УДК 517.55

Ю. Б. Зелинский

О линейно выпуклых областях с гладкими границами

В настоящей работе дано полное описание гладких линейно выпуклых областей.

А. П. Южаков и В. П. Кривоколеско [1] показали, что в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$ ограниченная линейно выпуклая область с гладкой границей гомеоморфна шару. Кроме этого ими построен пример, показывающий, что в случае неограниченных областей это, вообще говоря, неверно.

Ниже будет показано, что в общем случае имеет место альтернатива: или область D гомеоморфна шару (для областей со связной границей), или D есть цилиндр вида $Q \times \mathbb{C}^{n-1}$, где Q — плоская область с гладкой границей.

Под прямыми, j-плоскостями и гиперплоскостями понимаем комплексно аффинные подмногообразия размерности 1, j и $n-1$ соответственно. Под проекцией π пространства $\mathbb{C}^n$ на прямую γ понимаем каноническое комплексное линейное отображение.

Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется линейно выпуклым, если для каждой точки $z^0 \in \mathbb{C}^n \setminus E$ существует гиперплоскость, проходящая через z^0 и непересекающая E.

Сопряженным множеством к E называется множество $\tilde{E} = \{w \mid \langle w, z\rangle \neq 1$ для всех $z \in E\}$, где $\Theta = (0, 0, \ldots, 0)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\langle w, z\rangle = w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n$.

Будем говорить, что область D имеет гладкую границу ∂D, если D можно задать следующим образом: $D = \{z \mid \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$, где Φ — вещественная непрерывно дифференцируемая функция в $\mathbb{C}^n$ и $\operatorname{grad} \Phi \neq 0$ в точках ∂D.

Теорема 1. *Всякое линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$, которое содержит хотя бы одну прямую, есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу m-плоскостей, $1 \leqslant m \leqslant n$, и не более чем $(n-m)$-мерным линейно выпуклым основанием Q (размерность комплексная), которое уже не содержит ни одной прямой. Сопряженное множество к E лежит в $(n-m)$-плоскости.*

Доказательство. Заметим, что линейно выпуклое множество $E \subset \mathbb{C}^n$ вместе с прямой l и точкой z содержит также прямую l_z, параллельную l. Если это не так, то для некоторой точки $z_1 \in l_z$ $z_1 \notin E$. Следовательно, в силу линейной выпуклости E существует гиперплоскость $T \subset \mathbb{C}^n$, $z_1 \in T$, $T \cap l \subset T \cap E = \varnothing$. Но это возможно лишь тогда, когда T параллельна l и поэтому она полностью содержит l_z. Тогда $T \cap E \supset l_z \cap E \supset z$, что противоречит выбору T. Отсюда видно, что множество всех прямых, проходящих черес z и лежащих в E, заполняет некоторую m-мерную образующую B_z множества E, $1 \leqslant m \leqslant n$ (доказательство аналогично проведенному выше: если E содержит две прямые, то оно содержит и их линейную оболочку и т. д.) Поэтому E должно быть цилиндром с параллельными B_z образующими и основанием $Q = E \cap C_z$, где C_z — дополнительное к B_z в $\mathbb{C}^n$ подпространство. Линейная выпуклость Q очевидна.

Так как E содержит m линейно независимых прямых γ_k, $k = 1, \ldots, m$, то $\tilde{E}$ содержится в $\tilde{\gamma}_k$ для всех k [2]. Но известно, что $\tilde{\gamma}_k$ — гиперплоскость (см. [2], свойство 4°). Тогда $\tilde{E} \subset \bigcap_{k=1}^{m} \tilde{\gamma}_k$, а пересечение m линейно независимых гиперплоскостей задает $(n-m)$-плоскость.

Следствие 1. *Замкнутое линейно выпуклое множество $F \subset \mathbb{C}^n$, содержащее хоть одну прямую, не имеет с-экстремальных точек (определение с-экстремальной точки см.* в [3]).

