x}^{(q+s)}(t), L_{2s+1}\hat{y}^{(q+s)}(t)]\, dt. \quad (26)$$

А когда выполнено условие (19) *и $q \leqslant n + 1$, то*

$$\Phi_q(\tilde{x}^n(T), \tilde{y}^n(T)) = \Phi_q(\tilde{x}^n(0), \tilde{y}^n(0)). \quad (27)$$

Доказательство теоремы 1 проведем в случае справедливости условий (17) и (21). Тогда согласно (17) и (25) для любого решения $\hat{x}(t)$ уравнения (5) $0 \leqslant \Phi_{\tilde{\xi}}[\tilde{x}^n(0)] - \Phi_{\tilde{\xi}}[\tilde{x}^n(T)]$ при $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}_+^{[n/2]+1}$, откуда из (21) имеем $\|\tilde{J}_2[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\| \leqslant (c_1/c_2)^{1/2} \|\tilde{J}_1[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\|$, поэтому $\|(\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2)[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\| \leqslant [1 + (c_1/c_2)^{1/2}] \|\tilde{J}_1[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\|$. Из этого неравенства и условия (20) получаем двустороннюю оценку

$$c \|\tilde{J}_1[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\| \leqslant \|(\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2)[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\| \leqslant [1 + (c_1/c_2)^{1/2}] \times$$

$$\times \|\tilde{J}_1[\tilde{x}^n(0) \oplus \tilde{x}^n(T)]\|. \quad (28)$$

Пусть $x_{0,j,k}, \ldots, x_{h,j,k}$—цепочки корневых векторов, отвечающие характеристическим числам μ_k оператор-функции (1). Построенные по ним вектор-функции (4) являются решениями уравнения (5), а значит, для любых комплексных чисел $c_{h,j,k}$, решением является и вектор-функция $\hat{x}(t) = \sum'_{(h,j,k)\in\Delta(L,\mathbb{C})} c_{h,j,k}\hat{x}_{h,j,k}(t)$, подставляя которую в неравенство (28), приходим к оценкам (9) с векторами $f_{h,j,k} = \tilde{J}_1[\tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^n_{h,j,k}(T)]$ и $g_{h,j,k} = (\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2)[\tilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \tilde{x}^n_{h,j,k}(T)]$ и индексами $\alpha = (h, j, k)$. Отсюда на основании леммы 1 вытекает соотношение (24).

Аналогично устанавливается утверждение теоремы и в случае выполнения условий (18) и (22), а также (19) и (23). Причем, если справедливы условия (18) и (22), то используется равенство (26), а если справедливы условия (19) и (23),— то равенство (27).

2. Следствия. В этом пункте будут приведены утверждения, вытекающие из теоремы 1. Для их формулировок и доказательств введем обозначения. Множество ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, обозначим через $[\mathfrak{H}]$, причем, если $A \in [\mathfrak{H}]$, то $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{H}$. Для самосопряженного или ограниченного оператора F положим $|F| = (F^*F)^{1/2} \geqslant 0$. Если F самосопряжен, то $F_\pm = (|F| \pm F)/2$ и $F^\beta = F^\beta_+ + e^{i\pi\beta}F^\beta_-$ для $\beta > 0$, а F^0 — ортопроектор на $\overline{\mathfrak{R}(F)}$. Здесь и далее $F^\beta_\pm = (F_\pm)^\beta$. Для самосопряженного оператора F символ $F \gg 0$ (или $F \ll 0$) означает, что найдется такая постоянная $c > 0$, что $F > cI$ (соответственно $F < -cI$). Операторы, действующие в пространстве $\mathfrak{H}^n$, часто будут записываться в матричном виде, т. е. $\tilde{A} = \{A_{s,v}\}^n_{s,v=1}$, где $A_{s,v}$ — операторы, действующие в $\mathfrak{H}$, первый индекс s нумерует строки, а второй v — столбцы. В случае, когда $A_{s,v} = 0$ при $s \neq v$, оператор $\{A_{s,v}\}^n_{s,v=1} = \operatorname{diag}\{A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}\}$, а если $A_{1,1} = \ldots = A_{n,n}$, то $\operatorname{diag}\{A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}\} = \operatorname{diag}^n A_{1,1}$. Оператор $\tilde{A} = \{\gamma_{s,v}I\}^n_{s,v=1}$, где $\gamma_{s,v}$—числа, назовем скалярным блок-оператором, а матрицу $A = \{\gamma_{s,v}\}^n_{s,v=1}$—матрицей, соответствующей скалярному блок-оператору. Аналогично по каждой матрице A размера $n \times n$ определяется соответствующий ей скалярный блок-оператор, действующий в $\mathfrak{H}^n$. Далее матрицы размера $n \times n$ будем также рассматривать как операторы, действующие в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Во всех последующих утверждениях данного пункта рассматриваются лишь ограниченные операторы, что специально оговариваться не будет. В частности, далее у оператор-функции (1) считаем операторы $L_v \in [\mathfrak{H}]$, а значит, область определения $\mathfrak{L}$ оператор-функции (1) равна $\mathfrak{H}$.

