УДК 517.5

В. Л. Великин, Н. А. Назаренко

Об исследованиях по экстремальным задачам сплайн-аппроксимации

Приводится обзор важнейших результатов по экстремальным задачам приближения сплайнами, которые получены Н. П. Корнейчуком или стимулированы разработанными им методами.

Приводиться огляд найважливіших результатів з екстремальних задач наближення сплайнами, які одержані М. П. Корнійчуком або стимульовані розробленими ним методами.

Систематическое и весьма интенсивное изучение сплайнов в теории приближения началось в шестидесятые годы и связано было, в основном, с задачами интерполирования функций. Результаты Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [1] и Ю. Н. Субботина [2], полученные в 1963—1967 гг., показали, что приближение интерполяционными сплайнами на многих классах функций имеет тот же порядок, что и поперечники соответствующих классов. Естественно, что после этого заинтересовались точными оценками приближения интерполяционными сплайнами на различных классах функций.

В задачах полиномиальной аппроксимации (наилучшей или с помощью линейных методов) точные результаты в ряде случаев уже были получены, причем здесь пришлось столкнуться со значительными трудностями, преодоление которых потребовало создания принципиально новых методов. Вряд ли можно было ожидать, что в случае сплайн-аппроксимации получение окончательных результатов потребует меньших усилий. И действительно, хотя получению и улучшению оценок с неточными константами было посвящено много работ [1—15], к 1970 г. точные оценки приближения интерполяционными сплайнами и сплайнами наилучшего приближения на классах функций были найдены лишь в нескольких специальных случаях [4, 6, 14, 16—18].

Большинство результатов по аппроксимации функций сплайнами за последние два десятилетия существенным образом связаны с научным творчеством Николая Павловича Корнейчука.

К 1970 г. Н. П. Корнейчуком был разработан принципиально новый подход к решению экстремальных задач — теория Σ-перестановок и новые теоремы сравнения [19]. Без преувеличения можно сказать, что результаты этих исследований и особенно разработанные им основополагающие методы решения экстремальных задач внесли решающий вклад для исчерпывающего анализа целого ряда принципиальных проблем теории приближения, прежде всего таких ее разделов, как наилучшая и наилучшая с ограничениями аппроксимация функций, оптимальная аппроксимация функционалов и операторов, теория квадратур, приближенные методы анализа, поперечники и экстремальные подпространства, геометрические аспекты теории аппроксимации. В частности, они позволили найти точное значение погрешности аппроксимации интерполяционными сплайнами и сплайнами наилучшего приближения на важнейших классах функций в различных метриках.

Данная работа содержит обзор важнейших результатов по аппроксимации функций сплайнами, полученных Н. П. Корнейчуком, и преимущественно те результаты по аппроксимации сплайнами, которые прямо или косвенно стимулировались его научным творчеством за последние два десятилетия.

В данном обзоре не рассматриваются вопросы, связанные с ролью сплайнов в теории квадратур, других экстремальных задачах теории аппроксимации и многомерные сплайны.

1. Аппроксимация функций интерполяционными сплайнами. По сравнению с другими аппаратами аппроксимации интерполяционные сплайны имеют преимущество потому, что, во-первых, в ряде важных случаев реализуют минимально возможную погрешность аппроксимации на классе функций, а во-вторых, более удобны с вычислительной точки зрения.

Введем основные обозначения, часть из которых совпадает с обозначениями, используемыми в [20].

При заданных $m = 0, 1, 2, \ldots$, $\Delta_N = \{t_i\}_0^N$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$, $1 \leqslant k_i \leqslant m$, $k = \max\{k_i: 1 \leqslant i \leqslant N\}$ будем обозначать через $S_m^k(\Delta_N)$ совокупность сплайнов порядка m дефекта k, т. е. функций $s(t)$, которые на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ являются алгебраическими многочленами степени не выше, чем m, в узле t_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $s^{(\nu)}(t)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ $\ldots, m - k_i$, непрерывны, а $s^{(m-k_i+1)}$ терпит разрыв в точке t_i (в связи с чем k_i называют дефектом сплайна в узле t_i). Для определенности полагаем $s^{(\nu)}(t_i) = \frac{1}{2}(s^{(\nu)}(t_i+0) + s^{(\nu)}(t_i-0))$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$, и $s^{(\nu)}(0) = s^{(\nu)}(0+0)$, $s^{(\nu)}(1) = s^{(\nu)}(1-0)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m$.

Для совокупности сплайнов дефекта 1 полагаем $S_m^1(\Delta_N) = S_m(\Delta_N)$. В случае $\Delta_N = \left\{\frac{i}{N}\right\}_0^N = \bar{\Delta}_N - S_m(\bar{\Delta}_N) = S_{N,m}$.

В этом обзоре существенное внимание уделяется 1-периодическим сплайнам, т. е. сплайнам из $S_m^k(\Delta_N)$, которые удовлетворяют условиям $s^{(\nu)}(0) = s^{(\nu)}(1)$, $\nu = 0, 1, \ldots, m-k$. В дальнейшем под $S_m^k(\Delta_N)$, $S_m(\Delta_N)$, $S_{N,m}$ подразумеваем соответствующую совокупность 1-периодических сплайнов.

Периодический сплайн $s(t) \in S_m^k(\Delta_N)$ единственным образом представим в виде

$$s(t) = \beta + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{k_i-1} \beta_{i,j} D_{m-j+1}(t - t_i), \tag{1}$$

где

$$\beta = \int_0^1 s(t)\,dt, \ \beta_{i,j} = s^{(m-j)}(t_i+0) - s^{(m-j)}(t_i-0), \ i = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$j = 0, 1, \ldots, k_i - 1, \ \beta_{1,0} + \beta_{2,0} + \ldots + \beta_{N,0} = 0, \ D_r(t) =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi t - \pi r/2)}{k^r}, \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что для $s(t) \in S_m^k(\Delta_N)$ $s^{(m)}(t)$ может изменить знак на периоде только четное число раз и, следовательно, количество точек разрыва у $s^{(m)}(t)$ — истинных узлов сплайна на периоде — четно.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: C — нормированное пространство непрерывных 1-периодических функций $f(t)$ с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$; L_p — нормированное пространство суммируемых на $[0, 1]$ в p-й степени функций с нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

а при $p = \infty$ измеримых, существенно ограниченных на $[0,1]$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{sup\,vrai}\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$; C^r — линейное пространство 1-периодических r раз непрерывно дифференцируемых на всей числовой прямой функций; W_p^r, $r = 1, 2, \ldots$; $1 \leqslant p \leqslant \infty$,— класс функций из C^{r-1}, у которых $f^{(r-1)}(t)$ абсолютно непрерывна на периоде и $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$; $W^r H^1(\Delta_{2n})$, $r = 1, 2, \ldots$,— класс функций из C^r, у которых на каждом промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ $|f^{(r)}(\tau') - f^{(r)}(\tau'')| \leqslant |\tau' - \tau''|$, $\tau', \tau'' \in [t_{i-1}, t_i]$; $W^r H^\omega$, $r = 0, 1, \ldots$,— класс функций из C^r, у которых модуль непрерывности

r-й производной не превышает заданного модуля непрерывности $\omega(t)$ $E(M, S_m(\Delta_N))_q$ — точное значение наилучшего приближения в метрике пространства L_q на классе функций M подпространством сплайнов.

Для $f \in L_1$ называем убывающей перестановкой функцию $r(f; a, b; t)$, обратную к функции $m(f, y) = \mathrm{mes}\{t \in [a, b] : |f(t)| > y\}$. В случае разрывной $m(f, y)$ ее график в точках разрыва следует дополнить для связности соответствующим отрезком, а на промежутке постоянства $[\alpha, \beta]$ оставить в графике одну точку $y = (\alpha + \beta)/2$.

Для заданного модуля непрерывности $\omega(t)$ будем рассматривать функции

$$f_{2n,0}(\omega, t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\omega\left(\dfrac{1}{2n} - 2t\right), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{4n}, \\ \dfrac{1}{2}\omega\left(2t - \dfrac{1}{2n}\right), & \dfrac{1}{4n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2n}, \end{cases}$$

$$f_{2n,0}(\omega, t) = -f_{2n,0}\left(\omega, t - \frac{1}{2n}\right), \quad \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant 1,$$

и

$$f_{2n,r}(\omega, t) = \int\limits_{\gamma_r}^{t} f_{2n,r-1}(\omega, \tau)\, d\tau, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

$\gamma_r = 0$ при r нечетном и $\gamma_r = \dfrac{1}{4n}$ при r четном.

Особое место в экстремальных задачах аппроксимации, как оказалось, играют так называемые идеальные (или совершенные) сплайны — это сплайны $s(t)$ из $S_m(\Delta_{2n})$, у которых $s^{(m)}(t) = (-1)^i \varepsilon, t_{i-1} < t < t_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, где $\varepsilon = 1$ (или $\varepsilon = -1$). Для $t_i = i/(2n)$ идеальный сплайн обозначаем традиционно как $\varphi_{2n,m}$. При этом (см., например, [20, с. 16])

$$\varphi_{2n,0}(t) = \mathrm{sign}\sin 2\pi nt,$$

$$\varphi_{2n,m}(t) = \frac{4}{\pi(2\pi n)^m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\pi(2\nu+1)nt - \pi m/2)}{(2\nu+1)^{m+1}}; \; m = 0, 1, 2 \ldots. \qquad (2)$$

Ясно, что при $\omega(t) = t$ $f_{2n,r}(\omega, t) = \varphi_{2n,r+1}(t)$. Заметим также, что $\|\varphi_{2n,r}\|_\infty = K_r/(2\pi n)^r$, где $K_r = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$, $r = 0, 1, 2, \ldots,$ — константа Фавара. В случае неравномерного разбиения Δ_N эффективного аналитического представления (2) для идеального сплайна нет.

Рассмотрим сначала вопрос о существовании идеального сплайна порядка m, который строится по заданным точкам $\{x_1, x_2, \ldots, x_L\} \subset [0, 1]$, $x_i < x_{i+1}$, и множествам I_k-индексов из $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, $k = 1, 2, \ldots, L$, имеет не более чем $2n$ узлов и $s^{(\nu)}(x_k) = 0$, $\nu \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots, L$. Естественно при этом считать, что $\sum\limits_{k=1}^{L} l(I_k) = 2n$, где $l(I_k)$ — число элементов в I_k. Предполагаем еще, что множества I_{k_j} содержит 0, $j = 1, 2, \ldots, p$, $p \geqslant 2$.

Рассмотрим векторное пространство R_1^{2n+1} элементов $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_{2n+1})$ с нормой $\|\xi\| = \sum\limits_{k=1}^{2n+1}|\xi_k|$ и в нем сферу $S^{2n} = \{\xi \in R_1^{2n+1} : \|\xi\| = 1\}$. Положим для $\xi \in R_1^{2n+1}$ $t_0 = 0$, $t_i = \sum\limits_{k=1}^{i}|\xi_k|$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$, и на $[0,1]$ зададим функцию

$$\varphi_0(\xi; t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \xi_i, & t_{i-1} < t < t_i, \text{ если } \xi_i \neq 0, \\ 0, & t = t_i, \quad i = 0, 1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_m(\xi; t) = \int_0^1 \varphi_0(\xi; t) D_m(t-\tau)\, d\tau$ и

$$\eta_0(\xi) = \int_0^1 \varphi_0(\xi; t)\, dt, \quad \eta_j(\xi) = \varphi_m(\xi; x_{k_{j+1}}) -$$

$$- \varphi_m(\xi; x_{k_j}), \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \tag{3}$$

$$\eta_{k,\nu_k}(\xi) = \varphi_m^{(\nu_k)}(\xi, x_k), \quad \nu_k \in I_k, \quad \nu_k \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, L. \tag{4}$$

Соотношения (3) и (4) задают $2n$-мерное векторное поле $\eta(\xi)$ на сфере S^{2n}, которое нечетно и непрерывно, и по теореме Борсука [21] существует вектор $\bar{\xi} \in S^{2n}$, для которого $\eta(\bar{\xi}) = 0$. Полагая

$$s(t) = \varphi_m(\bar{\xi}; t) - \varphi_m(\bar{\xi}; x_{k_1}),$$

получаем искомый идеальный сплайн $s(t)$. Приведенное здесь доказательство существования идеального сплайна $s(t)$ принадлежит В. И. Рубану (см. [22]). В частности, если на $[0, 1)$ заданы $2n$ точек $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = 1$, то существует единственный, с точностью до знака, 1-периодический идеальный сплайн $\varphi_m(\Delta_{2n}, t)$ порядка m с $2n$ узлами на периоде, имеющий простые нули в точках x_k, $k = 1, 2, \dots, 2n$, причем других нулей на $[0, 1)$ сплайн $\varphi_m(\Delta_{2n}, t)$ не имеет.