Теорема 2. *Если $E \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклое множество такое, что $\mathbb{C}^n \setminus E$ несвязно, то E есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу гиперплоскостей и основананием, лежащим на прямой γ, причем множество компонент $\gamma \setminus Q$ взаимно однозначно соответствует множеству компонент из $\mathbb{C}^n \setminus E$, а $\tilde{E}$ гомеоморфно $\mathring{\gamma} \setminus Q$ и лежит на прямой, пороходящей через начало координат, где* $\mathring{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$, Доказательство. Если точки z^1 и z^2 принадлежат разным компонентам множества $\mathbb{C}^n \setminus E$, то, очевидно, гиперплоскости $L(z^1)$ и $L(z^2)$, содержащие соответственно эти точки и не пересекающие E, также лежат в разных компонентах $\mathbb{C}^n \setminus E$ и не пересекаются. Поэтому они параллельны. Отсюда следует, что произвольная гиперплоскость, не пересекающая E, параллельна им. Таким образом, если точка $z^0 \in E$, то в E лежит и гиперплоскость $L(z^0)$, проходящая через z^0 и параллельная $L(z^1)$. Первое утверждение теоремы следует теперь из теоремы 1.

Известно [4], что семейство всех параллельных гиперплоскостей задается точками прямой в сопряженном пространстве, проходящей через начало координат. Поэтому второе утверждение теоремы следует из параллельности гиперплоскостей, не пересекающих E, так как множество $\tilde{E}$ задает гиперплоскости, не пересекающие E.

Лемма 1. *Если $D \ni \Theta$ — область в $\mathbb{C}^n$, то точка $w_0 \neq \Theta$ принадлежит границе компакта $\tilde{D}$ тогда и только тогда, когда гиперплоскость $L = \{z \mid \langle w_0, z\rangle = 1\}$ проходит через какую-нибудь конечную точку границы ∂D, но не пересекает область D. Если же область D неограничена, то $\Theta \in \partial\tilde{D}$.*

В случае точки $w_0 \neq \Theta$ доказательство повторяет доказательство свойства 20 [2] для ограниченных областей. Если же область D неограничена, то очевидно, что $\Theta \in \partial\tilde{D}$ (иначе, если $\Theta \in \operatorname{Int}\tilde{D}$, то $\operatorname{Int}\tilde{D}$ содержит некоторый открытый шар B радиуса $r > 0$ и, следовательно, область D содержится в замкнутом шаре $\overline{B}_{1/r}$ ([2], свойства 1 и 2), т. е. ограничена, что противоречит предположению).

Лемма 2. *Пусть линейно выпуклую область $D \ni \Theta$ можно записать в виде $D = \{z \mid \Phi(z, \bar{z}) < 0\}$, где вещественная функция Φ дифференцируема и $\operatorname{grad}\Phi \neq 0$ в конечных точках границы ∂D области D. Тогда граница $\partial\tilde{D}$ компакта $\tilde{D}$ имеет вид $\partial\tilde{D} = \{w \mid w_i = \Phi'_{z_i}(z_1\Phi'_{z_1} + \ldots + z_n\Phi'_{z_n})^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, $z \in \partial D$ при $z \neq \infty$ или $w = \Theta$ при $z = \infty \in \partial D\}$.*

Для конечных точек $\xi \in \partial D$ доказательство аналогично доказательству свойства 21 [2]. Бесконечно удаленной же точке $z = \infty \in \partial D$, согласно предыдущей лемме, соответствует точка $\Theta \in \partial\tilde{D}$.

Лемма 3. *Если D — линейно выпуклая область с гладкой связной границей, то сечения области D прямыми связны и односвязны.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно, так как прямая совпадает с пространством $\mathbb{C}$, а граница будет замкнутой жордановой кривой в $\mathring{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\infty)$. Пусть $n > 1$. Покажем сначала, что для произвольной прямой γ множество $D \cap \gamma$ связно. Если это не так, то существуют точки z^0 и z^1, принадлежащие разным компонентам множества $D \cap \gamma$. Кроме этого в силу связности D существует непрерывный путь $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $z^0(0) = z^0$, $z(1) = z^1$, лежащий в D. Пусть G_0 — компонента $D \cap \gamma$, содержащая точку z^0, ∂G_0 — ее граница. В силу гладкости границы ∂D и линейной выпуклости D в каждой точке $\xi \in \partial G_0$ существует единственная касательная гиперплоскость к ∂D, причем эти гиперплоскости непрерывно зависят от точки ξ, к тому же разным точкам $\xi_1, \xi_2 \in \partial G_0$ соответствуют разные гиперплоскости. Ведь если бы касательная гиперплоскость L содержала две точки $\xi_1, \xi_2 \in \partial G_0$, то она бы содержала и всю прямую γ, но это невозможно, так как мы имели бы, с одной стороны, $L \cap D = \varnothing$, а с другой — $L \cap D \supset \gamma \cap D \neq \varnothing$. Касательная гиперплоскость $L(\xi)$ в точке $\xi \in \partial G_0$ задается некоторой точкой $w(\xi) \in \tilde{D}$, $L(\xi) = \{z \mid \langle w(\xi), z\rangle = 1, \langle w(\xi), \xi\rangle = 1\}$. В силу леммы 2 и изложенного выше имеет место гомеоморфизм

$$f: \begin{cases} \xi \to w(\xi) & \xi \in \partial G_0, \quad \xi \neq \infty. \\ \infty \to \Theta, & \end{cases}$$