Введем оператор-функции

$$U_l(\lambda) = \sum_{r=1}^{n-1} \lambda^{r-1}(\alpha_{l,r} + e^{\lambda T}\beta_{l,r})\, I, \quad l = \overline{1, n-1}, \tag{29}$$

где $\alpha_{l,r}$ и $\beta_{l,r}$ — комплексные числа, а $T \geqslant 0$. Оператор-функции (29) соответствуют [1, с. 82—86] следующим краевым условиям на конечном отрезке: $\hat{U}_l[\hat{x}(t)] \equiv \sum_{r=1}^{n-1} [\alpha_{l,r}\hat{x}^{(r-1)}(0) + \beta_{l,r}\hat{x}^{(r-1)}(T)] = f_l$, где $\hat{x}(t)$ — решение операторно-дифференциального уравнения (5), символом которого является оператор-функция (1), а векторы $f_l \in \mathfrak{H}$.

Теорема 2. *Пусть оператор-функция* (1), у которой $L_0 \gg 0$, *а нечетное число* $n \geqslant 3$, *удовлетворяет условию* (17), *и коэффициенты* $\alpha_{l,r}$ *и* $\beta_{l,r}$ *у оператор-функций* (29) *такие, что для всех ненулевых решений* (*относительно* ζ_r *и* η_r) *системы линейных однородных уравнений*

$$\sum_{r=1}^{n-1} (\alpha_{l,r}\zeta_r + \beta_{l,r}\eta_r) = 0, \quad l = \overline{1, n-1}, \tag{30}$$

справедливо неравенство

$$-i\sum_{q=1}^{[n/2]}\xi_q\sum_{s=1}^{2q}(-1)^{q+s}(\zeta_{2q-s+1}\bar{\zeta}_s-\eta_{2q-s+1}\bar{\eta}_s)<0 \tag{31}$$

для некоторого фиксированного набора $\{\xi_1, \ldots, \xi_{[n/2]}\}\in\mathbb{R}_+^{[n/2]}$ *с* $\xi_{[n/2]}>0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0>0$, *что для всех* $\tau\geqslant\tau_0$

$$x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots, U_{n-1}(\mu\tau), \mu^{n-1}\{[(-i)^nL_n]_-^{1/2}+e^{\mu\tau T}[(-i)^nL_n]_+^{1/2}\}\simeq$$

$$\simeq[(\mathrm{diag}^{n-1}I)\oplus|L_n|^{1/2}\oplus(\mathrm{diag}^{n-1}I)\oplus|L_n|^{1/2}][\tilde{x}_{h,j,k}^n(0)\oplus\tilde{x}_{h,j,k}^n(\tau T)] \tag{32}$$

при мультииндексах $(h, j, k)\in\Delta(L, \mathbb{C})$.

Теорема 3. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0\gg 0$, *а четное число* $n\geqslant 2$, *удовлетворяет условию* (18), *и коэффициенты* $\alpha_{l,r}$ *и* $\beta_{l,r}$ *у оператор-функций* (29) *такие, что для всех ненулевых решений системы* (30) *выполнено неравенство*

$$\sum_{q=1}^{[(n+1)/2]}\xi_q\sum_{s=1}^{2q-1}(-1)^{q+s}(\zeta_{2q-s}\bar{\zeta}_s-\eta_{2q-s}\bar{\eta}_s)<0 \tag{33}$$

для некоторого набора $\{\xi_1, \ldots, \xi_{[(n+1)/2]}\}\in\mathbb{R}_+^{[(n+1)/2]}$ *с* $\xi_{[(n+1)/2]}>0$. *Тогда справедливо утверждение теоремы 2.*

Теорема 4. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0\gg 0$, *удовлетворяет условию* (19), *а коэффициенты* $\alpha_{l,r}$ *и* $\beta_{l,r}$ *у оператор-функций* (29) *такие, что для всех ненулевых решений системы* (30)

$$\sum_{q=1}^{n-1}\xi_q(i)^{q+1}\sum_{s=1}^{q}(-1)^s(\zeta_{q-s+1}\bar{\zeta}_s-\eta_{q-s+1}\bar{\eta}_s)<0 \tag{34}$$

для некоторого набора $\{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}\in\mathbb{R}^{n-1}$ *с* $\xi_{n-1}>0$. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 2.