Нетрудно непосредственно убедиться в единственности такого сплайна и в указанном свойстве его нулей.

В 1971 г. Н. П. Корнейчук обращает внимание на возможность распространения на периодический случай некоторых результатов из [23] для получения эффективной оценки приближения интерполяционными сплайнами порядка r на классах W_∞^{r+1}. Первые результаты в этом направлении были получены в [24]. Следующая теорема, изложенная в [20], обобщает некоторые из соответствующих результатов работ [23, 24] (см. также [25, 26]).

Теорема 1. *Пусть $\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)$ — идеальный сплайн порядка $r+1$ по разбиению Δ_{2n}, имеющий на периоде $2n$ нулей $\tau_j : 0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{2n} < 1$. Тогда для любой $f(t) \in W^r H^1(\Delta_{2n})$ и для единственного сплайна $\sigma(f, t) \in S_r(\Delta_{2n})$, интерполирующего функцию f в точках τ_j, $\sigma(f, \tau_j) = f(\tau_j)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$, справедливы: неулучшаемое в каждой точке неравенство*

$$|f(t) - \sigma(f, t)| \leqslant |\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)|, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{5}$$

и соотношение

$$\sup_{f \in W^r H^1(\Delta_{2n})} \| f - \sigma(f) \|_q = \sup_{f \in W_\infty^{r+1}} \| f - \sigma(f) \|_q = \| \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}) \|_q, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{6}$$

Для доказательства этой теоремы Н. П. Корнейчук не пользуется интегральным представлением погрешности $f(t) - \sigma(f, t)$, а приводит (см. также [23]) следующее изящное рассуждение, базирующееся по существу только на применении теоремы Ролля.

Так, если $f \in W^r H^1(\Delta_{2n})$, то и $\delta(f, t) = f(t) - \sigma(f, t) \in W^r H^1(\Delta_{2n})$, причем $\delta(f, \tau_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, 2n$. Рассмотрим $r \geqslant 2$, так как при $r = 1$ соотношение (5) очевидно. Предположим, что для некоторой точки $\xi \in [0, 1)$, $\xi \neq \tau_i$ выполняется противоположное по сравнению с (5) соотношение. Пусть тогда λ $(0 < |\lambda| < 1)$ таково, что $\lambda\delta(f, \xi) = \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, \xi)$. Ясно, что функция $\Delta(t) = \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t) - \lambda\delta(f, t)$ имеет нули в точках $\xi, \tau_1, \dots \tau_{2n}$, т. е. $2n+1$ различных нулей на периоде. Рассмотрим $\Delta^{(r)}(t) = \varphi_{r+1}^{(r)}(\Delta_{2n}, t) - \lambda\delta^{(r)}(f, t)$, $t \neq t_i$, где t_i — узлы идеального сплайна $\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)$. Для $t_{i-1} < t' < t'' < t_i$

и поэтому
$$|\varphi_{r+1}^{(r)}(\Delta_{2n}, t') - \varphi_{r+1}^{(r)}(\Delta_{2n}, t'')| = |t' - t''|$$

$$|\lambda\delta^{(r)}(f, t') - \lambda\delta^{(r)}(f, t'')| \leqslant \lambda |t' - t''| < |t' - t''|,$$

т. е.
$$|\lambda\delta^{(r)}(f, t') - \lambda\delta^{(r)}(f, t'')| < |\varphi_{r+1}^{(r)}(\Delta_{2n}, t') - \varphi_{r+1}^{(r)}(\Delta_{2n}, t'')|.$$

Это означает, что функция $\Delta(t)$ может иметь на периоде не более чем $2n$ разделенных нулей. Полученное противоречие и доказывает (5). Соотношение (6) вытекает уже очевидным образом из (5), которое справедливо для любой функции $f \in W^r H^1(\Delta_{2n})$, и неулучшаемо на классе W_∞^{r+1}. Таким образом, если для приближения функций $f \in W_\infty^{r+1}$ использовать интерполяционный сплайн $\sigma(f, t) \in S_r(\Delta_{2n})$, то соотношение (5) указывает границы погрешности в каждой точке t; эти границы даются функциями $|\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)|$ и $-|\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)|$.

В случае, когда $\tau_k = \tau_{k,r} = \dfrac{k}{2n} - (1 + (-1)^r)/(8n)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, т. е. когда подпространство сплайнов — это подпространство $S_{2n,r}$ сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $t_k = \dfrac{k}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$ и $\varphi_{r+1}(\overline{\Delta}_{2n}, t) = \varphi_{2n,r+1}(t)$, для $f \in W^r H_{2n}^1$ и, в частности, для $f \in W_\infty^{r+1}$ имеем $|f(t) - \sigma_{2n,r}(f, t)| \leqslant |\varphi_{2n,r+1}(t)|$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, и

$$\sup_{f \in W_\infty^{r+1}} \|f - \sigma(f)\|_q = \sup_{f \in W^r H_{2n}^1} \|f - \sigma(f)\|_q = E(W_\infty^{r+1}, S_{2n,r})_q =$$

$$= \|\varphi_{2n,r+1}\|_q = \|\varphi_{1,r+1}\|_q (2n)^{-r}. \tag{7}$$

В случае неравномерного разбиения Δ_{2n} излагаемый ниже эффектный результат принадлежит Н. П. Корнейчуку [27] (см. также [28]).

Теорема 2. *Пусть $\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)$ — идеальный сплайн с нулями в точках t_i, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, разбиения Δ_{2n}, а $\sigma(f, t)$ — сплайн из $S_r(\Delta_{2n})$, интерполирующий функцию $f \in W_p^{r+1}$ в точках τ_j, $j = 1, 2, \ldots, 2n$. Тогда справедлива оценка $\|f - \sigma(f)\|_1 \leqslant \|\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)\|_{p'}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, неулучшаемая на классе W_p^{r+1} в случае, когда при $p > 1$ $|\varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)|^{p-1} \operatorname{sign} \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t) \perp 1$, а при $p = 1$ $\max \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t) = -\min \varphi_{r+1}(\Delta_{2n}, t)$.*

Для доказательства положим $\delta(f, t) = f(t) - \sigma(f, t)$ и рассмотрим

$$\|\delta(f)\|_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_{2n}} \delta(f, t) \operatorname{sign} \delta(f, t)\, dt = \sum_{j=1}^{2n} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \delta'(f, t)\, g(t)\, dt = -\int_{\tau_0}^{\tau_{2n}} \delta'(f, t)\, g(t) dt,$$

где $g(t) \in H^1(\Delta_{2n})$, и поскольку $\delta(f, \tau_j) = 0$, то можно считать, что $g(t) \perp 1$. Пусть $g_r(t)$ — r-й периодический интеграл от $g(t)$ и $s(g_r, t)$ — сплайн из $S_r(\Delta_{2n})$, удовлетворяющий интерполяционным условиям $s(g_r, t_i) = g_r(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Тогда

$$\|\delta(f)\|_1 = -\int_{\tau_0}^{\tau_{2n}} \delta'(f, t)\, \delta^{(r)}(g_r, t)\, dt = -\int_0^1 \delta'(f, t)\, \delta^{(r)}(g_r, t)\, dt =$$

$$= (-1)^r \int_0^1 \delta^{(r)}(f, t)\, \delta'(g_r, t)\, dt.$$

С учетом же того, что $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \delta'(g_r, t)\,dt = 0$, а $\sigma^{(r)}(f, t) = \mathrm{const}$ на (t_{i-1}, t_i), получаем

$$\|\delta(f)\|_1 = (-1)^r \int\limits_0^1 f^{(r)}(t)\,\delta'(g_r, t)\,dt = (-1)^{r+1)} \int\limits_0^1 f^{(r+1}(t)\,\delta(g_r, t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|f^{(r+1)}\|_p \|\delta(g_r)\|_{p'} \leqslant \|\varphi_{r+1}(\Delta_{2n})\|_{p'}.$$

В частном случае аппроксимации подпространством $S_{2n,r}$ Н. П. Корнейчук установил [27] равенства

$$\sup_{f \in W_p^{r+1}} \|f - \sigma(f)\|_1 = E(W_p^{r+1}, S_{2n,r})_1 = \|\varphi_{2n,r+1}\|_{p'}, \ 1 < p \leqslant \infty, \ p' = \frac{p}{p-1},$$

и

$$\sup_{f \in W_1^{r+1}} \|f - \sigma(f)\|_1 = E(W_1^{r+1}, S_{2n,r})_1 = \|\varphi_{2n,r+1}\|_C = \frac{K_{r+1}}{(2\pi n)^{r+1}}. \tag{8}$$

Весьма близкие по содержанию, хотя и не вполне эффективные, результаты, аналогичные изложенным, в случае аппроксимации интерполяционными сплайнами непериодических функций содержатся в [20].

Кроме указанных задач аппроксимации функции интерполяционным сплайном Н. П. Корнейчук обратил внимание ряда математиков на возможность хорошего приближения интерполяционным сплайном помимо интерполируемой функции одновременно и ее производных. Результаты из [29] показали, что в важных случаях погрешность $\|f^{(\nu)} - \sigma^{(\nu)}(f)\|_q$ имеет наилучший порядок. Получение же точных оценок оказалось весьма трудной задачей. В 1982—1983 гг. Н. П. Корнейчук опубликовал ряд окончательных результатов такого рода [30—32]. Им доказана, в частности, следующая теорема.

Теорема 3 [30]. *Справедливы равенства*

$$\sup_{f \in W^r H^1_{2n}} \|f' - \sigma'(f)\|_q = \sup_{f \in W_\infty^{r+1}} \|f' - \sigma'(f)\|_q = \|\varphi_{2n,r}\|_q = \|\varphi_{1,r}\|_q (2n)^{-r},$$

$$1 \leqslant q \leqslant \infty, \ r = 1, 2, \ldots.$$

Аналогичные равенства справедливы и в непериодическом случае (см. [20], § 5.1).

Н. П. Корнейчук, традиционно уделявший много внимания в своих исследованиях аппроксимации классов функций $W^r H^\omega$ тригонометрическими полиномами естественно, не оставил в стороне и вопрос об аппроксимации сплайнами функций из этих классов. Особенно впечатляющие результаты были им получены для наилучшей аппроксимации сплайнами классов $W^r H^\omega$.

Равенства (7), (8) показали, что интерполяционные сплайны реализуют точное значение наилучших приближений на классах W_∞^r в метриках пространств L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, и на классах W_p^r в метрике пространства L_1. Спрашивается, обладают ли интерполяционные сплайны или вообще некоторый линейный метод в подпространстве сплайнов таким же свойством на классе функций H^ω?

Например, уклонение сплайнов $\sigma(f, t) \in S_m(\Delta_N)$ от интерполируемых ими функций $f \in H^\omega$ в точках $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N = 1$ не может на классе H^ω при $\omega(\delta) \neq K\delta$ не превышать $E(H^\omega, S_{N,0})_p$, так как для функции $f(t) = \min\{\omega(|t - \tau_k|) : 1 \leqslant k \leqslant N\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, из H^ω $f(\tau_i) = 0$ и поэтому $\sigma(f, t) \equiv 0$. Следовательно,

$$\|f - \sigma(f)\|_p = \|f\|_p \geqslant \Big(2N \int\limits_0^{1/(2N)} \omega^p(t)\,dt\Big)^{1/p},$$

а правая часть при строго выпуклом $\omega(\delta)$ строго больше, чем

$$E(H^{\omega}, S_{N,0})_p = 2^{-1}\left(N\int_0^{1/N}\omega^p(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

Заметим, что для линейного метода, ставящего в соответствие функции $f \in C$ кусочно-постоянную функцию $s_0(f, t) \in S_0(\Delta_N)$, которая совпадает на каждом интервале (t_{i-1}, t_i) с

$$1/(t_i - t_{i-1})\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dt, \quad t_{i-1} < t \leqslant t_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

и $s_0(f, 0) = f(0)$, имеет место неулучшаемая [33] оценка

$$\int_0^1 |f(t) - s_0(f, t)|^p\,dt \leqslant 2^{-p}N\int_0^{1/N}\omega^p(f, t)\,dt, \quad 0 < p \leqslant 3.$$

Что касается интерполяционных ломаных по равномерному разбиению, то они при выпуклом вверх модуле непрерывности осуществляют наилучшее приближение не только функций $f \in W^1H^{\omega}$ в L_p, $p \geqslant 1$, но одновременно и их производных в L_p, $1 \leqslant p \leqslant 3$ [33] (отдельные случаи см. также в [34, 35]), а для функций $f \in H^{\omega}$ дают ту же погрешность, что и при интерполировании кусочно-постоянными функциями, и не доставляют на классе H^{ω} наилучшее приближение, если $\omega(\delta) \neq K\delta$ [36, 37].

