УДК 517.5

О. В. Давыдов

Об асимптотическом поведении наилучших равномерных приближений индивидуальных функций сплайнами

Установлено, что в классе W^rH_ω, где $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, существует функция, для которой погрешность наилучшего приближения сплайнами минимального дефекта (в том числе и со свободными узлами) асимптотически совпадает с верхней гранью приближения функций класса W^rH_ω этими же сплайнами.

Встановлено, що в класі W^rH_ω, де $\omega(t)$ - опуклий модуль неперервності, існує функція, для якої похибка найкращого наближення сплайнами мінімального дефекту (в тому числі і з вільними вузлами) асимптотично співпадає з верхньою межею наближення функцій класу W^rH_ω цими ж сплайнами.

1. Пусть C — пространство непрерывных 2π-периодических функций f с чебышевской нормой $\|f\|_C$, F^T_{2n-1} — пространство тригонометрических полиномов степени $n-1$, $S_m(\Delta_N)$ — пространство сплайнов порядка $m=1, 2, \dots$ дефекта 1 по фиксированному разбиению Δ_N: $0=x_0<x_1<\dots<x_N=2\pi$, $N=1, 2, \dots$, $S_{Nm}=S_m(\overline{\Delta}_N)$, где $\overline{\Delta}_N$ — равномерное разбиение $\overline{x}_i=2\pi i/N$, $i=0, \dots, N$, Q_{Nm} — множество всех сплайнов порядка m дефекта 1, имеющих внутри интервала $(0, 2\pi)$ не более $N-1$ узлов (произвольно расположенных), W^rH_ω, $r=0, 1, \dots,$ — класс r раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 2\pi]$ функций f, у которых $\omega(f^{(r)}, t)\leqslant\omega(t)$, $t\in[0, 2\pi]$, где $\omega(f^{(r)}, t)=\sup\limits_{|t'-t''|\leqslant t}|f^{(r)}(t')-f^{(r)}(t'')|$, а $\omega(t)$ — некоторый заданный модуль непрерывности, $E(f, \mathfrak{N})_C$ — наилучшее приближение функции f множеством $\mathfrak{N}$, $E(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})_C$ — наилучшее приближение класса функций $\mathfrak{M}$ множеством $\mathfrak{N}$.

С. Н. Бернштейном и С. М. Никольским рассмотрена задача исследования асимптотического поведения величины $E(f, F_{2n-1}^T)_C$ для индивидуальных функций. Наиболее общие результаты в этом направлении принадлежат В. Н. Темлякову, который показал, что в каждом классе $W^r H_\omega$ существует функция f, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E(f, F_{2n-1}^T)_C}{E(W^r H_\omega, F_{2n-1}^T)_C} = 1,$$

а в случае, когда $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, верхний предел можно заменить на обычный. Библиографию и подробное обсуждение этих вопросов можно найти в обзоре Н. П. Корнейчука [1].

Настоящая работа посвящена решению аналогичной задачи для наилучшего приближения сплайнами (со свободными или фиксированными узлами), поставленной Н. П. Корнейчуком [2].

Получены следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $r = 0, 1, \ldots, m \geqslant r$. Существует функция $\bar{f} \in W^r H_\omega$ такая, что*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{E(\bar{f}, S_{Nm})_C}{E(W^r H_\omega, S_{Nm})_C} = 1. \qquad (1)$$

Теорема 2. *Пусть выпуклый вверх модуль непрерывности удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to+0} \omega(t)/t = \infty, \qquad (2)$$

$r = 0, 1, \ldots, m \geqslant r$. Тогда существует $f_* \in W^r H_\omega$, для которой

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{E(f_*, Q_{Nm})_C}{E(W^r H_\omega, Q_{Nm})_C} = 1. \qquad (3)$$

При доказательстве теоремы 1 используется тот же метод, что и в работе В. Н. Темлякова [3], посвященной приближению тригонометрическими полиномами. Однако для приближения сплайнами со свободными узлами этот способ по-видимому не подходит, поэтому теорема 2 доказывается методом скользящего горба.

2. Для любой суммируемой функции f и любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ обозначим через $\mu(f; [\alpha, \beta])$ число существенных перемен знака f на $[\alpha, \beta]$ (определение см. [4, с. 80]).