причем $f(\partial G_0) \subset \partial\tilde{D}$. Не нарушая общности, предположим, что прямая γ проходит через начало координат (этого легко добиться параллельным сдвигом).

Тогда согласно свойству 6 [3] множество $D \cap \gamma$ гомеоморфно дополнению $\overset{\circ}{\lambda} \setminus \pi_\lambda \tilde{D}$ к канонической проекции сопряженного множества $\tilde{D}$ на прямую λ ($\overset{\circ}{\lambda} = \lambda \cup (\infty)$). Но так как $D \cap \gamma$ несвязно, отсюда следует, что $H_1(\pi_\lambda \tilde{D}) \neq \neq 0$, где $H_1(\pi_\lambda \tilde{D})$ — первая группа сингулярных гомологий компакта $\pi_\lambda \tilde{D}$ с коэффициентами в группе целых чисел [5]. Заметим также, что множество $f(\partial G_0)$ при проекции π_λ гомеоморфно проектируется в $\partial \pi_\lambda \tilde{D}$ (в силу упомянутого выше гомеоморфизма между ∂G_0 и $\partial \pi_\lambda \tilde{D}$). Точкам z^0 и z^1 в сопряженном пространстве соответствуют две гиперплоскости $L_0 = \{w \mid \langle w, z^0 \rangle = 1\}$ и $L_1 = \{w \mid \langle w, z^1 \rangle = 1\}$, непересекающие $\tilde{D}$, причем L_0 зацеплена с циклом $\pi_\lambda f(\partial G_0)$ (определение циклов см. в [6]), а поэтому и с циклом $f(\partial G_0)$, который гомеоморфно проектируется на него, а гиперплоскость L_1 не зацеплена с этими циклами. Следовательно, с одной стороны, не существует гомотопии, переводящей $(2n-2)$-цикл $L_0 \cup (\infty)$ в $(2n-2)$-цикл $L_1 \cup (\infty)$ и не пересекающей $f(\partial G_0) \subset \tilde{D}$. С другой стороны, путь $z(t)$ задает гомотопию, переводящую гиперплоскость L_0 в гиперплоскость L_1 по закону $L_t = \{w \mid \langle w, z(t) \rangle = 1\}$, не пересекающую $\tilde{D}$, так как $z(t) \in D \ \forall t$. Полученное противоречие показывает связность множества $D \cap \gamma$.

Согласно изложенному выше, $D \cap \gamma$ — область на прямой γ. Докажем ее односвязность. Предположим, что она неодносвязна, тогда граница $\partial (D \cap \cap \gamma)$ несвязна. Для точек z^0, z^1, принадлежащих разным компонентам $\partial (D \cap \cap \gamma)$, существует замкнутая жорданова кривая $\Gamma \subset D \cap \gamma$, которая разделяет в γ точки z^0, z^1. В силу связности ∂D можно соединить точки ξ^0, ξ^1 непрерывным путем $\Gamma_1 = \{z \mid z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset \partial D$, $z(0) = z^0$, $z(1) = z^0$, причем одна из точек z^0 или z^1 может быть бесконечно удаленной. В каждой конечной точке $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, проведем касательную гиперплоскость $L(t)$ к границе. Очевидно, что в силу линейной выпуклости $L(t) \cap D = \varnothing$. Поэтому $\gamma \subset L(t)$. Гиперплоскость $L(t)$ и не лежащая на ней прямая γ имеют одну общую точку $\xi(t)$ (конечную, если они не параллельны, и бесконечную, если параллельны). Если же точка $z(t)$ при $t = 0$ или 1 бесконечна, то положим $L(t) = \infty$; в этом случае $\xi(t) = \gamma \cap L(t) = \infty$. В силу гладкости границы ∂D семейство $L(t)$ непрерывно зависит от t (в том числе и в бесконечно удаленной точке) и поэтому получаем непрерывный путь $\Gamma_2 = \{z \mid z = \xi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, соединяющий точки $z(0) = \xi(0)$, $z(1) = \xi(1)$ в прямой $\overset{\circ}{\gamma} = \gamma \cup (\infty)$. Так как замкнутая жорданова кривая Γ разделяет точки z^0, z^1, то $\Gamma \cap \Gamma_2 \neq \varnothing$. Следовательно, для некоторого $t = t^0\, L(t^0) \cap \cap \Gamma \subset L(t^0) \cap D \neq \varnothing$. Это противоречит линейной выпуклости D.