Что касается классов W^rH^{ω} для $r \geqslant 2$, то, используя интегральное представление для погрешности $\delta(f, x)$ приближения интерполяционными сплайнами $\sigma_{2n,r}(f, x)$ по равномерному разбиению [24, 38, 39, 40]

$$\delta(f, x) = f(x) - \sigma_{2n,r}(f, x) = \int_0^1 K_r(x, t)\,f^{(r)}(t + \gamma_r)\,dt,$$

где

$$K_r(x, t) = D_r(x - t - \gamma_r) - \sum_{i=1}^{2n} l_i(x)\,D_r(\tau_i - t - \gamma_r),$$

а $l_i(x)$ — фундаментальные сплайны из $S_r(\overline{\Delta}_{2n}) = S_{2n,r}$, определяемые равенствами $l_i(\tau_j) = \delta_{i,j}$, $\tau_i = t_i - \gamma_r$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, $t_i = i/(2n)$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, $\gamma_r = 0$ при r нечетном и $\gamma_r = 1/(4n)$ при r четном, установлено [41 — 43] соотношение

$$E(W^rH^{\omega}, S_{2n,r})_C < \sup_{f\in W^rH^{\omega}}\|f - \sigma_{2n,r}(f)\|_C < \frac{3}{2}E(W^rH^{\omega}, S_{2n,r})_C.$$

Раньше [16, 44] были найдены точные значения $\sup\{\|f - \sigma_{2n,r}(f)\|_C,\ f \in W^rH^{\omega}\}$ соответственно для $r = 0$ и $r = 1$.

Иначе обстоит дело, если вместо равномерной метрики рассмотреть интегральную. Появление исключительно глубокого результата ([30] или [20], теорема 5.2.15), который мы приводим ниже, стало возможным благодаря разработанной Н. П. Корнейчуком теории Σ-перестановок.

Т е о р е м а 4. *Для любого выпуклого модуля непрерывности* $\omega(\delta)$ *и* $n, r = 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W^rH^{\omega}}\|f - \sigma_{2n,r}(f)\|_1 = E(W^rH^{\omega}, S_{2n,r})_1 = \|f_{2n,r}(\omega)\|_1.$$

Наряду с этим в [30] были получены соотношения

$$\sup_{f\in C^r}\frac{n^r\|f - \sigma_{2n,r}(f)\|_C}{\omega(f^{(r)}, 1/(2n))} > \sup_{f\in C^r}\frac{n^rE(f, S_{2n,r})_C}{\omega(f^{(r)}, 1/(2n))} = \frac{K_r}{2(2\pi)^r}, \quad r = 2, 3, \ldots,$$

и

$$\sup_{f\in C^r}\frac{n^r\|f-\sigma_{2n,r}(f)\|_1}{\omega(f^{(r)},1/(2n))}=\sup_{f\in C^r}\frac{n^rE(f,S_{2n,r})_1}{\omega(f^{(r)},1/(2n))}=\frac{2K_{r+1}}{(2\pi)^{r+1}}$$

и аналогичное последнему соотношение для непериодического случая.

К более ранним, чем изложенные, относятся результаты по аппроксимации функций интерполяционными эрмитовыми сплайнами. Что касается эрмитовых сплайнов, то в силу их свойства локальности ими можно приближать не обязательно периодические функции.

Подпространство $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$ эрмитовых сплайнов нечетного порядка $2n-1$ по разбиению Δ_N определяем как совокупность сплайнов, имеющих в каждом узле $t_i\in\Delta_N$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=1$, дефект n. Если для функции $f(t)\in C^{n-1}$ сплайн $s(f,t)\in S^n_{2n-1}(\Delta_N)$ таков, что

$$s^{(\nu)}(f,t_i)=f^{(\nu)}(t_i),\nu=0,1,\ldots,n-1;\quad i=0,1,\ldots,N, \tag{9}$$

то сплайн $s(f,t)$ называем интерполяционным.

Чтобы по функции $f\in C^n$ однозначно определить эрмитов сплайн четного порядка, требуются дополнительные (по сравнению с Δ_N) узлы дефекта 1. Определяем разбиение $\Delta^1{}_N=\{t_i,z_i\}_1^N$, где $z_i=(t_{i-1}+t_i)/2$, и подпространство $S^n_{2n}(\Delta^1_N)$ как множество сплайнов порядка $2n$, имеющих узлы дефекта n в точках t_i, $1\leqslant i\leqslant N-1$, и узлы дефекта 1 в точках z_i. Функции $f\in C^n$ сопоставим сплайн $s(f,t)\in S^n_{2n}(\Delta^1_N)$ такой, что $s^{(\nu)}(f,t_i)=$ $=f^{(\nu)}(t_i)$, $\nu=0,1,\ldots,n$; $i=0,1,\ldots,N$.

Положим

$$q_i(t)=\frac{((t-t_{i-1})(t_i-t))^n}{(2n)!},\quad i=1,2,\ldots,N,\quad q(t)=q_i(t),\quad t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i,$$
$$i=1,2,\ldots,N.$$

Пусть $f\in W^{2n}_\infty$ и $s(f,t)$ — сплайн из $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$, опредляемый условиями (9). Тогда

$$|f(t)-s(f,t)|\leqslant|q(t)|,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

и эта оценка неулучшаема на классе W^{2n}_∞ в каждой точке t.

Положим $h_i=t_i-t_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,N,h=\max\{h_i:1\leqslant i\leqslant N\}$. Подсчет нормы $\|q\|_p$ приводит к равенствам

$$\|q\|_C=\frac{h^{2n}}{(2n)!\,2^{2n}},\quad \|q\|_p=M_{n,p}\frac{1}{(2n)!}\Big(\sum_{i=1}^N h_i^{2np+1}\Big)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty, \tag{10}$$

где $M_{n,p}=(\Gamma^2(np+1)/\Gamma(2np+2))^{1/p}$, а $\Gamma(u)$ — гамма-функция.

Правые части в (10) принимают минимальное значение при $h_1=\ldots$ $\ldots=h_N=h$, т. е. при равномерном разбиении $\Delta_N=\overline{\Delta}_N$ для эрмитовых сплайнов $s(f,t)$ из $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$ справедливы соотношения

$$\sup_{f\in W^{2n}_\infty}\|f-s(f)\|_C=\frac{h^{2n}}{(2n)!\,2^{2n}}, \tag{11}$$

$$\sup_{f\in W^{2n}_\infty}\|f-s(f)\|_p=\frac{M_{n,p}}{(2n)!}\Big(\sum_{i=1}^N h_i^{2np+1}\Big)^{1/p},\quad 1\leqslant p<\infty, \tag{12}$$

полученные соответственно в [6] и [45].

В случае равномерного разбиения $\Delta_N=\overline{\Delta}_N$ правые части (11) и (12) принимают наименьшие значения, равные соответственно $1/((2n)!\,(2N)^{2n})$ и $M_{n,p}/((2n)!\,N^{2n})$.

Относительно приближения интерполяционными эрмитовыми сплайнами функций класса W^r_p в [45] доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для приближения интерполяционными эрмитовыми сплайнами* $s(f, t)$ *из* $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in W_1^{2n}} \| f - s(f) \|_1 = \frac{h^{2n}}{(2n)!2^{2n}}, \tag{13}$$

$$\sup_{f\in W_p^{2n}} \| f - s(f) \|_1 = \frac{M_{n,p'}}{(2n)!} \left(\sum_{i=1}^{N} h_i^{2np'+1} \right)^{1/p'}, \quad 1 < p \leqslant \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{14}$$

При фиксированном N величины (13) и (14) в случае равномерного разбиения принимают наименьшие значения, равные соответственно $1/((2n)! \times \times (2N)^{2n})$ и $M_{n,p'}/((2n)!\, N^{2n})$.

Рассмотрим теперь эрмитовы сплайны четного порядка. Сопоставляя функции $f(t) \in W_p^{2n+1}$ сплайн $s(f, t)$ из $S^n_{2n}(\Delta^1_N)$, однозначно определяемый интерполяционными условиями, получаем точные на классе оценки погрешности в метрике L_q в тех же случаях: 1) $p = \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$; 2) $1 \leqslant p \leqslant \leqslant \infty$, $q = 1$. Рассуждения проводятся по той же схеме, существенное отличие имеется только в выборе стандартных функций.

Пусть $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$,— заданные на $[0, 1]$ идеальные сплайны порядка $2n + 1$ с единственным узлом в точке $z_i = (t_{i-1} + t_i)/2$, определяемые (с точностью до знака) равенствами

$$\psi_i^{(\nu)}(t_{i-1}) = \psi_i^{(\nu)}(t_i) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Положим $\psi(t) = \psi_i(t), t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и пусть еще $\varphi(t)$ — идеальный сплайн на $[0, 1]$ порядка $2n+1$, у которого $\varphi^{(2n+1)}(t) = \psi_i^{(2n+1)}(t)$, $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $i = 1, \ldots, N$. Ясно, что $\varphi(t) \in W^{2n+1}_\infty$.

Теорема 6 [46]. *Если* $f(t) \in W^{2n+1}_\infty$ *и* $s(f, t)$ *— сплайн из* $S^n_{2n}(\Delta^1_N)$, *интерполирующий функцию* f, *то* $|f(t) - s(f, t)| \leqslant |\psi(t)|$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *и эта оценка неулучшаема на классе* W^{2n+1}_∞ *в каждой точке* t, *так как* $|\varphi(t) - s(\varphi, t)| = |\psi(t)|, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Отсюда получаем [46], что для приближения эрмитовыми сплайнами $s(f, t)$ из $S^n_{2n}(\Delta^1_N)$ справедливо соотношение

$$\sup_{f\in W_\infty^{2n+1}} \| f - s(f) \|_p = \| \psi \|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

в частности,

$$\sup_{f\in W_\infty^{2n+1}} \| f - s(f) \|_C = \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)(2n!!)^2 2^{2n+1}},$$

а также

$$\sup_{f\in W_p^{2n+1}} \| f - s(f) \|_1 = \| \psi \|_{p'}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

и, в частности,

$$\sup_{f\in W_\infty^{2n+1}} \| f - s(f) \|_1 = \sum_{k=1}^{N} h_k^{2n+2} (2^{2n+1}(2n+2)!)^{-1}, \quad h_k = t_k - t_{k-1}.$$

С использованием для $\delta(t) = f(t) - s(f, t)$ интегрального представления [45]

$$\delta(t) = \int_0^1 Q_{m,n}(t, u) f^{(m)}(u)\, du, \quad n \leqslant m \leqslant 2n,$$

где $Q_{m,n}(t, u) = \Phi_m(t, u) - s(\Phi_m(\cdot, u), t)$, а

$$\Phi_m(t,u)=\begin{cases}(t-u)^{m-1}/(2(m-1)!), & t_{i-1}\leqslant u\leqslant t,\\ -(t-u)^{m-1}/(2(m-1)!), & t<u\leqslant t_i,\\ 0, & u\notin[t_{i-1},t_i],\end{cases}$$

были получены [45] следующие теоремы.