Лемма 1. *Пусть $s \in S_m(\Delta_N)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant i \leqslant N - k$. Тогда $\mu(s; [x_i, x_{i+k}]) \leqslant m + k - 1$.*

Доказательство. По теореме Ролля $\mu(s; [x_i, x_{i+k}]) \leqslant \mu(s^{(m)}; [x_i, x_{i+k}]) + m$. Далее, $s^{(m)}$ есть кусочно постоянная функция с возможными разрывами внутри (x_i, x_{i+k}) лишь в точках $x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}$. Поэтому $\mu(s^{(m)}; [x_i, x_{i+k}]) \leqslant k - 1$. Лемма доказана.

В дальнейшем существенную роль играет следующая теорема типа Валле Пуссена.

Теорема 3 [6]. *Пусть $f \in C$. Если для некоторого сплайна $s^* \in S_m(\Delta_N)$ на каком-либо промежутке $[x_i, x_{i+k}]$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $0 \leqslant i \leqslant N - k$, составленном из k последовательных интервалов разбиения Δ_N, существуют $m + k + 1$ точек t_j : $x_i \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_{m+k+1} \leqslant x_{i+k}$, в которых разность $\delta(t) = f(t) - s^*(t)$ принимает значения с чередующимися знаками*

$$\operatorname{sgn} \delta(t_j) = -\operatorname{sgn} \delta(t_{j+1}) \neq 0, \qquad j = 1, \ldots, m + k,$$

то

$$E(f, S_m(\Delta_N))_C \geqslant \min_{1 \leqslant j \leqslant m+k+1} |\delta(t_j)|.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого сплайна $s \in S_m(\Delta_N)$

$$\|f - s\|_C < \min_{1 \leqslant j \leqslant m+k+1} |\delta(t_j)|.$$

Тогда $|f(t_j) - s(t_j)| < |\delta(t_j)|$, $j = 1, \ldots, m + k + 1$, так что сплайн $s_0(t) = s(t) - s^*(t) = \delta(t) - [f(t) - s(t)]$ имеет на $[x_i, x_{i+k}]$ по крайней мере $m + k$ перемен знака, что невозможно в силу леммы 1. Теорема доказана.

Отметим, что соответствующая теорема типа Чебышева доказана в [5, 6] (см. также [7, с. 114]).

Пусть $\omega(t)$ — некоторый выпуклый вверх модуль непрерывности. Обозначим через $f_{nr} = f_{nr}(\omega)$ $2\pi/n$-периодическую функцию со средним значением на периоде, равным нулю, являющуюся r-м периодическим интегралом от функции $f_{nr}^{(r)} = f_{n0}$, которая нечетна и определяется равенствами

$$f_{n0}(t) = \begin{cases} 2^{-1}\omega(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \pi/2n, \\ 2^{-1}\omega(2\pi/n - 2t), & \pi/2n \leqslant t \leqslant \pi/n. \end{cases}$$

Тогда, как известно, $f_{nr} \in W^r H_\omega$.

Лемма 2 [3, с. 591]. *Пусть $n'/n \to 1$ при $n \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \| f_{n'r} \|_C / \| f_{nr} \|_C = 1.$$

Лемма 3. *Пусть $N \leqslant 2n - m - 1$. Тогда*

$$E(f_{nr}, Q_{Nm})_C = \| f_{nr} \|_C.$$

Доказательство. Функция $f_{nr}(t)$, будучи $2\pi/n$-периодической, четной или нечетной (в зависимости от r), в среднем равной нулю на периоде, имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ по крайней мере $2n$ точек $t_1 < \ldots < t_{2n}$, в которых $|f_{nr}(t_j)| = \| f_{nr} \|_C$ и $\operatorname{sgn} f(t_j) = -\operatorname{sgn} f(t_{j+1})$. По предположению $N + m + 1 \leqslant 2n$. Каково бы ни было разбиение Δ_N с $N - 1$ узлами внутри $(0, 2\pi)$, из теоремы 3 при $s^*(t) \equiv 0$, $[x_i, x_{i+k}] = [x_0, x_N]$ вытекает, что $E(f_{nr}, S_m(\Delta_N))_C \geqslant \| f_{nr} \|_C$. Следовательно, $E(f_{nr}, Q_{Nm})_C \geqslant \| f_{nr} \|_C$. Обратное неравенство очевидно. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, $r = 0, 1, \ldots, m \geqslant r$. Тогда при $N \to \infty$*

$$E(W^r H_\omega, Q_{Nm})_C \sim E(W^r H_\omega, S_{Nm})_C \sim \| f_{nr} \|_C, \tag{4}$$

где $n = [N/2]$, $f_{nr} = f_{nr}(\omega)$.