Отметим, что на самом деле теорема 2 относится и к случаю четного n, а теорема 3 — к случаю нечетного n, если в этих теоремах положить оператор $L_n=0$. Но тогда добавки, связанные со вкладом операторов $[(-i)^nL_n]_\pm^{1/2}$, учтены не будут. Для формулировок соответствующих утверждений введем оператор-функции

$$U_l(\lambda)=\sum_{r=1}^{n}\lambda^{r-1}(\alpha_{l,r}+e^{\lambda T}\beta_{l,r})I, \quad l=\overline{1,n}. \tag{35}$$

Следствие 1. *Пусть оператор-функция* (1), *у которой* $L_0\gg 0$, *а нечетное число* $n\geqslant 1$, *удовлетворяет условию* (18), *и коэффициенты* $\alpha_{l,r}$ *и* $\beta_{l,r}$ *у оператор-функций* (35) *такие, что для всех ненулевых решений системы* $\sum_{r=1}^{n}(\alpha_{l,r}\zeta_r+\beta_{l,r}\eta_r)=0$, *где* $l=\overline{1,n}$, *выполнено неравенство* (33) *для некоторого набора* $\{\xi_1, \ldots, \xi_{[(n+1)/2]}\}\in\mathbb{R}_+^{[(n+1)/2]}$ *с* $\xi_{[(n+1)/2]}>0$. *Тогда найдется такое* $\tau_0>0$, *что для всех* $\tau\geqslant\tau_0$ *справедливо соотношение* $x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots, U_n(\mu\tau))\simeq\tilde{x}_{h,j,k}^n(0)\oplus\tilde{x}(\tau T)$ *при мультииндексах* $(h, j, k)\in\Delta(L, \mathbb{C})$.

Это следствие вытекает из теоремы 3, если положить в ней оператор $L_n=0$. Аналогичные утверждения вытекают из теорем 2 и 4.

Доказательство теорем 2—4 основано на следующих двух леммах.

Лемма 3. *Пусть* $\tilde{A}_1$ *и* $\tilde{\Phi}$ — *скалярное блок-операторы, действующие в пространстве* $\mathfrak{H}$, *причем* $\tilde{\Phi}$ — *самосопряжен, а для соответствующих им матриц* A_1 *и* Φ *справедливо соотношение*

$$(\Phi g, g)<0, \quad g\in\mathfrak{Z}(A_1), \quad g\neq 0. \tag{36}$$

Тогда существует такой скалярный блок-оператор $\tilde{A}_2 \in [\mathfrak{H}^n]$, что

$$\mathfrak{R}(\tilde{A}_1) \oplus \mathfrak{R}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{H}^n, \quad \mathfrak{Z}(\tilde{A}_1) \oplus \mathfrak{Z}(\tilde{A}_2) = \mathfrak{H}^n \tag{37}$$

и для некоторых положительных постоянных c_1, c_2 и $\varkappa$

$$(\tilde{\Phi}\tilde{g}^n, \tilde{g}^n) + \varkappa \| \tilde{g}^n \|^2 \leqslant c_1 \| \tilde{A}_1 \tilde{g}^n \|^2 - c_2 \| \tilde{A}_2 \tilde{g}^n \|^2, \quad \tilde{g}^n \in \mathfrak{H}^n. \tag{38}$$