Теорема 7. *Для погрешности приближения эрмитовыми сплайнами $s(f,t)$ из $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$ имеют место равенства*

$$\sup_{f\in W^{2n-1}_\infty}\max_{t\in[t_{i-1},t_i]}|f(t)-s(f,t)|=2\sup_{f\in W^{2n}_1}\max_{t\in[t_{i-1},t_i]}|f(t)-s(f,t)|=$$

$$=\frac{h_i^{2n-1}}{(2n-1)((2n-2)!!)^2 2^{2n-1}},\quad i=1,2,\ldots,N.$$

Теорема 8. *Если $f(t)\in C^{2n-1}$ и $s(f,t)$—эрмитов сплайн из $S^n_{2n-1}(\Delta_N)$, то*

$$\max_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i}|f(t)-s(f,t)|\leqslant\beta_{n,i}\Omega(f^{(2n-1)};t_{i-1},t_i),$$

где $\beta_{n,i}=(t_i-t_{i-1})^{2n-1}/((2n-1)((2n-2)!!)^2 2^{2n})$, а $\Omega(g;\alpha),\beta)$ — колебание функции $g(t)$ на (α,β). Оценка точная.

Точные оценки приближения эрмитовыми сплайнами в равномерной метрике на классах W^rH^ω, $r=1,2,3$, получены в [47].

Известно (см., например, [48]), что с точки зрения вычислительных удобств для интерполяционных сплайнов $s_m(f,t)$ порядка m дефекта 1 в качестве базиса предпочтительнее использовать так называемые B-сплайны, которые отличны от нуля лишь на определенном, зависящем от m, участке разбиения:

$$s_m(f,t)=\sum_{i=-m}^{N-1}b_iB_{m,i}(t).$$

И все же и в этом случае для определения коэффициентов $b_i=b_i(f)$ необходимо решать систему алгебраических уравнений, в которой задействованы значения $f(t)$ во всех точках интерполяции. Однако было обнаружено (см., например, [48]), что зависимость значения $s_m(f,t)$ в фиксированной точке t от значений интерполируемой функции $f(\tau_i)$ убывает с удалением τ_i от t. В связи с этим вполне естественным оказалось рассмотрение локальных сплайнов

$$\hat{s}_m(f,t)=\sum_{i=1}^{s}b_i(f)B_{m,i}(t),\quad 1\leqslant s\leqslant N,$$

в которых значения коэффициентов $b_i(f)$ есть линейные комбинации $f(\tau_i)$ лишь при τ_i, близких к t.

Пусть далее разбиение отрезка [0, 1] равномерное $t_i=i/N$, $i=0,1,\ldots$ $\ldots,N$, известны значения $f(t)$ в точках $\tau_j=j/N-[1+(-1)^m]/(4N)$, а B-сплайны $B_{m,i}(t)$ нормированы условиями $\max\limits_t B_{m,i}(t)=B_{m,i}(\tau_i)$, $\sum\limits_i B_{m,i}(t)\equiv 1$.

В простейшем случае, когда $b_i(f)=f(\tau_i)$, как известно, получаем линейный положительный оператор, который не может обеспечить порядок погрешности выше, чем $O(N^{-2})$(см., например, [49]). Однако, если положить $b_i(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}\gamma_k f(\tau_{i+k})$, $n=\left[\dfrac{m}{2}\right]$ и коэффициенты γ_k выбрать из условия $\hat{s}_m(P_m,t)\equiv P_m(t)$, где $P_m(t)$ — многочлен степени не выше m, то $\hat{s}_m(f,t)$ обеспечивает на классах W^{m+1}_∞ и W^m_∞ наилучший порядок погрешности. При этом для m значительно меньших, чем N, вычисление коэффициентов сплайна $\hat{s}_m(f, t)$ значительно проще, чем вычисление коэффициентов интерполяционного сплайна $s_m(f, t)$.

Аппроксимационные свойства локальных сплайнов минимального дефекта исследованы в [48, 50—53]. При этом в ряде случаев получены точные порядковые оценки погрешности приближения на тех или иных классах функций. Однако задача о нахождении точных констант оставалась нерешенной. В 1982 г. Н. П. Корнейчук опубликовал работу [54], в которой приводит ряд точных результатов в этом направлении.

Учитывая формулу Тейлора, а также выбор коэффициентов γ_k из условия точности сплайна $\hat{s}_m(f, t)$ на многочленах степени не выше m, погрешность приближения можно представить в виде

$$f(t) - \hat{s}_m(f, t) = \int_a^b K_m(t, u)\, f^{(m+1)}(u)\, du, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad f \in L_1^{m+1}[a, b],$$

где

$$K_m(t, u) = \frac{1}{m!}\left[(t-u)_+^m - \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k (\tau_{i+k} - u)_+^m B_{m,i}(t)\right].$$

С помощью обычных приемов получаем общее соотношение [54]

$$\sup_{f \in W_p^{m+1}[0,1]} \| f - \hat{s}_m(f) \|_{C[0,1]} = \max_t \| K_m(t, \cdot) \|_{L_{p'}[0,1]}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Приведем далее некоторые частные случаи.

1) $m = 3$. В этом случае $\tau_j = 1/N$, а коэффициенты γ_k, обеспечивающие точность на кубических многочленах имеют значения $\gamma_{-1} = \gamma_1 = -1/6$, $\gamma_0 = 4/3$. Вычисление максимума по t нормы $\| K_3(t, \cdot) \|_{p'}$ при $p' = 1, \infty$ приводит к следующим соотношениям:

$$\sup_{f \in W_\infty^4} \| f - \hat{s}_3(f) \|_{C[0,1]} = \frac{35}{1152} N^{-4}, \tag{15}$$

$$\sup_{f \in W_\infty^3} \| f - \hat{s}_3(f) \|_{C[0,1]} = 2 \sup_{f \in W_1^4} \| f - \hat{s}_3(f) \|_{C[0,1]} = \frac{185}{3456} N^{-3}.$$

2) $m = 2$. Тогда $\tau_j = (2j - 1)/N$, а коэффициенты γ_k, обеспечивающие точность на многочленах второй степени, имеют значения $\gamma_{-1} = \gamma_1 = -1/8$, $\gamma_0 = 5/4$. Точное вычисление $\| K_2(t, \cdot) \|_{p'}$ при $p' = 1$ и ∞ позволяет записать следующие равенства:

$$\sup_{f \in W_\infty^3} \| f - \hat{s}_2(f) \|_{C[0,1]} = 3/64 N^{-3}, \tag{16}$$

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \| f - \hat{s}_2(f) \|_{C[0,1]} = 4 \sup_{f \in W_1^3} \| f - \hat{s}_2(f) \|_{C[0,1]} = 9/32 N^{-2}.$$

Отметим, что константы 35/1152 в соотношении (15) и 3/64 в равенстве (16) ненамного хуже точных констант для наилучшего приближения соответствующим подпространством интерполяционных сплайнов минимального дефекта с периодическими краевыми условиями. Они равны соответственно 5/384 и 1/24.

Некоторые другие точные результаты по приближению локальными сплайнами минимального дефекта получены учениками Н. П. Корнейчука А. М. Авакяном [55] и А. Л. Хижей [56, 57].

Не имея возможности ввиду ограниченности объема данного обзора подробно остановиться на вопросах приближения обобщенными сплайнами (в том числе рациональными сплайнами) классов дифференцируемых функций и влияния свободных параметров, содержащихся в их аналитическом представлении, на погрешность аппроксимации, отметим лишь, что ряд законченных результатов в этом направлении содержится в работах [58—61].

2. Наилучшее приближение функций сплайнами. Соотношения двойственности [62] сводят одну задачу на экстремум теории приближений к другой, и в случае приближения сплайнами этот переход приводит к задаче на экстремум с областью определения более явной, чем у исходной задачи.

Будем использовать обозначения:

$$W_p^r[S_m(\Delta_{2n})] = \{g : g \in W_p^r, g^{(r)} \perp S_m(\Delta_{2n})\},$$

$$W_p^r(\Delta_{2n}) = \{g : g \in W_p^r, g(t_i) = 0, i = 0, 1, \ldots, 2n\}.$$

Заметим, что если $g(t) \in W_p^m(\Delta_{2n})$, то $g^{(k)} \perp S_{k-1}(\Delta_{2n})$, $k = 1, \ldots, m$, и, кроме того, имеют место следующие равенства:

$$W_p^r(\Delta_{2n}) = \{g : g \in W_p^r[S_{r-1}(\Delta_{2n})], \quad g(0) = 0\}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

и

$$\{g : g \in W_p^r[S_m(\Delta_{2n})], g \perp 1\} = \{\psi : \psi(t) = g^{(m-r+1)}(t), g \in W_p^{m+1}(\Delta_{2n})\}, \quad m \geqslant r.$$

Отметим некоторые, установленные Н. П. Корнейчуком в [63, 64], свойства функций введенных классов.

(i) Если $g(t) \in W_\infty^m(\Delta_{2n})$, то $|g(t)| \leqslant |\varphi_m(\Delta_{2n}, t)|$, где, как и ранее, $\varphi_m(\Delta_{2n}, t)$ — идеальный сплайн порядка m с нулями в точках Δ_{2n}.

$$(ii) \sup\{\|g\|_1 : g \in W_p^m(\overline{\Delta}_{2n})\} = \|\varphi_{2n,m}\|_{p'}, \quad m = 1, 2, \ldots; \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty;$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

(iii) Если $g(t) \in W_1^m(\overline{\Delta}_{2n})$, то $\|g^{(k)}\|_1 \leqslant \|\varphi_{2n,m}^{(k)}\|_C = K_{m-k}/(2\pi n)^{m-k}$.

Указанные свойства, а также соотношения двойственности позволили получить следующие равенства [65]:

$$E(W_p^r, S_{2n,m})_1 = \|\varphi_{2n,r}\|_{p'} = E(W_p^r, S_{2n,r-1})_1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{17}$$

$$E(W_\infty^r, S_{2n,m})_C = \|\varphi_{2n,r}\|_C = E(W_\infty^r, S_{2n,r-1})_C, \quad m \geqslant r - 1. \tag{18}$$

Кроме того, из указанных свойств Н. П. Корнейчуком были получены соотношения [66, 64]

$$E(f, S_{2n,m})_1 \leqslant \|\varphi_{2n,r}\|_{p'} E(f^{(r)}, S_{2n,m-r})_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

и

$$E(f, S_{2n,m})_C \leqslant \frac{K_r}{(2\pi n)^r} E(f^{(r)}, S_{2n,m-r})_\infty, \quad m \geqslant r \geqslant 1.$$

Оба неравенства точные.

Аналогичные результаты были получены Н. П. Корнейчуком в [67] и для оценок наилучшего приближения сплайнами на классах W_p в непериодическом случае.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов по наилучшему приближению классов функций $W^r H^\omega$ сплайнами, получение которых, в отличие от приведенных выше, является задачей несравненно более трудной. Так, уже задача наилучшего приближения класса H^ω в метрике L_p сплайнами из $S_0(\Delta_{2n})$, т. е. сплайнами нулевого порядка по фиксированному разбиению $\Delta_{2n}: 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{2n} = 1$ только при $p = \infty$, тривиальна

$$\sup_{f \in N^{\omega}} E(f, S_0(\Delta_{2n}))_{\infty} = \frac{1}{2}\,\omega(|\Delta_N|),$$

где $|\Delta_N| = \max\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leqslant i \leqslant 2n\}$. Далеко не тривиальной является такая задача при $1 \leqslant p < \infty$. Ее решение получено Н. П. Корнейчуком в [68]. При любом модуле непрерывности $\omega(\delta)$ для $f \in H^{\omega}$ справедлива оценка

$$E(f, S_0(\overline{\Delta}_{2n}))_p \leqslant \frac{1}{2}\left(2n\int_0^1 \omega^p(t)\,dt\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

являющаяся неулучшаемой для выпуклых вверх $\omega(\delta)$; причем знак равенства в последнем соотношении реализуется на функции $f_{2n,0}(\omega, t)$, а подпространство $S_0(\Delta_{2n})$ является экстремальным в задаче о поперечнике множества H^{ω} в метрике L_p.

Решение же задачи о точном значении наилучшего приближения сплайнами на классах $W^r H^{\omega}$ при $r \geqslant 1$ стало возможным, как уже отмечалось, лишь благодаря разработанной Н. П. Корнейчуком теории Σ-перестановок [19, 69].