Доказательство. С одной стороны, используя результат Н. П. Корнейчука [4, с. 320], имеем $E(W^r H_\omega, Q_{Nm})_C \leqslant E(W^r H_\omega, S_{Nm})_C \leqslant \| f_{nr} \|_C$, где $n = [N/2]$, а с другой — для $n' = [(N + m + 1)/2] + 1$ по лемме 3 $E(W^r H_\omega, Q_{Nm})_C \geqslant E(f_{n'r}, Q_{Nm})_C = \| f_{n'r} \|_C$. Очевидно, $n' \sim n$ при $N \to \infty$. Поэтому из леммы 2 вытекает (4). Следствие доказано.

Отметим, что второе из соотношений (4) принадлежит Н. П. Корнейчуку [4, с. 320].

Лемма 4. *Пусть $N_1, N_2 = 1, 2, \ldots$, $f, g \in C$. Тогда*

$$E(f + g, Q_{N_1+N_2-1,m})_C \leqslant E(f, Q_{N_1m})_C + E(g, Q_{N_2m})_C.$$

Доказательство. Если $s_1 \in Q_{N_1m}$, $s_2 \in Q_{N_2m}$, то $s_1 + s_2 \in Q_{N_1+N_2-1,m}$. Поэтому $E(f + g, Q_{N_1+N_2-1,m})_C \leqslant \| (f + g) - (s_1 + s_2) \|_C \leqslant \| f - s_1 \|_C + \| g - s_2 \|_C$. Переходя к точной нижней грани по s_1 и s_2, получаем утверждение леммы.

3. Доказательство теоремы 1. Следуя [3], определим функции

$$\psi_s(t) = \begin{cases} f_{s^3 r}^{(r)}(t - \beta_s) \text{ при } |t - \beta_s| \leqslant 2\pi/s^2; \\ 0 \text{ — при остальных } t \in [0, 2\pi]; \\ \psi_s(t + 2\pi) = \psi_s(t), \end{cases}$$

$$\bar{f}^{(r)}(t) = \sum_{s=s_0}^{\infty} \psi_s(t),$$

где $\beta_s = 2 \sum_{\nu=s_0}^{s-1} \frac{2\pi}{\nu^2} + \frac{2\pi}{s^2}$, а s_0 таково, что $\lim\limits_{s\to\infty} \beta_s \leqslant 2\pi$.

Тогда $\bar{f}^{(r)} \in H_\omega$, 2π-периодична и в среднем равна нулю. Пусть $\bar{f} \in W^r H_\omega$ — r-й периодический интеграл от функции $\bar{f}^{(r)}$. *Покажем, что для* $\bar{f}$ выполняется (1).

Пусть $2(s-1)^5 - (s-1)^4 (m+3)/2 \leqslant N \leqslant 2s^5 - s^4 (m+3)/2$. Положим $\bar{x}_i = 2\pi i/N$, $i = 0, 1, \ldots, N$ — узлы равномерного разбиения и пусть $[\bar{x}_{i_0}, \bar{x}_{i_0+k_0}]$ — минимальный из отрезков $[\bar{x}_i, \bar{x}_{i+k}]$, содержащих отрезок $[\beta_s - 2\pi/s^2, \beta_s + 2\pi/s^2]$. Тогда $k_0 \leqslant [2N/s^2] + 2 \leqslant 4s^3 - m - 1$.

