УДК 517.946.9:517.948.34

М. И. Громяк

Построение периодических решений волновых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка

Исследуем существование периодического решения задачи, описываемой уравнениями

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

и соответствующей нелинейной задачи, описываемой простейшим интегро-дифференциальным уравнением

$$u_{tt} - u_{xx} = f\left(x, t, u, \int_0^{h(x,t)} \varphi(x, t, s, u(x, s))\, ds\right), \quad 0 < x < \pi, \ t \in \mathbb{R}, \ s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

и условиями (2), (3).

Вопрос существования классических периодических решений задач (1)—(3) и (2)—(4) без интегрального члена детально изучен в работах [1, 2] для различных периодов T_i, $i = 1, 2, 3$, в соответствующих пространствах функций A_i^0, $i = 1, 2, 3$. В настоящей статье исследуются только T_2-периодические решения, в частности и 2π-периодические решения, но в ином классе функций A_2, причем $A_2 \supset A_2^0$.

Для дальнейших исследований определим период T_2 и соответствующее ему пространство функций A_2: $T_2 = 2\pi(2p-1)/q$, q — нечетное, $(2p-1, q) = 1$; $A_2 = \{u : u(x, t) = u(\pi - u, t + T_2/2)\}$, а также введем ряд обозначений. Выражение $(r, s) = 1)$ обозначает, что числа r и s взаимно простые. Обозначим через П множество $\Pi = \{(x, t) : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \in \mathbb{R}\}$, через C пространство функций, непрерывных и ограниченных на П. Символ C^j будет обозначать пространство таких $u \in C$, что $D_t^k D_x^l u \in C\ \forall\, k + l \leqslant j$. И, наконец, через G_t обозначим пространство функций, непрерывных и ограниченных на П вместе с производной по t.

Введем еще два оператора Вейводы—Штедры [3]: для $g \in C$ определим

$$(S_1 g)(x, t) = -\frac{2}{1}\int_0^x d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau,$$

$$(S_2 g)(x, t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Покажем теперь, что оператор вида [1]

$$(R_2 g)(x, t) = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g)(x, t) + (\tilde{S}_1 g + \tilde{S}_2 g)(x, t) \equiv$$

$$\equiv (Sg)(x, t) + (\tilde{S} g)(x, t), \tag{6}$$

где $(Sg)(x, t) = \frac{1}{2}(S_1 g + S_2 g)(x, t)$, $(\tilde{S} g)(x, t) = (\tilde{S}_1 g + \tilde{S}_2 g)(x, t)$, $(S_1 g) \times \times (x, t)$ и $(S_2 g)(x, t)$ определены формулами (5), а

$$(\tilde{S}_1 g)(x, t) = \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau,$$

$$(\tilde{S}_2 g)(x, t) = \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{7}$$

пригоден для исследования T_2-периодических решений задач (1) — (3) и (2) — (4) в классе функций A_2. Более того, докажем, что для всякой функции $g \in G_t \cap A_2$, $p = 1$, построенная функция вида (6) является единственной из пространства $C^2 \cap A_2$, удовлетворяющей (1) — (3).

1. Докажем сначала, что $u = R_2 g$ удовлетворяет уравнению (1). Это можно сделать непосредственной проверкой, дважды дифференцируя по x и t уравнение (6) и подставляя в (1). Но для доказательства достаточно показать, что $u_0 = \tilde{S} g$ удовлетворяет однородному уравнению $u_{0tt} - u_{0xx} = 0$. Легко убедиться, что $u_{0xx} = 0$. Далее, покажем, что $u_{0tt} = 0$. Вычислим сначала производную u_{0t}:

$$u_{0t} = \frac{\pi - x}{4\pi}\int_0^\pi \{g(\xi, t+\xi) - g(\xi, t-\xi)\}\, d\xi + \frac{x}{4\pi}\int_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi) -$$

$$- g(\xi, t-\pi+\xi\}\, d\xi \equiv \frac{\pi - x}{4\pi}\mu(t) + \frac{x}{4\pi}\nu(t). \tag{8}$$

На основании обозначений функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ нетрудно показать, что в классе A_2 $\mu(t) \equiv 0$ и $\nu(t) \equiv 0$. Докажем это в случае $p = q = 1$, $T_2 = 2\pi$. Пусть $g \in A_2$, $T_2 = 2\pi$. Тогда справедливо тождество

$$g(x, t) = g(\pi - x, t + \pi). \tag{9}$$

Учитывая обозначение функции $\mu(t)$ из (8), имеем

$$\mu(t)=\int_0^\pi g(\xi, t+\xi)-\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi.$$