Приведем здесь изестную лемму Н. П. Корнейчука, которая явилась истоком теории Σ-перестановок.

Л е м м а. *Пусть суммируемая на отрезке* $[\alpha, \beta]$ функция $\psi(t)$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) *интеграл* $\Psi(t) = \int_{\alpha}^{t} \psi(u)\,du$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *доопределенный нулем вне* $[\alpha, \beta]$, *есть функция строго монотонная на* $[\alpha, \alpha']$ *и* $[\beta', \beta]$ $(\alpha < \alpha' \leqslant \beta' < \beta)$, $\Psi(\beta) = 0$, *и если* $\alpha' < \beta'$, *то* $\Psi(t)$ *постоянна на отрезке* $[\alpha', \beta']$;

2) *на промежутках* (α, α') *и* (β', β) *функция* $\psi(t)$ *обращается в нуль разве что на множестве меры нуль.*

Тогда для $f(t) \in C[\alpha, \beta]$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{\alpha}^{\alpha'} |\psi(t)|\,\omega(f; \rho(t) - t)\,dt = \int_{\beta'}^{\beta} |\psi(t)|\,\omega(f, t - \rho^{-1}(t))\,dt,$$

где функция $\rho(t)$ *определена для* $\alpha \leqslant t \leqslant c = (\alpha' + \beta')/2$ *равенствами* $\Psi(t) = \Psi(\rho(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \alpha', \beta' \leqslant \rho(t) \leqslant \beta$, $\rho(t) = \alpha' + \beta' - t, \alpha' < t \leqslant c$, *а* $\rho^{-1}(t)$ — *функция, обратная* $\rho(t)$.

Если $\omega(\delta)$ — *выпуклый модуль непрерывности, то:*

а) *справедливы соотношения*

$$M_{\omega}(\psi) = \sup_{f \in H^{\omega}[\alpha,\beta]} \left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) f(t)\,dt\right| = \int_{\alpha}^{\alpha'} |\psi(t)|\,\omega(\rho(t) - t)\,dt =$$

$$= \int_{\beta'}^{\beta} |\psi(t)|\,\omega(t - \rho^{-1}(t))\,dt, \tag{19}$$

причем верхнюю грань в (19) *реализуют функции из* $H^{\omega}[\alpha, \beta]$ *вида* $K \pm \pm f_0(t)$, *где* K — *произвольная постоянная и*

$$f_0(t) = \begin{cases} -\int_t^c \omega'(\rho(t) - t)\,dt, & \alpha \leqslant t \leqslant c, \\ \int_c^t \omega'(t - \rho^{-1}(t))\,dt, & c \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases}$$

так что $M_{\omega}(\psi) = \left|\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) f_0(t)\,dt\right|$;

б) величина $M_\omega(\psi)$ *может быть записана в виде* $M_\omega(\psi) = \int\limits_0^{\beta-\alpha} r(\Psi, t)\,\omega'(t)\,dt$, *где* $r(\Psi, t)$ — *убывающая перестановка функции* $\Psi(t)$ *на* $[\alpha, \beta]$.

Важную роль в решении указанных выше задач играет базирующаяся на лемме следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть* $\omega(\delta)$ — *выпуклый модуль непрерывности, а функция* $g(t)$ *имеет на* $[a, b]$ *ограниченное изменение и* $g(t) \perp 1$. *Тогда*

$$\sup_{f \in H^\omega[a,b]} \left| \int\limits_\alpha^\beta g(t) f(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_0^{b-a} R(G; a, b; t)\,\omega'(t)\,dt, \tag{20}$$

где $R(\varphi; \alpha, \beta; t)$ — $\sum$*-перестановка* (*см.* [20, *с.* 164—166]) *функции* φ *на промежутке* $[\alpha, \beta]$, *а*

$$G(t) = \int\limits_a^t g(u)\,du, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{21}$$

Если $[a, b] = [0, 1]$ *и* $g(t)$ *продолжена с периодом 1 на всю ось, то*

$$\sup_{f \in H^\omega} \left| \int\limits_0^1 g(t) f(t)\,dt \right| \leqslant \min_c \int\limits_0^1 R(G_c, t)\,\omega'(t)\,dt, \tag{22}$$

где

$$G_c(t) = \int\limits_c^t g(u)\,du. \tag{23}$$

Доказательство. Для функции $G(t)$ справедливо Σ-представление (см. [69], гл. 6) $G(t) = \sum\limits_k \varphi_k(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, через простые функции $\varphi_k(t)$, причем почти всюду на $[a, b]$ $g(t) = G'(t) = \sum\limits_k \varphi_k'(t)$. Но тогда для любой функции $f(t) \in C[a, b]$

$$\int\limits_a^b g(t) f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t) \Big(\sum_k \varphi_k'(t)\Big)\,dt = \sum_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \varphi_k'(t) f(t)\,dt, \tag{24}$$

где $[\alpha_k, \beta_k]$ — носитель функции $\varphi_k(t)$. Через $[\alpha_k', \beta_k']$, как и выше, обозначаем отрезок (он может выродиться и в точку), на котором $|\varphi_k(t)|$ принимает максимальное значение. Применив на отрезке $[\alpha_k, \beta_k]$ лемму, получим в предположении, что $f(t) \in H^\omega[a, b]$ и $\omega(\delta)$ — выпуклый модуль непрерывности,

$$\left| \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \varphi_k'(t) f(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_0^{\beta_k - \alpha_k} r(\varphi_k, t)\,\omega'(t)\,dt = \int\limits_0^{b-a} r(\varphi_k, t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Подставляя эту оценку в (24), для любой функции $f(t) \in H^\omega$ будем иметь

$$\left| \int\limits_a^b g(t) f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_k \int\limits_0^{b-a} r(\varphi_k, t)\,\omega'(t)\,dt = \int\limits_0^{b-a} R(G; a, b; t)\,\omega'(t)\,dt.$$

Этим соотношение (20) доказано. Доказательство периодического варианта (22) практически ничем на отличается; надо только при фиксированном c исходить из Σ-представления функции (23):

$$G_c(t) = \sum_k \varphi_k(t), \quad c \leqslant t \leqslant c + 1,$$

которое возможно в силу того, что $G_c(c) = G_c(c+1) = 0$. Теорема 9 доказана.

Воспользовавшись далее соотношением

$$E(f, S_m(\Delta_{2n}))_q = \sup\left\{\int_0^1 f^{(r)}(t)\, g(t)\, dt : g \in W_q^r[S_m(\Delta_{2n})],\ g \perp 1\right\}$$

для $f(t) \in W^r H^\omega$ и равномерного разбиения $\overline{\Delta}_{2n}$, получим

$$E(f, S_m(\Delta_{2n}))_q \leqslant \sup\left\{\int_0^1 R(\psi^{(m-r)}, t)\, \omega'(t)\, dt : \psi \in W_{q'}^{m+1}(\Delta_{2n})\right\}, \quad m \geqslant r. \quad (25)$$

Теперь на основании изложенных результатов можно точно оценить [41, 63] интеграл в правой части неравенства (25).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 10. *Каков бы ни был выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *для всех* $m \geqslant r$ *имеют место соотношения*

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m})_C = \| f_{2n,r} \|_C = \frac{1}{(2n)^{r+1}} \int_0^1 R_{1,r}(t)\, \omega'\left(\frac{t}{2n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2(2n)^r} \int_0^1 R_{1,r-1}(1-t)\, \omega\left(\frac{t}{2n}\right) dt, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad r = 1, 2, \ldots,$$

где $R_{a,m}(t)$ — стандартная Σ-перестановка [20, с. 167].

Доказательство. Пусть в (25) $q' = 1$ и $\psi \in W_1^{m+1}(\overline{\Delta}_{2n})$. Тогда $\left(g_{N,m}(t) = \frac{1}{2N}\varphi_{N,m}(t)\right)$

$$\| \psi^{(k)} \|_1 \leqslant \| \varphi_{2n,m+1}^{(k)} \|_C = \frac{1}{4n} \| \varphi_{2n,m+1}^{(k+1)} \|_1 = \| g_{2n,m+1}^{(k+1)} \|_1 = \| g_{(2n),m-k} \|_1.$$

Поэтому, если $g(t) = \psi^{(m-r)}(t)$, то

$$\| g \|_1 = \| \psi^{(m-r)} \|_1 \leqslant \| g_{2n,r} \|_1 = \| R(g_{2n,r}) \|_1 = \| R_{1/2n,r} \|_1.$$

Так как $g^{(r+1)}(t) = \psi^{(m+1)}(t)$ и, следовательно, $\| g^{(r+1)} \|_1 = \| \psi^{(m+1)} \|_1 \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 R(\psi^{(m-r)}, t)\, \omega'(t)\, dt \leqslant \int_0^1 R_{1/(2n),r}\, \omega'(t)\, dt. \quad (26)$$

Используя в (25) при $q = \infty$ оценку (26), находим, что для любой функции $f(t) \in W^r H^\omega$ при $m \geqslant r$

$$E(f, S_{2n,m})_C \leqslant \int_0^{1/2n} R_{1/(2n),r}(t)\, \omega'(t)\, dt = \frac{1}{(2n)^{r+1}} \int_0^1 R_{1,r}(t)\, \omega'\left(\frac{t}{2n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2(2n)^r} \int_0^1 R_{1,r-1}(1-t)\, \omega\left(\frac{t}{2n}\right) dt. \quad (27)$$

Со знаком равенства (27) выполняется для одной из функций $f_{2n,r}(\omega, t)$ или $f_{2n,r}(\omega, t + 1/(4n))$ в зависимости от четности или нечетности m и r.

Теорема 11. *Каков бы ни был выпуклый модуль непрерывности* $\omega(\delta)$, *для всех* $m \geqslant r$ *справедливы соотношения*

$$E(W^r H^\omega, S_{2n,m})_1 = \| f_{2n,r}(\omega) \|_1 = \frac{2}{(2n)^{r+1}} \int_0^1 R_{1,r+1}(t)\, \omega'\left(\frac{t}{2n}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{(2n)^r} \int\limits_0^1 R_{1,r}(1-t)\,\omega\left(\frac{t}{2n}\right) dt, \quad r = 0, 1, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. Будем оценивать правую часть (25) при $q' = \infty$. Если $\psi(t) \in W_\infty^{m+1}(\overline{\Delta}_{2n})$, то

$$\| \psi^{(k)} \|_p \leqslant \| \varphi_{2n,m+1}^{(k)} \|_p \quad k = 0, 1, \ldots, m; \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Поэтому, положив $g(t) = \psi^{(m-r)}(t)$, будем иметь $\| g \|_p = \| \psi^{(m-r)} \|_p \leqslant \| \varphi_{2n,r+1} \|_p$, причем $g \in W_\infty^{r+1}$, так что

$$\int\limits_0^1 R(\psi^{(m-r)}, t)\,\omega'(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^1 R(\varphi_{2n,r+1}, t)\,\omega'(t)\,dt. \tag{28}$$

Используя оценку (28) в (25) при $q = 1$, находим, что для любой функции $f(t) \in W^r H^\omega$ в предположении выпуклости вверх $\omega(\delta)$ при всех $m \geqslant r$ справедлива оценка

$$E(f, S_{2n,m})_1 \leqslant \int\limits_0^{1/(2n)} R(\varphi_{2n,r+1}, t)\,\omega'(t)\,dt.$$

В заключение этого пункта отметим, что в [70—72] получены точные значения наилучших односторонних приближений сплайнами порядка $m \geqslant r-1$ на классах W_p^r, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в интегральной метрике и на классах $W^{2r}H^\omega$ в интегральной метрике сплайнами порядка $2r$, где окончательный результат получен в недостаточно явном виде.

3. Связь между полиномиальной и сплайн-аппроксимацией. Здесь удобно будет рассматривать подпространства 2π-периодических сплайнов $S_{n,m}$ дефекта 1 с равноотстоящими узлами $t_i = 2\pi i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, хотя все излагаемые ниже основные результаты получены для сплайнов произвольного дефекта $k \leqslant [(m+1)/2]$ и произвольных разбиений в [25, 73—75] — для интерполяционных сплайнов, а в [76] для произвольных линейных методов, наилучших и наилучших с ограничениями методов приближения сплайнами. Кроме того, будем рассматривать подпространства F_n и $\overline{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)\, a_{n/2} \cos(n/2)\,x$$

и соответственно $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

Подпространства $S_{n,m}$ и F_n имеют размерность n.