Доказательство. Так как пространство $\mathbb{C}^n$ конечномерно, то $\dim \mathfrak{Z}(A_1) = \operatorname{codim} \mathfrak{R}(A_1) = \dim [(\mathbb{C}^n \ominus \mathfrak{R}(A_1)]$, поэтому найдется такой линейный оператор A_2, действующий из $\mathfrak{Z}(A_1)$ в $\mathbb{C}^n \ominus \mathfrak{R}(A_1)$, для которого $\mathfrak{Z}(A_2) = \{0\}$. Доопределяя оператор A_2 на все пространство $\mathbb{C}^n$ с условием $A_2 x = 0$ для $x \in \mathbb{C}^n \ominus \mathfrak{Z}(A_1)$, получаем $\mathfrak{R}(A_1) \oplus \mathfrak{R}(A_2) = \mathbb{C}^n$ и $\mathfrak{Z}(A_1) \oplus \oplus \mathfrak{Z}(A_2) = \mathbb{C}^n$. Следовательно, для соответствующих матрицам A_1 и A_2 скалярных блок-операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ справедливы равенства (37). В силу конечномерности пространства $\mathbb{C}^n$ получим $\| A_1 g_1 \| \geqslant \nu \| g_1 \|$, когда $g_1 \in \in \mathfrak{Z}(A_2) = \mathbb{C}^n \ominus \mathfrak{Z}(A_1)$, а учтя условие (36), имеем $(\Phi g_2, g_2) \leqslant -2\varkappa \| g_2 \|^2$, когда $g_2 \in \mathfrak{Z}(A_2)$, причем постоянные $\varkappa$ и $\nu > 0$. Представим произвольный вектор g из $\mathbb{C}^n$ в виде $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in \mathfrak{Z}(A_2)$, а $g_2 \in \mathfrak{Z}(A_1)$. Тогда

$$(\Phi g, g) + \varkappa \| g \|^2 \leqslant \| \Phi \| \; \| g_1 \|^2 + \delta^{-2} \| \Phi \|^2 \| g_1 \|^2 + \varkappa \| g_1 \|^2 + \delta^2 \| g_2 \|^2 -$$
$$- \varkappa \| g_2 \|^2 \leqslant c_1 \| A_1 g_1 \|^2 - (\varkappa - \delta^2) \| A_2 \|^{-1} \| A_2 g_2 \|^2 = c_1 \| A_1 g \|^2 -$$
$$- (\varkappa - \delta^2) \| A_2 \|^{-1} \| A_2 g \|^2.$$

Полагая $\delta^2 < \varkappa$, получаем неравенство (38).

В следующей лемме понадобятся скалярные блок-операторы

$$\tilde{\Phi}_m^0 = (i)^m \{(-1)^s \delta_{s+v,m} I\}_{s.v=1}^{n-1}, \quad m = \overline{2, n} \tag{39}$$

(действующие в пространстве $\mathfrak{H}^{n-1}$), где $\delta_{s,v}$ — символ Кронекера. По элементам $\tilde{x}^n = \{x^1, \ldots, x^n\} \in \mathfrak{H}^n$ построим векторы $\tilde{x}_\tau^n = \{x^1, \tau x^2, \ldots, \tau^{n-1} x^n\}$, зависящие от вещественного параметра τ. Далее, как правило, индекс при постоянной $c > 0$ в неравенствах опускается, если значение этой постоянной не играет роли для последующих рассуждений.

Лемма 4. *Пусть оператор L_0 самосопряжен Тогда для любого $\tau_1 > 0$ найдется такая постоянная $c > 0$, что при $\tau \geqslant \tau_1$ для форм $\Phi_m(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$, заданных равенством* (13), *справедливы оценки*

$$| \Phi_m [\tilde{x}^{n-1} \oplus x^n] - \tau^{-m+2} (\tilde{\Phi}_m^0 (\operatorname{diag}^{n-1} L_0) \tilde{x}_\tau^{n-1}, \tilde{x}_\tau^{n-1}) | \leqslant c\tau^{-m+1} [\| \tilde{x}_\tau^{n-1} \|^2 +$$
$$+ \| | L_n |^{1/2} x^n \|^2, \quad m = \overline{2, n-1}, \tag{40}$$

а

$$|\Phi_n [\tilde{x}^{n-1} \oplus x^n] - \tau^{-n+2} (\tilde{\Phi}_n^0 (\operatorname{diag}^{n-1} L_0) \tilde{x}_\tau^{n-1}, \tilde{x}_\tau^{n-1}) + (-i)^n (L_n x^n, x^n) | \leqslant$$
$$\leqslant c\tau^{-n+1} \| \tilde{x}_\tau^{n-1} \|^2. \tag{41}$$