Т е о р е м а 3. *В $\mathbb{C}^n$ линейно выпуклая область со связной гладкой границей гомеоморфна шару.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы аналогично доказательству теоремы 2 [1], но основывается на доказанной в настоящей работе лемме 3.

Т е о р е м а 4. *Если $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой несвязной границей, то D есть цилиндр с образующими в виде параллельных друг другу гиперплоскостей и основанием в виде плоской области Q с гладкой границей, лежащей на прямой l (дополнительном подпространстве к образующей цилиндра), число компонент ∂Q совпадает с числом компонент ∂D. Сопряженный компакт D состоит из объединения плоских 2-мерных компактов, гомеоморфных кругам и лежащих на прямой, проходящей через начало координат. Граница этих компактов гладка во всех точках за исключением, может быть, начала координат, по которому могут пересекаться некоторые из компактов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 2. Дополнительного рассмотрения требует лишь гладкость границы ∂Q. Легко видеть, что $\tilde{D}$ получается из $\overset{\circ}{l} \setminus Q$ преобразованием инверсии $1/t$, $t \in \mathbb{C}$, которое гладко во всех точках, отличных от Θ, а граница $\partial(\overset{\circ}{l} \setminus Q)$ состоит из гладких кривых, за исключением, возможно, точки ∞, которая при инверсии отображается в начало координат. Если $l \setminus Q$ имеет несколько неограниченных компонент, то соответствующие им компоненты в сопряженном множестве пересекаются по началу координат.

Следствие 2. *Если $D \subset \mathbb{C}^n$ — линейно выпуклая область с гладкой границей, то ее сечение произвольной прямой всегда связно.*

Доказательство очевидно, так как произвольное сечение прямой или лежит в одной из образующих цилиндра, или гомеоморфно основанию.

Напомним следующее определение.

Определение 1. *Множество $E \subset \mathbb{C}^n$ называется сильно линейно выпуклым, если его сечения прямыми связны и односвязны.*

Следствие 3. *Линейно выпуклая область со связной гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ является сильно линейно выпуклой.*

Следствие 4. *Сопряженный компакт к линейно выпуклой области с гладкой границей состоит из сильно линейно выпуклых компонент.*

Последнее следствие для областей со связной границей следует из [3], а для областей с несвязной границей произвольная прямая, не содержащая $\tilde{D}$, пересекает $\tilde{D}$ не более чем в одной точке, а для содержащей $\tilde{D}$ пересечение совпадает с $\tilde{D}$, компоненты множества $\tilde{D}$ односвязны, так как оно гомеоморфно дополнению к связному множеству Q.

Исследуем, насколько в теореме 3 можно избавиться от требования гладкости. Легко построить пример даже ограниченной области, например $D = D_1 \times D_2$, где D_1 — кольцо $D_1 = \{z_1 \mid 1 < |z_1| < 2\} \subset \mathbb{C}^n$, а D_2 — единичный шар в $\mathbb{C}^{n-1}$, который показывает, что если множество точек негладкости (в данном случае $\partial D_1 \times \partial D_2$) разбивает границу ∂D, то теорема 3 может быть неверна. В работе [7] показано, что при некоторых дополнительных условиях можно пренебречь счетным множеством точек негладкости. Покажем, что на самом деле в этой теореме можно пренебречь произвольным множеством A, локально не разбивающим ∂D и таким, что $\partial D \setminus A$ всюду плотно в ∂D.