Функция $\bar{f}(t)$ на $[\beta_s - 2\pi/s^2, \beta_s + 2\pi/s^2]$ лишь на многочлен p_{r-1} степени не выше $r-1$ отличается от функции $f_{s^5 r}(t - \beta_s)$. В силу свойств $f_{s^5 r}$ отсюда следует, что для разности $\bar{f} - p_{r-1}$ на отрезке $[\bar{x}_{i_0}, \bar{x}_{i_0+k_0}]$ найдутся $4s^3$ точек t_j: $\bar{x}_{i_0} \leqslant t_1 < \ldots < t_{4s^3} \leqslant \bar{x}_{i_0+k_0}$, в которых $|\bar{f}(t_j) - p_{r-1}(t_j)| = \| f_{s^5 r} \|_C$ и $\operatorname{sgn}[\bar{f}(t_j) - p_{r-1}(t_j)] = -\operatorname{sgn}[\bar{f}(t_{j+1}) - p_{r-1}(t_{j+1})]$. Учитывая, что $p_{r-1} \in S_{Nm}$ и $k_c + m + 1 \leqslant 4s^3$ и применяя теорему 3, получаем неравенство $E(\bar{f}, S_{Nm})_C \geqslant \| f_{s^5 r} \|_C$. Для доказательства (1) теперь остается воспользоваться очевидным соотношением $[N/2] \sim s^5$, $N \to \infty$, леммой 2 и вторым из асимптотических равенств (4). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Построим индуктивно три числовые последовательности γ_k, μ_k, $h_k \in (0, \pi]$, $k = 1, 2, \ldots$. Положим $\gamma_1 = \mu_1 = h_1 = \pi$. Пусть $k \geqslant 2$. Учитывая (2), выберем $\gamma_k > 0$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\omega(\gamma_k)/\gamma_k \geqslant 2(k+2) \sum_{i=1}^{k-1} \omega(h_i)/h_i, \tag{5}$$

$$\gamma_k \leqslant \min\{k^{-1}, \gamma_{k-1}\}. \tag{6}$$

Затем выберем $\mu_k > 0$ настолько малым, чтобы было

$$\omega(\mu_k) \leqslant \min\left\{\frac{\omega(\mu_{k-1})}{k-1}, \frac{\omega(\gamma_k)}{2(k+1)}\right\}, \tag{7}$$

$$\omega(\mu_k)/\mu_k \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1} \omega(h_i)/h_i\right)^4, \tag{8}$$

причем, уменьшая, если потребуется, μ_k, будем считать, что π/μ_k — натуральное число.

Положим $n_k = \pi/\mu_k$ и рассмотрим 2π-периодическую функцию

$$f_{n_k r h}(t) = (2h)^{-1} \int_{-h}^{h} f_{n_k r}(t+u)\, du,$$

которая является функцией Стеклова с шагом $h > 0$ для функции $f_{n_k r} = f_{n_k r}(\omega)$.

По лемме 3 $E(f_{n_k r}, Q_{2n_k - m - 1, m})_C = \| f_{n_k r} \|_C$. Поэтому в силу непрерывности функционала наилучшего приближения $E(f, Q_{2n_k - m - 1, m})_C$ возможно выбрать $h_k > 0$ настолько малым, что

$$E(f_k, Q_{2n_k - m - 1, m})_C \geqslant \frac{k}{k+1} \| f_{n_k r} \|_C, \tag{9}$$

где $f_k = f_{n_k r h_k}$.

В силу свойств функций Стеклова имеем

$$\omega(f_k^{(r)}, t) \leqslant \min\{t\omega(h_k)/h_k, \omega(t)\}, \quad t \in (0, \pi]. \tag{10}$$

Индуктивное построение закончено.

Пусть $k \geqslant 1$. Тогда в силу (7)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \| f_i^{(r)} \|_C \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \| f_{n_i r}^{(r)} \|_C = 2^{-1} \sum_{i=k+1}^{\infty} \omega(\mu_i) \leqslant \frac{\omega(\gamma_{k+1})}{2(k+2)}. \tag{11}$$

В частности, функция

$$f_*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2} f_k(t) \tag{12}$$

r раз непрерывно дифференцируема и

$$f_*^{(r)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2} f_*^{(r)}(t). \tag{13}$$

Покажем, что $f_* \in W^r H_\omega$. Пусть $t \in (0, \pi]$. Ввиду (6) найдется номер $k = 1, 2, \ldots$ такой, что

$$\gamma_{k+1} < t \leqslant \gamma_k. \tag{14}$$

В силу абсолютной сходимости ряда (13)

$$\omega(f_*^{(r)}, t) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+2} \omega(f_i^{(r)}, t). \tag{15}$$

Используя (10), (5) и вытекающее из (14) неравенство $\omega(\gamma_k)/\gamma_k \leqslant 2\omega(t)/t$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+2} \omega(f_i^{(r)}, t) \leqslant t \sum_{i=1}^{k-1} \omega(h_i)/h_i \leqslant t \frac{\omega(\gamma_k)}{2(k+2)\gamma_k} \leqslant \frac{\omega(t)}{k+2}. \tag{16}$$