Доказательство. Из вида (10) формы $\Phi_{1,m}(\tilde{x}^n, \tilde{y}^n)$, имеем

$$\Phi_{1,m} [\tilde{x}^n] = \frac{(i)^m}{\tau^{m-2}} \sum_{s=2}^{m-1} (-1)^s \sum_{v=1}^{s-1} \tau^{m-s-v} (L_{s+v-m} \tau^{v-1} x^v, \tau^{s-1} x^s). \tag{42}$$

Выделяя из этого тождества слагаемые, содержащие оператор L_0, и замечая, что $L_v = 0$ при $v < 0$, а левая часть в (42) не содержит слагаемых, в которые входят элементы x^s и x^v при s и $v \geqslant n - 1 \geqslant m - 1$, получаем неравенство

$$|2\operatorname{Re}\Phi_{1,m}[\tilde{x}^n]-\frac{1}{\tau^{m-2}}2\operatorname{Re}\Big[(i)^m\sum_{s=[m/2]+1}^{m-1}(-1)^s(L_0\tau^{m-s-1}x^{m-s},\tau^{s-1}x^s)|\leqslant$$

$$\leqslant c\tau^{-m+1}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2,\quad m=\overline{2,n}. \qquad (43)$$

Переписывая в виде, аналогичном (42), форму $\Phi_{2,m}(\tilde{x}^n,\tilde{y}^n)$, заданную равенством (11), и выделяя из полученного тождества слагаемое, содержащее элемент x^n (замечая при этом, что $L_v=0$ при $v>n$), имеем

$$|2\operatorname{Re}\Phi_{2,m}[\tilde{x}^n]|\leqslant c\tau^{-2m+1}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2+\tau^{-m+1}2|(L_nx^n,\tau^{m-1}x^m)|\leqslant$$

$$\leqslant c\tau^{-2m+2}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2+\||L_n|^{1/2}x^n\|^2,\quad m=\overline{2,n}. \qquad (44)$$

И, наконец, преобразуя к виду, аналогичному (42), форму $\Phi_{3,m}(\tilde{x}^n,\tilde{y}^n)$, заданную равенством (12), и выделяя при четном m слагаемые, содержащие оператор L_0, а при $m=n$, кроме того, и слагаемые, в которые входит оператор L_n, приходим к неравенствам

$$|\Phi_{3,2q-1}[\tilde{x}^n]|\leqslant c\tau^{-2q+2}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2,\quad 1\leqslant 2q-1\leqslant n-1, \qquad (45)$$

$$|\Phi_{3,2q}[\tilde{x}^n]-(L_0x^q,x^q)|\leqslant c\tau^{-2q}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2,\quad 1\leqslant 2q\leqslant n-1, \qquad (46)$$

при нечетном n

$$|\Phi_{3,n}[\tilde{x}^{n-1}\oplus x^n]+(-i)^n(L_nx^n,x^n)|\leqslant c\tau^{-n+1}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2, \qquad (47)$$

а при четном n

$$|\Phi_{3,n}[\tilde{x}^{n-1}\oplus x^n]-(L_0x^{n/2},x^{n/2})+(-i)^n(L_nx^n,x^n)|\leqslant c\tau^{-n}\|\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2. \qquad (48)$$

Учитывая вид (39) оператора $\tilde{\Phi}_m^0$, заданного при четном и нечетном m, а также самосопряженность оператора L_0 из неравенств (43) — (48) получаем оценки (40) и (41).

Доказательство теоремы 2 основано на проверке требований теоремы 1. Полагая в оценках (40) число $m=2q+1$ и используя условие $L_0\gg 0$, а также коммутируемость оператора $\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2}$ с оператором $\tilde{\Phi}_m^0$, из леммы 4 выводим неравенство

$$\sum_{q=1}^{[n/2]}\xi_q\tau^{2q-1}\{\Phi_{2q+1}[\tilde{x}^n]-\Phi_{2q+1}[\tilde{y}^n]\}\leqslant\Upsilon_\tau^1(\tilde{x}^{n-1}\oplus\tilde{y}^{n-1})+\Upsilon_\tau^2(x^n\oplus y^n), \qquad (49)$$