Лемма 4. *Пусть D — линейно выпуклая область со связной границей, причем граница ∂D гладкая во всех точках за исключением множества A такого, что A локально не разбивает ∂D и $\partial D \setminus A$ всюду плотно в ∂D. Тогда все сечения D прямыми связны и односвязны.*

Доказательство. Покажем связность сечения $D \cap \gamma$. Предположим, что $D \cap \gamma$ несвязно. Если $\partial (D \cap \gamma) \subset \partial D \setminus A$, то полностью применимо доказательство леммы 3. Если же $\partial (D \cap \gamma) \cap A \neq \varnothing$, то затруднение, которое возникает, заключается в том, что для границы ∂G_0 компоненты $\partial (D \cap \gamma)$ в некоторых (или во всех, если $\partial G_0 \subset A$) точках существуют неединственные касательные гиперплоскости и мы не можем упорядочить их непрерывно. Если мы сумеем обойти это затруднение, то все остальные рассуждения аналогичны доказательству леммы 3. В силу того что A локально не разбивает ∂D для произвольной окрестности $U_k \subset \partial D$ цикла ∂G_0, существует ненулевой одномерный цикл a_k, лежащий в $\partial D \setminus A$ и являющийся ε-сдвигом цикла ∂G_0. Как и в лемме 3, циклу a_k соответствует гомеоморфно цикл c_k на $\partial \tilde{D}$, задающий непрерывное семейство касательных гиперплоскостей к D в точках из a_k. Каждая касательная гиперплоскость пересекает прямую γ в одной точке; при этом получаем некоторый цикл b_k. Выберем окрестность U_k настолько близкой, чтобы циклы a_k и b_k были ε-сдвигами граничного цикла ∂G_0 и цикл b_k был бы зацеплен с точкой $z^0 \in G_0$ ($b_k \subset \gamma \setminus D \cap \gamma$). Циклу b_k, согласно свойству 6 [4], гомеоморфно соответствует цикл $d_k \in \pi_\lambda \tilde{D}$, зацепленный в прямой λ с точкой $w_0 \in \lambda \cap L_0$, $L_0 = \{w \mid \langle w, z_0 \rangle = 1\}$, а в пространстве $\tilde{\mathbb{C}}^n$ с $(2n-2)$-циклом $L_0 \cup (\infty)$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} a_k & \xleftarrow{\alpha} & c_k \\ \delta \uparrow & & \downarrow \pi_\lambda \\ b_k & \xrightarrow{\beta} & d_k \end{array},$$

где α и β — гомеоморфизмы, а δ — ε-сдвиг. Поэтому c_k — ненулевой одномерный цикл, который при проекции π_λ проектируется изоморфно в цикл d_k. Следовательно, цикл c_k также зацеплен с циклом $L_0 \cup (\infty)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству леммы 3. Отсюда следует, что теорема 3 справедлива, если выполняются наложенные в лемме 4 условия.

Легко построить пример, когда лемма 4 и теорема 3 справедливы даже при наличии дополнительной линейно выпуклой оболочки и если $\operatorname{grad} \Phi = 0$ в точках ∂D.

Пример. Пусть $D = \mathbb{C}^n \setminus A$, где A — вещественная полугиперплоскость $\operatorname{Re} z_n \geqslant 0$. Очевидно, что в данном случае все сечения D связны и односвязны и справедлива теорема 3.

Замечание. Из теоремы 2 следует, что линейно аналитические гиперповерхности, изучаемые в [9], сводятся к декартовым произведениям $K \times \mathbb{C}^{n-1}$, где K — вещественная одномерная кривая.

1. *Южаков А. П., Криволеско В. П.* Некоторые свойства линейно выпуклых областей с гладкими границами в $\mathbb{C}^n$// Сиб мат. журн.— 1971.— **12**, № 2.— С. 452—458.
2. *Айзенберг Л. А.* О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби // Там же.— 1967.— **8**, № 5.— С. 1224—1242.
3. *Зелинский Ю. Б.* О комплексных оболочках // II Всесоюз. конф. «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике».— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 95—97.
4. *Зелинский Ю. Б.* Об одном геометрическом критерии сильной линейной выпуклости // Геометрическая теория функций и топология.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 18—29.
5. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология.— М. : Мир, 1971.— 680 с.
6. *Александров П. С.* Введение в гомологическую теорию размерности.— М. : Наука, 1975. — 368 с.
7. *Макарова Л. Я.* Достаточные условия линейной выпуклости областей с почти гладкой границей // О голоморфных функциях многих комплексных переменных.— Красноярск : Ин-т физики СО АН СССР, 1976.— С. 87—96.
8. *Зиновьев Б. С.* Аналитические условия и некоторые вопросы аппроксимации линейно выпуклых областей с гладкими границами в пространстве $\mathbb{C}^n$// Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 6.— С. 61—69.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 04.03.86