Отсюда, произведя замену переменной $\xi=\pi-\eta$ в первом интеграле, на основании (9) получаем

$$\mu(t)=-\int_\pi^0 g(\pi-\eta, t+\pi-\eta)\,d\eta-\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_0^\pi g(\eta, t-\eta)\,d\eta-\int_0^\pi g(\xi, t-\xi)\,d\xi\equiv 0.$$

Аналогично, учитывая обозначение функции $\nu(t)$ из (8) и тождество (9), имеем

$$\nu(t)=\int_0^\pi \{g(\xi, t+\pi-\xi)-g(\xi, t-\pi+\xi)\}\,d\xi=$$

$$=\int_0^\pi g(\pi-\eta, \pi+t-\pi+\eta)\,d\eta-\int_0^\pi g(\xi, t-\pi+\xi)\,d\xi\equiv 0,$$

а значит, $u_{0t}=0$.

Таким, образом, функция $u_0=\tilde{S}g$ удовлетворяет однородному уравнению $u_{0tt}-u_{0xx}=0$, а следовательно, функция $u=R_2g$ — уравнению (1).

2. Легко убедиться непосредственной проверкой, что функция $u=R_2g$ удовлетворяет краевым условиям (2), т. е. $(R_2g)(0, t)=(R_2g)(\pi, t)=0$.

3. Наконец, докажем, что функция $u=R_2g\in A_2$ при $T_2=2\pi$ $(p=q=1)$ и $g\in A_2$, т. е. $(R_2g)(\pi-x, t+\pi)=(R_2g)(x, t)$, на основании чего убедимся в выполнении условия (3) для функции $u=R_2g$.

Учитывая соотношение (6), которое определяет оператор R_2, формулы (5), (7) и определение класса A_2, получаем

$$(R_2g)(\pi-x, t+\pi)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi-x} d\xi\int_{t+x+\xi}^{t+2\pi+x-\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{\pi-x}^{\pi} d\xi\int_{t+2\pi-x-\xi}^{t+x+\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau+\frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t+\pi-\xi}^{t+\pi+\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t+\xi}^{t+2\pi-\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau=-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\eta\int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi)\,d\theta-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi)\,d\theta+\frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\eta\int_{t-\pi+\eta}^{t+\pi-\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi)\,d\theta+$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\eta\int_{t-\eta}^{t+\eta} g(\pi-\eta, \theta+\pi)\,d\theta=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau+\frac{\pi-x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{x}{4\pi}\int_0^\pi d\xi\int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau)\,d\tau\equiv(R_2g)(x, t).$$

Следовательно, $u=R_2g\in A_2$. На основании последних преобразовании имеем

$$(R_2g)(x, t+2\pi)=(R_2g)(\pi-(\pi-x), (t+\pi)+\pi)=$$

$$=(R_2g)(\pi-x, t+\pi)=(R_2g)(x, t),$$

и в общем при $p=1$ $(R_2g)(x, t+T_2)=(R_2g)(x, t)$, $T_2=2\pi/q$, $q=1, 2, \ldots$, что и доказывает выполнение условия (3) для функции $u=R_2g$.

Изложенные выше результаты являются доказательством следующего утверждения.

Теорема 1. *Для всякой $g \in G_t \cap A_2$, $p=1$, функция $u=R_2g$ является единственной из пространства $C^2 \cap A_2$, удовлетворяющей уравнениям* (1) — (3).

Вопрос существования периодического решения нелинейной задачи (2)—(4) исследуем с помощью принципа Шаудера. Следует заметить, что применение принципа Шаудера позволяет установить существование решения интегрального уравнения типа (6), но для нелинейного случая, т. е. уравнения вида $u(x, t)=(R_2F[u])(x, t)$ и, следовательно, волнового интегро-дифференциального уравнения (4) при достаточно слабых предположениях относительно функции $F[u](x, t)=f\left(x, t, u(x, t), \int\limits_0^{h(x,t)} \varphi(x, t, s, u(x, s))\, ds\right)$. Для этого сформулируем принцип Шаудера в виде следующего утверждения.