Из (11) и (14) вытекает

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{i}{i+2} \omega(f_i^{(r)}, t) \leqslant 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} \| f_i^{(r)} \|_C \leqslant \frac{\omega(\gamma_{k+2})}{k+2} \leqslant \frac{\omega(t)}{k+2}. \tag{17}$$

Наконец, ввиду (10)

$$\frac{k}{k+2} \omega(f_k^{(r)}, t) \leqslant \frac{k}{k+2} \omega(t). \tag{18}$$

Из (15) — (18) следует, что $\omega(f_*^{(r)}, t) \leqslant \omega(t)$. В силу произвольности $t \in (0, \pi]$ и 2π-периодичности $f_*^{(r}$ получаем $f_* \in W^r H_\omega$.

Покажем, что для f_* выполняется (3). Рассмотрим последовательность номеров $N_k = 2n_k - m - \nu_k$, где

$$\nu_k = \left[n_k \sqrt[4r+4]{\frac{\mu_k}{\omega(\mu_k)}} \right] + 1.$$

При достаточно больших k, используя лемму 4 и неравенство (9), имеем

$$E(f_*, Q_{N_k m})_C \geqslant E(f_k, Q_{2n_k - m - 1, m})_C - E\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+2} f_i, Q_{\nu_k m} \right)_C -$$

$$- \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{i}{i+2} f_i \right\|_C \geqslant \frac{k}{k+1} \| f_{n_k r} \|_C -$$

$$- E\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+2} f_i, Q_{\nu_k m} \right)_C - \sum_{i=k+1}^{\infty} \| f_i \|_C. \tag{19}$$

Учитывая, что $\| f_{nr} \|_C \asymp n^{-r} \omega(n^{-1})$ и используя (7), нетрудно понять, что

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \| f_i \|_C = o(\| f_{n_k r} \|_C), \qquad k \to \infty. \tag{20}$$

Далее, из (10) и (8) вытекает

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{i+2} f_i^{(r)}, t \right) \leqslant t \sum_{i=1}^{k-1} \omega(h_i)/h_i \leqslant t (\omega(\mu_k)/\mu_k)^{1/4}.$$

Поэтому в силу неравенства типа Джексона для сплайнов и условия (2)

$$E\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i+2}f_i,\ Q_{\nu_k m}\right)_C \leqslant E\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i+2}f_i,\ S_{\nu_k m}\right)_C \leqslant c\nu_k^{-r-1}\left(\omega(\mu_k)/\mu_k\right)^{1/4} \leqslant$$

$$\leqslant cn_k^{-r-1}\left(\omega(\mu_k)/\mu_k\right)^{1/2} \leqslant c_1 n_k^{-r}\omega(n_k^{-1})\left(\mu_k/\omega(\mu_k)\right)^{1/2} = o(\|f_{n_k r}\|_C), \qquad (21)$$

$$k \to \infty.$$

Из (19) — (21) следует

$$\varliminf_{k\to\infty} E(f_*,\ Q_{N_k m})_C/\|f_{n_k r}\|_C \geqslant 1.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что ввиду (2) $\nu_k = o(n_k)$, $k\to\infty$, так что $[N_k/2]\sim n_k$, $k\to\infty$. Тогда по лемме 2 и следствию из леммы 3 $\|f_{n_k r}\|_C \sim E(W^r H_\omega,\ Q_{N_k m})_C$, $k\to\infty$. Теорема 2 доказана.

1. *Корнейчук Н. П.* С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР // Успехи мат. наук.— 1985.— 40, вып. 5.— С. 71—131.
2. *Корнейчук Н. П.* О некоторых проблемах полиномиальной и сплайн-аппроксимации // Конструктивная теория функций: Тр. междунар. конф. (Варна, 27 мая—2 июня 1984 г.). — София: Изд-во БАН, 1984.— С. 49—60.
3. *Темляков В. Н.* Асимптотическое поведение наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— 41, № 3.— С. 587—606.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
5. *Rice J.* Characteris ation of Chebyshev approximation by splines // SIAM J. Numer. Anal.— 1967.— 4, № 4.— P. 557—567.
6. *Schumaker L. L.* Uniform approximation by Tchebysheffian spline functions // J. Math. and Mech.— 1968.— 18, N 4.— P. 369—378.
7. *Малоземов В. Н., Певный А. Б.* Полиномиальные сплайны.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.— 120 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 21.06.88