Пусть M_n — одно из введенных подпространств и Z — нормированное пространство L_p или C. Для $f \in Z$ положим

$$E_1(f, M_n) = \inf_{\tilde\varphi \in M_n} \| f - \tilde\varphi \|_Z = \| f - \tilde\varphi_{1,Z}(f) \|_Z, \quad \tilde\varphi_{1,Z}(f, x) = \tilde\varphi_1(f, x) \in M_n$$

— наилучшее приближение функции f подпространством M_n и

$$E_2(f, M_n)_Z = \inf\{ \| f - \tilde\varphi \| : \tilde\varphi \in M_n, \tilde\varphi \leqslant f \} = \| f(x) - \tilde\varphi_{2,Z}(f, x) \|_Z,$$

$$\tilde\varphi_{2,Z}(f, x) = \tilde\varphi_2(f, x) \in M_n, \quad \tilde\varphi_2(f, x) \leqslant f(x),$$

— наилучшее односторонее приближение подпространством M_n.

Пусть далее φ_k — линейные функционалы на Z, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и

$$\tilde\varphi_3(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(f)\, e_k(x), \quad e_k \in M_n, \quad \varphi_k(e_i) = \delta_{k,i}.$$

Здесь и в дальнейшем $\{\varphi_k\}_0^{n-1}$ таковы, что их сужение на M_n образует линейно независимую систему функционалов.

Ясно, что отображениями $f \to \tilde{\varphi}_3(f, x)$ при различных $\{\varphi_k\}_0^{n-1}$ определяются линейные методы приближения.

Для $f \in \mathfrak{M}^s$, где $\mathfrak{M}^s$ — некоторое множество из C^s, причем $\mathfrak{M}^s \not\subset C^{s+1}$, положим

$$E_i^\nu(f, M_n)_Z = \| f^{(\nu)}(x) - \tilde{\varphi}_i^{(\nu)}(f, x) \|_Z, \quad i = 1, 2, 3,$$

где при $i = 1, 2$, $\tilde{\varphi}_i(f, x) = \tilde{\varphi}_{i,Z}(f, x)$ и

$$E_i^\nu(\mathfrak{M}^s, M_n)_Z = \sup_{f \in \mathfrak{M}^s} E_i^\nu(f, M_n)_Z, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant s, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (E_i^0 = E_i).$$

В случае, когда M_n есть одно из подпространств сплайнов, будем вместо $\tilde{\varphi}_{i,Z}(f, x)$ $(\tilde{\varphi}_i(f, x))$ писать $s_{m,i}(f, x)_Z$ $(s_{m,i}(f, x))$, а если M_n — подпространство тригонометрических полиномов, то — $T_i(f, x)_Z$ $(T_i(f, x))$.

В работах [73, 25, 74] показано, что для $\varphi_k(f) = f(t_k)$ $f \in C^r$, равномерно по x $\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,3}^{(\nu)}(f, x) = T_3^{(\nu)}(f, x)$, при этом, если n нечетно, то $T_3(f, x)$ — единственный полином из F_n, удовлетворяющий условиям $T_3(f, t_k) = f(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, а если n четно, то $T_3(f, x)$ — тот из полиномов подпространства $\bar{F}_n$, для которого $a_{[n/2]}^2 + b_{[n/2]}^2$ минимально. Пусть, для определенности, n нечетно.

В [25] показано, что для интерполяционных сплайнов произвольного дефекта $\| T_3^{(\nu)}(f, x) - s_{m,3}^{(\nu)}(f, x) \| \leqslant K((n-1)/(n+1))^{m/2}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, и константа K от m не зависит, причем, как указано в [75, 76], для рассматриваемого подпространства сплайнов левая часть последнего неравенства не превышает $K((n-1)/(n+1))^m$.

Положим $\alpha = (n-1)/(n+1)$. В работах [75, 76] было установлено, что при $m \to \infty$ равномерно по x для $i = 1, 2, 3$ и $f \in Z$ $\lim\limits_{m\to\infty} s_{m,i}^{(\nu)}(f, x)_Z = T_i^{(\nu)}(f, x)_Z$, $\| T_i^{(\nu)}(f, x) - s_{m,i}^{(\nu)}(f, x) \|_C \leqslant K\alpha^m$ и $| E_i^\nu(f, F_n)_Z - E_i^\nu(f, S_{n,m})_Z | \leqslant K\alpha^m$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, а константы K в приведенных соотношениях от m не зависят.

Рассмотрим сначала произвольные линейные методы в подпространстве сплайнов $S_{n,m}$. Роль базисных элементов $e_k \in S_{n,m}$ будут выполнять фундаментальные сплайны $l_{k,m}(x)$. Равномерность разбиения позволяет утверждать, что $l_{k,m}(x) = l_{0,m}(x - t_k)$. Фундаментальный сплайн $l_{m,0} = l_m$ удовлетворяет интерполяционным условиям $l_m(t_0^*) = 1$, $l_m(t_k^*) = 0$, $t_k^* = t_k + \beta$, $\beta = \dfrac{1 + (-1)^m}{2n}\pi$. Представление (1) с этими интерполяционными условиями приводит к линейной алгебраической системе уравнений. Решение этой системы рассмотрено в [40] (случай четного m см. также в [24]) и из полученных там соотношений вытекает равенство [76]

$$l_m(x) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq qn}}^{\infty} \frac{1}{c_{m,\bar{k}}} \frac{\cos(kx - \bar{k}\beta)}{k^{m+1}}, \quad \bar{k} = k \,(\mathrm{mod}\, n),$$

$$c_{m,j} = (-1)^{m+1} A_{m,j}, \quad A_{m,j} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(m+1)}}{(\nu n - j)^{m+1}},$$

из которого в пределе при $m \to \infty$ (при этом m принимает либо только четные, либо только нечетные значения) получаем

$$\lim_{m\to\infty} l_m(x) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{p} \cos k(x-\beta), \quad n = 2p+1, \\ \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \cos k(x-\beta) + \dfrac{1}{n} \cos p(x-\beta), \quad n = 2p \end{array} \right\} = \tau_0(x),$$

а также $\lim\limits_{m\to\infty} l_m^{(\nu)}(x) = \tau_0^{(\nu)}(x)$, где $\tau_0 \in F_n$ и удовлетворяет интерполяционным условиям $\tau_0(t_0^*) = 1, \tau_0(t_k^*) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. $\tau_0(x)$ и $\tau_k(x) = \tau_0(x - t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ — система фундаментальных тригонометрических полиномов в подпространстве F_n. При этом имеет место оценка $\| l_m(x) - \tau_0(x) \| \leqslant K\alpha^m$.

Рассмотрим далее $\{\sigma_{m,i}\}_0^{n-1} \subset S_{n,m}$ и $\{\theta_i\}_0^{n-1} \subset F_n$ — соответственно системы сплайнов и тригонометрических полиномов, биортогональные системе функционалов $\{\varphi_k\}_0^{n-1}$, и выражая функции $\sigma_{m,i}$ и θ_i через фундаментальные сплайны $l_{m,\nu}$ и полиномы τ_ν соответственно для определения коэффициентов $\sigma_{m,i}(t_\nu)$ и $\theta_i(t_\nu)$, приходим к n линейным алгебраическим системам, каждая из которых при фиксированном $i = 0, 1, \ldots, n-1$ имеет следующий вид:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sigma_{m,i}(t_\nu)\, a_{\nu,k}^m = \delta_{i,k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{29}$$

и

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \theta_i(t_\nu)\, a_{\nu,k} = \delta_{i,k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{30}$$

где

$$a_{\nu,k}^m = \varphi_k(l_{m,\nu}), \quad a_{\nu,k} = \varphi_k(\tau_\nu).$$

Рассмотрим конкретную систему, состоящую из n функционалов

$$\varphi_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt, \quad \varphi_{2i-1}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos itdt,\ i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$
$$\varphi_{2i}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin itdt, \quad i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right], \quad f \in Z. \tag{31}$$

Этой системе функционалов в F_n отвечают суммы Фурье $T_3(f, x)$, которые будем обозначать через $S_n(f, x)$. Система функционалов (31) на $S_{n,m}$ является линейно независимой. Будем обозначать в этом случае $s_{m,3}(f, x)$ через $\tilde{s}_m(f, x)$. Наряду с суммами Фурье по системе сплайнов можно рассматривать, например, суммы Фейера или вообще какой-либо аналог соответствующего линейного метода по тригонометрической системе и в каждом случае получить признаки сходимости, оценки коэффициентов Фурье, оценки погрешности приближения различными линейными методами и т. д. для линейных методов по системе сплайнов, являющихся аналогами соответствующих результатов для линейных методов по тригонометрической системе. Так, если функция $f \in L_p$, $p > 1$, то частичные суммы $\tilde{s}_{m_n}(f, x)$ ряда Фурье функции f по системе сплайнов почти всюду сходятся к функции f, если только m_n возрастает не медленнее, чем $n \ln n$. Действительно, для $f \in L_p$ имеем $| f(x) - \tilde{s}_{m_n}(f, x) | \leqslant | f(x) - S_n(f, x) | + | S_n(f, x) - \tilde{s}_{m_n}(f, x) |$. Первое слагаемое в правой части этого неравенства почти всюду стремится к нулю на основании известных результатов Карлесона и Ханта (см., например, [77, 78]). Второе слагаемое равномерно стремится к нулю, так как $|\tilde{s}_{m_n}(f, x) - S_n(f, x)| \leqslant Kn((n-1)/(n+1))^m$, где K от m и n не зависит, а последовательность m_n возрастает не медленнее, чем $n \ln n$.

Еще один пример. В работах [44, 79] получены асимптотически точные оценки приближения функции f интерполяционными сплайнами из $S_{n,m}$. Из этих оценок получаем

$$\sup_{f \in C^1} \frac{E_3^0(f, F_n)_e}{\omega\left(f', \dfrac{3\pi}{n}\right)} = \frac{K_n}{n} \ln n + (1 + (-1)^n)\, o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

где

$$K_n = \frac{\pi^2}{n \ln n}\left(1 - (-1)^k \frac{1 + (-1)^n}{4} + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sec \frac{\pi j}{n} - \right.$$

$$\left. - (-1)^k (1 + (-1)^n) \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \frac{1 - \cos j\pi/n}{(\cos j\pi/n) \sin^2 j\pi/n}\right), \quad k = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Заметим, что при n нечетном $1/\pi < K_n < 2\pi^2$.

Перейдем теперь к рассмотрению наилучшего и наилучшего одностороннего методов приближения.

Рассмотрим для $f \in Z$ сплайны $S_{m,i}(f, x)_Z = S_{m,i}(f, x)$, $i = 1, 2$. Ясно, что $\| S_{m,i}(f, x)\|_Z \leqslant 2 \| f \|_Z$, $m = 1, 2, \ldots$.

В [76] доказано соотношение

$$| S_{m,i}^{(j)}(f, x)| \leqslant K \| f \|_Z, \ m \geqslant 1, \qquad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{32}$$

в котором константа K не зависит от f и m.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Для $f \in Z$ и $i = 1, 2$ равномерно по x*

$$\lim_{m \to \infty} S_{m,i}^{(j)}(f, x) = T_i^{(j)}(f, x), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{33}$$

Как следствие получаем, что для $f \in Z$ справедливо неравенство

$$| E_i(f, S_{n,m})_Z - E_i(f, F_n)_Z | \leqslant K\alpha^m. \tag{34}$$

Полученные результаты позволяют для широкого круга вопросов, касающихся приближения подпространствами $S_{n,m}$ и F_n, в одних случаях указать новые, как правило, простые доказательства известных фактов, а в других — получить новые результаты.

Предварительно заметим, что имеет место следующая лемма [76].