в котором $\tau>\tau_1$ и

$$\Upsilon_\tau^1(\tilde{x}^{n-1}\oplus\tilde{y}^{n-1})=\sum_{q=1}^{[n/2]}\xi_q[(\tilde{\Phi}_{2q+1}^0(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{x}_\tau^{n-1},(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{x}_\tau^{n-1})-$$

$$-(\tilde{\Phi}_{2q+1}^0(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{y}_\tau^{n-1},(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{y}_\tau^{n-1})]+c\tau^{-1}[\|(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{x}_\tau^{n-1}\|^2+$$

$$+\|(\operatorname{diag}^{n-1}L_0^{1/2})\tilde{y}_\tau^{n-1}\|^2], \qquad (50)$$

$$\Upsilon_\tau^2(x^n\oplus y^n)=\sum_{q=1}^{[n/2]-1}\xi_q\tau^{2q-1}[\||L_n|^{1/2}x^n\|^2+\||L_n|^{1/2}y^n\|^2]-$$

$$-\xi_{[n/2]}\tau^{n-2}(-i)^n[(L_nx^n,x^n)-(L_ny^n,y^n)]. \qquad (51)$$

По коэффициентам оператор-функций (29) построим матрицу

$$A_1 = \{\gamma_{s,v}\}_{s,v=1}^{2n-2}, \tag{52}$$

где

$$\gamma_{s,v} = \begin{cases} \alpha_{s,v} \text{ при } s, v = \overline{1, n-1}, \\ \beta_{s,v-n+1} \text{ при } s = \overline{1, n-1} \text{ и } v = \overline{n, 2n-2}, \\ 0 \text{ при } s = \overline{n, 2n-2} \text{ и } v = \overline{1, 2n-2}. \end{cases} \tag{53}$$

Скалярным блок-операторам $\tilde{\Phi}_m^0$, заданным формулой (39), соответствуют квадратные матрицы $\Phi_m^0 = (i)^m \{(-1)^s \delta_{s+v,m}\}_{s,v=1}^{n-1}$, по которым введем квадратные матрицы $\Phi_m^0 \oplus (-\Phi_m^0)$ размера $(2n-2) \times (2n-2)$. В этих обозначениях условие (31) примет вид $\left(\sum_{q=1}^{[n/2]} \xi_q [\Phi_{2q+1}^0 \oplus (-\Phi_{2q+1}^0)] g, g\right) < 0$ для всех $g \in \mathfrak{H}(A_1)$ и $g \neq 0$. Отсюда на основании леммы 3 следует, что найдется такой скалярный блок-оператор $\tilde{A}_2$, действующий в пространстве $\mathfrak{H}^{2n-2}$, что для достаточно больших $\tau > 0$ выражение (50) оценивается в виде

$$\Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}^{n-1} \oplus \tilde{y}^{n-1}) \leqslant c_1 \| \tilde{A}_1 (\mathrm{diag}^{2n-2} L_0^{1/2}) (\tilde{x}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{y}_\tau^{n-1}) \|^2 -$$

$$- c_2 \| \tilde{A}_2 (\mathrm{diag}^{2n-2} L_0^{1/2}) (\tilde{x}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{y}_\tau^{n-1}) \|^2 \tag{54}$$

с постоянными $c_1, c_2 > 0$, а для операторов $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ справедливы равенства (37).

Введем действующий в пространстве $\mathfrak{H}^{n-1}$ оператор

$$\tilde{I}_\tau^{n-1} = \mathrm{diag}\{I, \tau I, \ldots, \tau^{n-2} I\}. \tag{55}$$

Из определений элементов $\tilde{x}^{n-1}$ и $\tilde{x}_\tau^{n-1}$ вытекает тождество $\tilde{x}_\tau^{n-1} = \tilde{I}_\tau^{n-1} \times \tilde{x}^{n-1}$, а так как $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ — скалярные блок-операторы, то они коммутируют с обратимым оператором $\mathrm{diag}^{2n-2} L_0^{1/2}$, откуда и из оценки (54) выводим неравенство

$$\Upsilon_\tau^1 (\tilde{x}^{n-1} \oplus \tilde{y}^{n-1}) \leqslant c_1' \| \tilde{A}_1 (\tilde{I}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{I}_\tau^{n-1}) (\tilde{x}^{n-1} \oplus \tilde{y}^{n-1}) \|^2 -$$

$$- c_2' \| \tilde{A}_2 (\tilde{I}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{I}_\tau^{n-1}) (\tilde{x}^{n-1} \oplus \tilde{y}^{n-1}) \|^2 \tag{56}$$

с постоянными $c_1', c_2' > 0$.