Теорема 2 [4]. *Непрерывное отображение $\tilde{R}$, переводящее замкнутое выпуклое множество Ω банахового пространства X в компактное множество $\Delta \subset \Omega$, имеет неподвижную точку.*

Пользуясь такой формулировкой принципа Шаудера, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функции $f(x, t, u, v)\left(v(x, t)=\int\limits_0^{h(x,t)} \varphi(x, t, s, u(x, s))\, ds\right)$, $\varphi(x, t, s, u)$ и $h(x, t)$ определены в области $\{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R},\ u \in [-a; a],\ v \in \mathbb{R}^1\}$, непрерывны по совокупности переменных x, t, s, u, v, T_2-периодические по t, $p=1$, и, кроме того, функция $f(x, t, u, v)$ удовлетворяет условию $|f(x, t, u, v)| \leqslant M$, $M=\mathrm{const}$, и при каждом $(x, t) \in \Pi$ непрерывна по u и v равномерно относительно $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$;*

2) *постоянные a и M связаны неравенством $a > \frac{3}{4} M\pi^2$;*

3) *функция $F[u](x, t)=f\left(x, t, u(x, t), \int\limits_0^{h(x,t)} \varphi(x, t, s, u(x, s))\, ds\right)$ для каждой функции $u \in C \cap A_2$ принадлежит пространству $C \cap A_2$.*

Тогда краевая задача (2) — (4) *имеет, по крайней мере, одно непрерывное T_2-периодическое решение.*

Доказательство. В теореме 2 положим $X=C^T(\Pi)$, где $C^{T_2}(\Pi)$ обозначает множество всех непрерывных T_2-периодических по переменной t функций $u(x, t)$, а в качестве Ω возьмем совокупность тех $u \in C^{T_2}(\Pi)$, для которых $\|u\| \leqslant a$ $(\|u\|=\max\limits_{[0,\pi]\times[0,T_2]} |u(x, t)|)$. Оператор $\tilde{R}_2$ определим следующим образом:

$$z=\tilde{R}_2(u), \quad z(x, t)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi} Q(\xi)\, d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))\, d\tau +$$

$$+\frac{\pi-x}{4\pi}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t-\xi}^{t+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))\, d\tau +$$

$$+\frac{x}{4\pi}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau))\, d\tau, \tag{10}$$

$$Q(\xi)=\begin{cases} 1, & 0 \leqslant \xi \leqslant x, \\ -1, & x < \xi \leqslant \pi. \end{cases}$$

Условия 1 — 3 теоремы 3 обеспечивают принадлежность $\tilde{R}_2(u) \in \Omega$. Действительно, на основании теоремы 1 и условия 3 теоремы 3 оператор $\tilde{R}_2$ каждую T_2-периодическую функцию $u(x, t) \in \Omega \subset C^{T_2}$ переводит в T_2-периодическую функцию $z(x, t)$ и

$$\| z \| = \| \tilde{R}_2(u) \| \leqslant \frac{3}{4} M\pi^2 < a, \quad u \in \Omega. \tag{11}$$

Теперь проверим, что $\tilde{R}_2$ — непрерывный оператор. В самом деле, пусть $u_n \to u_0$, $v_n \to v_0$, $u_n \in \Omega$, $v_n \in \Omega$, $z_n = \tilde{R}_2(u_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку функция $f(x, t, u, v)$ равномерно непрерывна по u, v, то по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, что при $|u - u'| < \delta_1$, $|v - v'| < \delta_2$ получим

$$| f(x, t, u, v) - f(x, t, u', v') | < \varepsilon, \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, T_2]. \tag{12}$$

Так как $\| u_n - u_0 \| \to 0$, $\| v_n - v_0 \| \to 0$, то при достаточно больших n $(n \geqslant n_0)$ будет $\| u_n - u_0 \| < \delta$, $\| v_n - v_0 \| < \delta$ и тем более $| u_n(x, t) - u_0(x, t) | < \delta$, $| v_n(x, t) - v_0(x, t) | < \delta$, $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, T_2]$. Учитывая (12), для указанных n можно записать $| f(x, t, u_n(x, t), v_n(x, t)) - f(x, t, u_0(x, t), v_0(x, t)) | < \varepsilon$, $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, T_2]$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$\| z_n - z_0 \| = \max_{[0,\pi]\times[0,T_2]} | z_n(x, t) - z_0(x, t) | \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \max_{[0,\pi]\times[0,T_2]} \Bigg\{ \int_0^\pi d\xi \Bigg| \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} | f(\xi, \tau, u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, u_0(\xi, \tau),$$

$$v_0(\xi, \tau)) | \, d\tau \Bigg| + \left| \frac{\pi - x}{\pi} \right| \int_0^\pi d\xi \Bigg| \int_{t-\xi}^{t+\xi} | f(\xi, \tau, u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)) -$$

$$- f(\xi, \tau, u_0(\xi, \tau), v_0(\xi, \tau)) | \, d\tau \Bigg| + \left| \frac{x}{\pi} \right| \int_0^\pi d\xi \Bigg| \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} | f(\xi, \tau, u_n(\xi, \tau), v_n(\xi, \tau)) -$$

$$- f(\xi, \tau, u_0(\xi, \tau), v_0(\xi, \tau)) | \, d\tau \Bigg| \Bigg\} \leqslant \frac{3}{4} \pi^2 \varepsilon.$$

Поэтому $z_n = \tilde{R}_2(u_n) \to z_0 = \tilde{R}_2(u_0)$.