Лемма. *Если множество $\mathfrak{M}$ функций из пространства Z таково, что наряду с функцией $f(x)$ множество $\mathfrak{M}$ содержит и функцию $f(x + \lambda)$, λ — любое действительное число, то $E_1(\mathfrak{M}, F_n)_Z = E_1(\mathfrak{M}, F_{n+1})_Z$, где n нечетно.*

Запишем теперь равенство (18) в виде

$$E_1(W_\infty^r, S_{2n,m})_C = E_1(W_\infty^r, S_{2n,r-1})_C = K_r/n^r, \quad m > r,$$

откуда в силу соотношения (34) получаем точное значение для $E_1(W_\infty^r, F_{2n})$, которое в силу леммы совпадает с величиной $E_1(W_\infty^r, F_{2n+1})_C$, найденной в [80]: $E_1(W_\infty^r, F_{2n+1})_C = K_r/n^r$.

Далее, точно также, исходя из (17) имеем $E_1(W_p^r, S_{2n,m})_{L_1} = \dfrac{\| \varphi_{n,r} \|_{p'}}{n^r}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $m > r$, и в пределе при $m \to \infty$ получаем точное значение для $E_1(W_p^r, F_{2n})_{L_1}$, которое в силу леммы совпадает с $E_1(W_p^r, F_{2n+1})_{L_1}$. Точное значение для $E_1(W_p^r, F_{2n+1})_{L_1}$ найдено при $p = 1$ в [70], а при $p > 1$ — в [81].

Исключение составляют соответствующие результаты для классов W^rH^ω. Так, хотя в пределе при $m \to \infty$ из $E_1(W^rH^\omega, S_{2n,m})_{L_p}$, $p = 1, \infty$ и получается точное значение величины $E_1(W^rH^\omega, F_{2n})_{L_p}$, совпадающее в силу леммы с $E_1(W^rH^\omega, F_{2n+1})_{L_p}$, тем не менее при получении точных результатов для $E_1(W^rH^\omega, S_{2n,m})_{L_p}$, как мы убедились в п. 2, в полной мере использовался метод Σ-перестановок.

Что касается наилучших односторонних приближений, то в силу (34) точные оценки для $E_2(\mathfrak{M}, F_n)_Z$ получаются в пределе из $E_2(\mathfrak{M}, S_{n,m})_Z$ при $m \to \infty$ из соответствующих точных оценок. Обзор соответствующих результатов см. в [82].

Отметим также, что все результаты по порядковым оценкам различных способов приближения функций тригонометрическими полиномами, а также ряд неравенств типа неравенств С. Н. Бернштейна, Ж. Фавара, С. Б. Стечкина — Сунь Юн-шена и т. д. получаются в пределе при $m \to \infty$ из соответствующих результатов для приближения функций сплайнами.

Соотношение (34) дает возможность получить ряд новых результатов. Например, справедлива теорема.

Теорема 13. *Предположим, что для функции f при некотором $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < \beta \leqslant 1$*

$$E_1(f, S_{n,m_n})_C = O(n^{-k-\beta}), \quad n \to \infty, \tag{35}$$

где m_n возрастает быстрее, чем $n \ln n$. Тогда f имеет k непрерывных производных. Если $\beta < 1$, то $\omega(f^{(k)}, t) = O(t^\beta)$. Если $\beta = 1$, то $\omega(f^{(k)}, t) = O(t \ln t)$.

4. Сплайн-аппроксимация кривых. Поскольку полиномиальные сплайны и их обобщения обладают весьма хорошими аппроксимационными свойствами и удобны с точки зрения реализации полученных на их основе алгоритмов на ЭВМ, они все более широко применяются при решении практических задач, связанных с аппроксимацией, восстановлением или сглаживанием кривых и поверхностей.

С помощью рассмотренных в предыдущих пунктах сплайнов одной переменной можно приближать лишь такие плоские кривые, которые в выбранной системе координат (не обязательно декартовой) описываются функциональной зависимостью вида $y = f(x)$. Однако подобным образом кривые зачастую не могут быть представлены или же такое представление имеет довольно сложный аналитический вид. Более универсальным способом является параметрическое задание их координат в виде функций $x_k = \varphi_k(t)$, $k = 1, 2$, некоторого параметра t или векторное представление.

Для параметрически заданных кривых экстремальные задачи аппроксимационного характера исследованы в значительно меньшей степени, чем для явно задаваемых функций (см., например, [48, 83, 84]). Поэтому Н. П. Корнейчук неоднократно обращал внимание на исследование этого круга задач. В этом направлении им и его учениками опубликованы работы [85—99], результаты которых в ряде случаев имеют законченный характер.

Остановимся кратко лишь на некоторых из них. Пусть R^m — пространство векторнозначных функций $\bar{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $a \leqslant t \leqslant b$, $m \geqslant 2$, о графиках которых будем говорить как о параметрически заданных кривых в этом пространстве.

Если $e(P, Q)$ — евклидово расстояние между точками P и Q пространства R^m, то расстояние между $\bar{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \ldots \varphi_m(t)\}$ и $\bar{\psi}(t) = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t)\}$ можно определить следующим образом:

$$\varepsilon(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \{e(P(t), Q(t) : P(t) \in \bar{\varphi}, \quad Q(t) \in \bar{\psi}\},$$

где точки $P(t)$ и $Q(t)$ соответствуют одному и тому же значению параметра t.

Очевидно, что это расстояние зависит от способа параметризации и не всегда в полной мере отражает степень геометрической близости кривых. Лишено этих недостатков хаусдорфово расстояние. Напомним (см., например, [84]), что хаусдорфовым расстоянием между множествами A и $B \subset R^m$ называют величину

$$h(A, B) = \max\{\sup_{P\in A}\inf_{Q\in B} e(P, Q),\ \sup_{Q\in B}\inf_{P\in A} e(P, Q)\},$$

где $e(P, Q)$, — как и выше, евклидово расстояние между точками P и Q в R^m.

Нетрудно заметить, что для кривых $\bar\varphi$ и $\bar\psi$ при любом способе параметризации $h(\bar\varphi, \bar\psi) \leqslant \varepsilon(\bar\varphi, \bar\psi)$.

Обозначим через $\bar H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ совокупность непрерывных кривых $\bar\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, у которых $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, 1]$, $i = 1, \ldots, m$, т. е. $\varphi_i(t)$ — непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция, имеющая мажорантой модуля непрерывности $\omega(\varphi_i, \delta)$ заданный модуль непрерывности $\omega_i(\delta)$.

Пусть N — фиксированное натуральное число. Через $\bar\varphi_N$ обозначим вписанную в $\bar\varphi$ ломаную, вершины которой расположены в точках

$$P_k\left(\varphi_1\left(\frac{k}{N}\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{k}{N}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Тогда каковы бы ни были модули непрерывности $\omega_i(\delta)$, $i = 1, \ldots, m$, для всех $N = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства [85, 87]

$$\sup_{\bar\varphi\in\bar H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}} h(\bar\varphi, \bar\varphi_N) = \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_i^2(1/(2N))\right)^{1/2}.$$

Пусть $M\bar H_m^{\omega}$ — класс кривых $\bar\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots \varphi_m(t)\}$, точки $P(t)$ которых удовлетворяют неравенству

$$e(P(t'), P(t'')) = \left(\sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')]^2\right)^{1/2} \leqslant M\omega(|t' - t''|) \quad \forall t', t'' \in [0, 1],$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности. Тогда для всех $N = 1, 2, \ldots$ в хаусдорфовой метрике имеют место следующие равенства [85]:

$$\sup_{\bar\varphi\in M\bar H^{\omega}_m} h(\bar\varphi, \bar\varphi_N) = \omega(1/(2N)),$$

где $\bar\varphi_N$ — ломаная, вписанная в $\bar\varphi \in M\bar H_m^{\omega}$.

Обозначим через $M\bar W_m^s$ класс вектор-функций $\bar\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, у которых $\varphi_i(t) \in L_\infty^s$, $|\bar\varphi^{(s)}(t)| =: \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^{(s)}(t)|^2\right)^{1/2} \leqslant M$ и $\bar\varphi(0) = \bar\varphi(1)$. Положим, как и раньше, $N = 2n$,

$$\tau_{ks} = \begin{cases} k/N, & k = 1, 2, \ldots, N, \text{ если } s \text{ четно},\\ (2k-1)/(2N), & k = 1, 2, \ldots, N, \text{ если } s \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Если в качестве аппарата приближения кривых из множества $M\bar W_m^s$ возьмем интерполяционные параметрические сплайны

$$\bar\sigma_{N,s-1}(\bar\varphi, t) = \sum_{i=1}^{N} \bar\varphi(\tau_{is})\, l_i(t),$$

где $l_i(t)$ — фундаментальные сплайны [69, с. 287], то справедливы следующие равенства [85, 93]:

$$\sup_{\bar\varphi\in M\bar W_m^s} h(\bar\varphi, \bar\sigma_{2n,s-1}) = \sup_{\bar\varphi\in M\bar W_m^s} \varepsilon(\bar\varphi, \bar\sigma_{2n,s-1}) = MK_s n^{-s},$$

где K_s — константа Фавара.

Ряд точных оценок погрешности приближения эрмитовыми вектор-сплайн-функциями на некоторых классах дифференцируемых векторнозначных функций получены в [96—98].

Рассмотрим спрямляемые кривые

$$\bar{\varphi}(s) = \{x_1(s),\ x_2(s)\}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant L, \tag{36}$$

где параметр s — длина дуги, X_1OX_2 — прямоугольная система координат. Предположив, что в каждой точке кривой $\bar{\varphi}(s)$ существует касательная, обозначим через $\theta(s)$ угол, образованный этой касательной в точке $(x_1(s), x_2(s))$ с положительным направлением оси OX_1. Через $\bar{H}^{\omega}(\theta, L)$ обозначим множество кривых длины L, у которых

$$|\theta(s') - \theta(s'')| \leqslant \omega(|s' - s''|), \qquad s', s'' \in [0, L],$$

где $\omega(t)$ — заданный модуль непрерывности. Пусть $\bar{\varphi} \in \bar{H}^{\omega}(\theta, L)$ и

$$\Delta_N := \{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L\} \tag{37}$$

— разбиение отрезка $[0, L]$, удовлетворяющее условию

$$\max_k \omega(s_k - s_{k-1}) \leqslant \pi, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{38}$$

$\bar{\varphi}_N$ — ломаная, совпадающая с $\bar{\varphi}(s)$ в точках $P_k = (x_1(s_k), x_2(s_k))$.

Теорема 14 [86]. *Каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$ для кривой $\bar{\varphi} \in \bar{H}^{\omega}(\theta, L)$ при разбиении* (37), *удовлетворяющем условию* (38), *имеет место оценка*

$$h(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_N) \leqslant 1/2 \int_0^q \sin 1/2\omega(t)\, dt,$$

где $q = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N}(s_k - s_{k-1})$. *Если* $\omega(t)$ — *выпуклый вверх модуль непрерывности и разбиение* (37) *равномерное* (*т. е.* $s_k = kL/N$), *то*

$$\sup_{\bar{\varphi} \in \bar{H}^{\omega}(\theta, L)} h(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_N) = 1/2 \int_0^{L/N} \sin 1/2\omega(t)\, dt.$$

В частном случае $\omega(t) = Kt$, при предположении $\bar{H}^{\omega}(\theta, L) = K\bar{H}^1(\theta, L)$, справедливо [88] равенство

$$\sup_{\bar{\varphi} \in K\bar{H}^1(\theta, L)} h(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_N) = 1/K\left(1 - \cos\frac{KL}{2N}\right).$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\theta, L)$ множество кривых (36), у которых функция $\theta(\bar{\varphi}, \bar{s})$ непрерывна на $[0, L]$, $\omega(\theta(\bar{\varphi}), s)$ — модуль непрерывности функции $\theta(\bar{\varphi}, s)$. Тогда для любой кривой $\bar{\varphi} \in \mathfrak{M}(\theta, L)$ при условии $\omega(\theta(\bar{\varphi}), L/N) \leqslant \pi$ справедлива точная оценка [86]

$$h(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_N) \leqslant 1/2 \sin 1/2\omega(\theta(\bar{\varphi}), L/N).$$

Пусть задано конечное упорядоченное множество точек $\mathcal{P}_n = \{P_k\}_{k=0}^n$, $n \geqslant 3$; $|P_{k-1}P_k| \leqslant 1$, своими координатами относительно некоторой декартовой системы координат X_1OX_2. Предположим, что через эти точки последовательно проходит плоская кривая $\bar{\varphi}$, допускающая параметрическое представление

$$\{x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t)\}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant L, \tag{39}$$

где параметром t служит длина куска ломаной $\bar{l}$, вписанной в $\bar{\varphi}$, с вершинами в точках P_k, причем

$$x_{1,k} = \varphi_1(t_k), \quad x_{2,k} = \varphi_2(t_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{40}$$

$$t_0 = 0, \quad t_k = t_{k-1} + h_k, \quad h_k = \left(\sum_{i=1}^{2} (\Delta x_{i,k})^2 \right)^{1/2},$$

$$\Delta x_{i,k} = x_{i,k} - x_{i,k-1}, \quad i = 1, 2, \; t_n = \sum_{k=1}^{n} h_k =: L.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{P}_n; \alpha)$ класс плоских кривых $\overline{\varphi}$, проходящих последовательно через точки P_k и допускающих параметрическое представление (39), где функции $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, кроме условия (40) удовлетворяют неравенству $|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')| \leqslant |t' - t''|^\alpha \; \forall t', t''$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

В качестве аппарата приближения кривых $\overline{\varphi} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}_n; \alpha)$ возьмем параметрические параболические и кубические эрмитовы сплайны $\overline{s}_m$, $m = 2, 3$ [89].