Оценим теперь выражение (51). Для этого заметим, что так как выполнено условие (17), а число n — нечетно, то $(-i)^n L_n$ — самосопряженный оператор, поэтому $\| |L_n|^{1/2} x \|^2 = \| [(-i)^n L_n]_+^{1/2} x \|^2 + \| [(-i)^n L_n]_-^{1/2} x \|^2$ и $(-i)^n (L_n x, x) = \| [(-i)^n L_n]_+^{1/2} x \|^2 - \| [(-i)^n L_n]_-^{1/2} x \|^2$. Следовательно, найдется такое $\tau_0 > 0$, что для всех $\tau \geqslant \tau_0$ справедлива оценка

$$\Upsilon_\tau^2 (x^n \oplus y^n) \leqslant \tau^n \xi_{[n/2]} \{-2^{-1} \| [(-i)^n L_n]_+^{1/2} x^n \|^2 + 2 \| [(-i)^n L_n]_-^{1/2} x^n \|^2 +$$

$$+ 2 \| [(-i)^n L_n]_+^{1/2} y^n \|^2 - 2^{-1} \| [(-i)^n L_n]_-^{1/2} y^n \|^2\}. \tag{57}$$

Введем операторы

$$\tilde{J}_1 = [\tilde{A}_1 (\tilde{I}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{I}_\tau^{n-1})] \oplus [(-i)^n L_n]_-^{1/2} \oplus [(-i)^n L_n]_+^{1/2}, \tag{58}$$

$$\tilde{J}_2 = [\tilde{A}_2 (\tilde{I}_\tau^{n-1} \oplus \tilde{I}_\tau^{n-1})] \oplus [(-i)^n L_n]_+^{1/2} \oplus [(-i)^n L_n]_-^{1/2}, \tag{59}$$

действующие в пространстве $\mathfrak{H}^{2n}$, причем первые слагаемые в (58) и (59) действуют на «компоненту» $\tilde{x}^{n-1} \oplus \tilde{y}^{n-1}$ вектора $\tilde{x}^n \oplus \tilde{y}^n$, а вторые и третьи слагаемые в (58) и (59) — соответственно на x^n и y^n.

Так как для операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ справедливо первое равенство (37), то линейные многообразия $\Re(\widetilde{J}_1)$ и $\Re(\widetilde{J}_2)$ ортогональны. Значит, $\|(\widetilde{J}_1 + \widetilde{J}_2)\widetilde{f}^{2n}\|^2 = \|\widetilde{J}_1\widetilde{f}^{2n}\|^2 + \|\widetilde{J}_2\widetilde{f}^{2n}\|^2 \geqslant \|\widetilde{J}_1\widetilde{f}^{2n}\|^2$, т. е. выполнено неравенство (20). А из оценок (49), (56) и (57) вытекает выполнение требования (21) теоремы 1, на основании которой

$$\widetilde{J}_1[\widetilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^n_{h,j,k}(\tau T)] \simeq (\widetilde{J}_1 + \widetilde{J}_2)[\widetilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^n_{h,j,k}(\tau T)]. \tag{60}$$

Но учитывая определения (52), (53) и (55) матрицы A_1 и оператора $\widetilde{I}^{n-1}_\tau$, а также принимая во внимание тождества (2), (3), (6) — (8), получаем $\widetilde{A}_1(\widetilde{I}^{n-1}_\tau \oplus \widetilde{I}^{n-1}_\tau)[\widetilde{x}^{n-1}_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^{n-1}_{h,j,k}(\tau T)] = x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots, U_{n-1}(\mu\tau)) \oplus \oplus 0_{n-1}$, где через 0_{n-1} обозначен нулевой элемент пространства $\mathfrak{H}^{n-1}$. Кроме того, так как $(-i)^n L_n$ — самосопряженный оператор, то $x_{h,j,k}(\mu^{n-1} \times \times [(-i)^n L_n]^{1/2}_-, \ \mu^{n-1}e^{\mu\tau T}[(-i)^n L_n]^{1/2}_+) \simeq x_{h,j,k}(\mu^{n-1}\{[(-i)^n L_n]^{1/2}_- + e^{\mu\tau T} \times \times [(-i)^n L_n]^{1/2}_+\})$. Исходя из этих соотношений и определения (58) оператора $\widetilde{J}_1$, имеем

$$\widetilde{J}_1[\widetilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^n_{h,j,k}(\tau T)] \simeq x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots$$
$$\ldots, U_{n-1}(\mu\tau), \ \mu^{n-1}\{[(-i)^n L_n]^{1/2}_- + e^{\mu\tau T}[(-i)^n L_n]^{1/2}_+\}). \tag{61}$$