Так как Ω — выпуклое замкнутое множество, то для применения теоремы 2 надо установить лишь относительную компактность множества $\tilde{R}_2(\Omega)$. Для этого докажем, что функции семейства $\tilde{R}_2(\Omega)$ равностепенно непрерывны (равномерная ограниченность их вытекает из того, что $\tilde{R}_2(\Omega) \subset \subset \Omega$, а Ω — ограниченное множество).

На основании (10) имеем

$$| z(x_2, t_2) - z(x_1, t_1) | \leqslant \frac{1}{4} \Bigg| \int_0^{x_2} d\xi \int_{t_2+x_2-\xi}^{t_2-x_2+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) \, d\tau -$$

$$- \int_0^{x_1} d\xi \int_{t_1+x_1-\xi}^{t_1-x_1+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) \, d\tau \Bigg| + \frac{1}{4} \Bigg| \int_\pi^{x_2} d\xi \int_{t_2+x_2-\xi}^{t_2-x_2+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau),$$

$$v(\xi, \tau)) \, d\tau - \int_\pi^{x_1} d\xi \int_{t_1+x_1-\xi}^{t_1-x_1+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau), v(\xi, \tau)) \, d\tau \Bigg| +$$

$$+ \frac{1}{4} \Bigg| \frac{\pi - x_2}{\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t_2-\xi}^{t_2+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau) v(\xi, \tau)) \, d\tau - \frac{\pi - x_1}{\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t_1-\xi}^{t_1+\xi} f(\xi, \tau, u(\xi, \tau),$$

$$v(\xi,\tau))\,d\tau \Bigg| + \frac{1}{4}\Bigg| \frac{x_2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t_2-\pi+\xi}^{t_2+\pi-\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))\,d\tau -$$

$$-\frac{x_1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\xi \int\limits_{t_1-\pi+\xi}^{t_1+\pi-\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),\ v(\xi,\tau))\,d\tau \Bigg| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \qquad (13)$$

Для выражения I_1 получаем оценку

$$I_1 \leqslant \frac{1}{4}\Bigg| \int\limits_0^{x_2} d\xi \int\limits_{t_2+x_2-\xi}^{t_2-x_2+\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))\,d\tau - \int\limits_0^{x_1} d\xi \int\limits_{t_2+x_2-\xi}^{t_2-x_2+\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),$$

$$v(\xi,\tau))\,d\tau \Bigg| + \frac{1}{4}\Bigg| \int\limits_0^{x_1} d\xi \int\limits_{t_2+x_2-\xi}^{t_2-x_2+\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^{x_1} d\xi \int\limits_{t_1+x_1-\xi}^{t_1-x_1+\xi} f(\xi,\tau,u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))\,d\tau \Bigg| \leqslant \frac{3}{4}M\pi\,|x_2-x_1| + \frac{1}{2}M\pi\,|t_2-t_1|. \qquad (14)$$

Аналогично находим оценки для I_2, I_3, и I_4:

$$I_2 \leqslant \frac{3}{4}M\pi\,|x_2-x_1| + \frac{1}{2}M\pi\,|t_2-t_1|,$$

$$I_3 \leqslant \frac{1}{4}M\pi\,|x_2-x_1| + \frac{1}{2}M\pi\,|t_2-t_1|, \qquad (15)$$

$$I_4 \leqslant \frac{1}{4}M\pi\,|x_2-x_1| + \frac{1}{2}M\pi\,|t_2-t_1|.$$

На основании неравенств (13) — (15) получаем $|z(x_2,t_2) - z(x_1,t_1)| \leqslant$ $\leqslant 2M\pi(|x_2-x_1| + |t_2-t_1|)$, откуда и следует, что множество $\tilde{R}_2(\Omega)$ равностепенно непрерывно.

Следовательно, выполнены все условия теоремы 2, из которой следует существование, по крайней мере, одного непрерывного T_2-периодического решения краевой задачи (2) — (4). Теорема 3 доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Периодические решения волновых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1986.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.26).
2. *Хома Г. П.* Периодические решения волновых дифференциальных уравнений второго порядка.— Киев, 1986.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.5).
3. *Вейвода О., Штедры М.* Существование классических периодических решений волнового уравнения. Связь теоретико-числового характера периода и геометрических свойств решений // Дифференц. уравнения.— 1984.— **20**, № 10.— С. 1733—1739.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 742 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 16.03.87