Из равенств (37) вытекает обратимость скалярного блок-оператора $\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2$, а значит, и оператора $(\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2)(\widetilde{I}^{n-1}_\tau \oplus \widetilde{I}^{n-1}_\tau)$ при $\tau \neq 0$. Но оператор $(-i)^n L_n$ — самосопряжен, поэтому $|L_n|^{1/2} = [(-i)^n L_n]^{1/2}_+ + [(-i)^n L_n]^{1/2}_-$. Тем самым

$$(\widetilde{J}_1 + \widetilde{J}_2)[\widetilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^n_{h,j,k}(\tau T)] \simeq \{\widetilde{x}^{n-1}_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^{n-1}_{h,j,k}(\tau T) \oplus$$
$$\oplus [|L_n|^{1/2} x_{h,j,k}(\mu^{n-1})] \oplus [|L_n|^{1/2} x_{h,j,k}(\mu^{n-1}e^{\mu\tau T})]\} \simeq$$
$$\simeq [(\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus |L_n|^{1/2} \oplus (\mathrm{diag}^{n-1} I) \oplus |L_n|^{1/2}][\widetilde{x}^n_{h,j,k}(0) \oplus \widetilde{x}^n_{h,j,k}(\tau T)].$$

Отсюда и из соотношений (60) и (61) вытекает утверждение (32).

Доказательство теорем 3 и 4 полностью повторяет доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Как видно из анализа доказательств леммы 4 и теоремы 2 число τ_0, существование которого утверждается в теореме 2, можно сделать сколь угодно малым, если потребовать малость норм операторов $L_1, \ldots, L_n$ и чисел $\xi_1/\xi_{[n/2]}, \ldots, \xi_{[n/2]-1}/\xi_{[n/2]}$. Поэтому в этом случае утверждение теоремы 2 справедливо и при $\tau = 1$. Аналогичное дополнение можно сформулировать и к теоремам 3, 4 и к следствию 1. Кроме того, число τ_0 не зависит от T. Значит, в утверждениях теорем 2—4 и в следствии 1 число T можно положить равным T/τ.

Замечание 2. Требования $\xi_{[n/2]} > 0$ и $\xi_{[(n+1)/2]} > 0$ в теоремах 2 и 3, вообще говоря, излишни, так как они вытекают из неравенств (31) и (33) соответственно. Это несложно вывести из соображений о размерности подпространства решений системы (30) и о количестве отрицательных квадратов у форм, стоящих в левых частях неравенств (31) и (33). Аналогично показывается, что из неравенства (34) следует, что $\xi_{n-1} \neq 0$. Однако, если $\xi_{n-1} < 0$, то для справедливости утверждения теоремы 4 необходимо левую часть в соотношении (32) заменить на $x_{h,j,k}(U_1(\mu\tau), \ldots, U_{n-1}(\mu\tau), \mu^{n-1}\{[(-i)^n L_n]^{1/2}_+ + e^{\mu\tau T}[(-i)^n L_n]^{1/2}_-\})$.

Замечание 3. Если требование $L_0 \gg 0$ в теоремах 2—4 и в следствии 1 заменить условием $L_0 \ll 0$, то утверждения этих теорем и следствия сохраняют силу, если вместо предположения об отрицательности левых частей в неравенствах (31), (33) или (34) потребовать их положительность.

Из теоремы 3 и замечаний 1 и 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть оператор-функция* $L(\lambda) = L_0 + \lambda L_1 + \lambda^2 L_2$ *и* L_0, L_2 *самосопряжены, а* $\operatorname{Re} L_1 \geqslant 0$. *Тогда при* $(h, j, k) \in \Delta(L, \mathbb{C})$

$$x_{h,j,k}([\alpha + e^{\mu}\beta] I, \ \mu[(L_2)_+^{1/2} + e^{\mu}(L_2)_-^{1/2}]) \simeq x_{h,j,k}(I, \mu|L_2|^{1/2}, e^{\mu} I, \mu e^{\mu} |L_2|^{1/2}),$$

если $|\alpha| > |\beta|$ *и* $L_0 \gg 0$, *или если* $|\alpha| < |\beta|$ *и* $L_0 \ll 0$.

1. *Радзиевский Г. В.* Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор-функций // Успехи мат. наук.— 1982.— **37**, № 2.— С. 81—145.
2. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Там же.— 1971.— **26**, № 4.— С. 15—41.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.11.88