При этом справедливо следующее утверждение [90, 93].

Теорема 15. *Какова бы ни была система точек* $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 3$, $|P_{k-1}P_k| \leqslant 1)$, *для любой кривой* $\overline{\varphi} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}_n; \alpha)$ *и параметрического сплайна* $\overline{s}_m$, $m = 2, 3$, *имеет место соотношение*

$$\varepsilon(\overline{\varphi}, \overline{s}_m) \leqslant \frac{h}{8} + \left(\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \left(2 \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha - h \right) + \frac{h^2}{4} \right)^{1/2}, \quad h = \max_k h_k.$$

Существует система точек $\tilde{\mathcal{P}}_n$ *и кривая* $\overline{\varphi}_0(\alpha) \in \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{P}}_n; \alpha)$ *такие, что*

$$\varepsilon(\overline{\varphi}_0(\alpha), \overline{s}_m) \geqslant \left(\left(\frac{h}{2}\right)^\alpha \left(2 \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha - \frac{3}{4} h + \frac{17}{64} h^2 \right) \right)^{1/2}.$$

При $\alpha = 1$ *выполняются равенства*

$$\sup_{\overline{\varphi} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}_n; 1)} h(\overline{\varphi}, \overline{s}_m) = \sup_{\overline{\varphi} \in \mathfrak{M}(\mathcal{P}_n; 1)} \varepsilon(\overline{\varphi}, \overline{s}_m) = \frac{5}{8} h.$$

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications.— New York, London : Academic press., 1967.— 327 p.
2. *Субботин Ю. Н.* Кусочно-полиномиальная интерполяция // Мат. заметки.— 1967.— 1, № 1.— С. 63—70.
3. *Birkhoff G., Boor C.* Error bounds for spline interpolation // J. Math. Mech.— 1964.— **13**, N 5.— P. 827—836.
4. *Birkhoff G., Priver A.* Hermite interpolation errors for derivatives // J. Math. Phys.— 1967.— 46.— P. 440—447.
5. *Birkhoff G., Schultz M. H., Varga R. S.* Piesewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations // Numer. Math.— 1968.— **11**, N 3.— P. 232—256.
6. *Ciarlet P. G., Schultz M. H., Varga R. S.* Numerical methods of high-order accuracu for nonlinear boundary value problems // Ibid.— 12, N 5.— P. 394—430.
7. *Nord S.* Approximation properties of the spline fit // BIT.— 1967.— **7**.— P. 132—144.
8. *Sonneveld P.* Errors cubic spline interpolation // J. Euqin. Math.— 1969.— 3, N 2.— P. 107—117.
9. *Hall C. A.* On error bounds for spline interpolation // J. Approxim. Theory.— 1968.— **1**.— P. 209—218.
10. *Cheney E. W., Schurer F.* A note on the operators arising in spline approximation // Ibid.— P. 94—102.
11. *Sharma A.* Meir A. Degree of approximation of spline interpolation // J. Math. and Mech.— 1966.— **15**, N 5.— P. 759—767.
12. *Sharma A., Meir A.* Convergence of a class of interpolatory splines // J. Approxim. Theory.— 1968.— **1**.— P. 243—250.
13. *Schurer F.* A note on interpolating periodic quintic splines with equally spaced nodes // Ibid.— P. 493—500.
14. *Schurer F.* On interpolating periodic quintic spline functions with equally spaced nodes // Ibid.— 1969.— **2**.— P. 1—28.
15. *Atkinson K. E.* On the order of convergence of natural cubis spline interpolation // SIAM J. Numer. Anal.— 1968.— **5**, N 1.— P. 89—101.
16. *Cheney E. W., Schurer F.* On interpolating by cubic splines equally—spaces nodes // Indig. math. — 1968.— **30**.— P. 517—524.
17. *Swartz B.* $O(h^{2n+2-l})$ bounds on some spline interpolation errors // Bull. Amer. Math. Soc.— 1968.— **74**.— P. 1072—1078.

18. *Schoenberg I. J.* On best approximations of linear operators // Math. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.— 1964.— **67**.— P. 155—163.
19. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1971.— **35**, № 1.— С. 93—124.
20. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
21. *Borsuk K.* Drei Sätze über die *n*-dimensionale euklidische Sphäre // Fund. math.— 1933.— **20**.— S. 177—191.
22. *Великин В. Л.* Оптимальная интерполяция периодических дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной // Мат. заметки.— 1977.— **22**, № 5.— С. 663—670.
23. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1, 1]$ // Мат. сб.— 1969.— **80**, № 2.— С. 290—304.
24. *Женсыкбаев А. А.* Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению // Мат. заметки.— 1973.— **13**, № 6.— С. 807—816.
25. *Golitschek M. V.* On *n*-widths and interpolation by polinomiale splines // J. Approxim. Theory.— 1979.— **26**, N 2.— P. 133—141.
26. *Hall Ch. A., Meyer W. W.* Optimal error bounds for cubic spline interpolation // Ibid.— 1976.— **16**, N 2.— P. 105—122.
27. *Korneičuk N. P.* Exact error bound of approximation by interpolating splines on *L*-metric on the classes W_c^r $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions // Anal. math.— 1977.— **3**, N 2.— P. 109—117.
28. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А.* Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике // Укр. мат. журн.— 1981.— **33**, № 3.— С. 391—394.
29. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М. : Наука, 1976.— 230 с.
30. *Корнейчук Н. П.* О приближении интерполяционными сплайнами функций и их производных // Докл. АН СССР.— 1982.— **264**, № 5.— С. 1063—1066.
31. *Корнейчук Н. П.* Некоторые точные неравенства для дифференцируемых функций и оценка приближения функций и их производных интерполяционными кубическими сплайнами // Сиб. мат. журн.— 1983.— **24**, № 5.— С. 94—108.
32. *Корнейчук Н. П.* О приближении параболическими сплайнами дифференцируемых функций и их производных // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 6.— С. 702—710.
33. *Корнейчук Н. П.* Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— **45**, № 2.— С. 266—290.
34. *Малоземов В. Н.* Об отклонении ломаных // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1966.— **2**, № 7.— С. 150—153.
35. *Малоземов В. Н.* К полигональной интерполяции // Мат. заметки.— 1967.— **1**, № 5.— С. 537—540.
36. *Логинов А. С.* Приближение непрерывных функций ломаными // Там же.— 1969.— **6**, № 2.— С. 149—160.
37. *Сторчай В. Ф.* Об отклонении ломаных в метрике L_p // Там же.— **5**, № 1.— С. 31—37.
38. *Женсыкбаев А. А.* Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами *r*-го порядка // Там же.— 1973.— **13**, № 2.— С. 217—228.
39. *Женсыкбаев А. А.* Приближение некоторых классов дифференцируемых периодических функций интерполяционными сплайнами по равномерному разбиению // Там же.— 1974.— **15**, № 6.— С. 955—966.
40. *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolations on uniform meshes // J. Approxim. Theory.— 1968.— **1**.— P. 26—65.
41. *Корнейчук Н. П.* О равномерном приближении периодических функций подпространствами конечной размерности // Докл. АН СССР.— 1973.— **213**, № 3.— С. 525—528.
42. *Korneičuk N. P.* On extremal subspaces and approximation of periodic functions by splines of minimal defect // Anal. math.— 1975.— **1**, N 2.— P. 91—101.
43. *Женсыкбаев А. А.* Сплайн-интерполяция и наилучшее приближение тригонометрическими многочленами // Мат. заметки.— 1979.— **26**, № 3.— С. 355—366.
44. *Великин В. Л.* Приближение кубическими сплайнами на классах непрерывно дифференцируемых функций // Там же.— 1972.— **11**, № 2.— С. 215—226.
45. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— **37**, № 1.— С. 165—185.
46. *Назаренко Н. А., Переверзев С. В.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами четной степени на классах дифференцируемых функций // Мат. заметки.— 1980.— **28**, № 1.— С. 33—44.
47. *Великин В. Л., Корнейчук Н. П.* Точные оценки приближения сплайн-функциями на классах дифференцируемых функций // Там же.— 1971.— **9**, № 5.— С. 483—494.
48. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.— М. : Наука, 1980.— 352 с.
49. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.— М. : Наука, 1987.— 424 с.
50. *Lych T., Schumaker L. L.* Local spline approximation methods // J. Approxim. Theory.— 1975.— **15**, N 4.— P. 294—325.
51. *Schumaker L. L.* Spline functions : basic theory.— New York: Wiley, 1981.— 533 p.
52. *Гребенников А. И.* Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 208 с.
53. *Юферев В. С.* Локальная аппроксимация кубическими сплайнами // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1981. — **21**, № 1.— С. 5—10.

54. *Корнейчук Н. П.* О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн.— 1982.— 34, № 5.— С. 617—621.
55. *Авакян А. М.* Точные константы погрешностей при приближении локальными параболическими сплайнами // Моногенные функции и отображения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 114—121.
56. *Хижа А. Л.* О приближении дифференцируемых функций локальными сплайнами // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 97—104.
57. *Хижа А. Л.* Оценки устойчивости некоторых методов приближения локальными сплайнами // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 2.— С. 263—267.
58. *Назаренко Н. А.* О приближении дифференцируемых функций рациональными сплайнами // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987.— С. 77—81.
59. *Назаренко Н. А.* Об изогеометрической интерполяции обобщенными сплайнами // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1988.— С. 64—69.
60. *Назаренко Н. А.* Об изогеометрической сплайн-аппроксимации // Докл. расш. засед. семинара Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа.— 1988.— 3, № 2.— С. 71—74.
61. *Малишева А. Д.* Автоматический выбор параметров при приближении функций рациональными сплайнами // Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1987.— С. 52—60.
62. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1946.— 10, № 3.— С. 207—256.
63. *Корнейчук Н. П.* Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L // Мат. заметки.— 1976.— 20, № 5.— С. 655—664.
64. *Корнейчук Н. П.* Неравества для наилучшего приближения сплайнами дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 4.— С. 380—388.
65. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functions // Anal. math.— 1976.— 2, N 1.— P. 11—40.
66. *Корнейчук Н. П.* Точные неравенства для наилучшего приближения сплайнами // Докл. АН СССР.— 1978.— 242, № 2.— С. 280—283.
67. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем приближении на отрезке классов функций с ограниченной r-й производной конечномерными подпространствами // Укр. мат. журн.— 1979.— 31, № 1.— С. 23—31.
68. *Корнейчук Н. П.* О поперечниках классов непрерывных функций в пространстве L_p // Мат. заметки.— 1971.— 10, № 5.— С. 493—500.
69. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
70. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* Верхние грани наилучших односторонних приближений сплайнами классов W^rL_1 // Мат. заметки.— 1976.— 19, № 1.— С. 11—17.
71. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О точных значениях наилучших односторонних приближений сплайнами // Там же.— 20, № 3.— С. 417—424.
72. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* О наилучшем односторонем приближении классов $W^rH\omega$// Там же.— 1977.— 21, № 3.— С. 313—327.
73. *Schoenberg I. J.* Notes on spline functions I. The limits of the interpolating periodic spline functions as their degrec tends to finitg // Indig. math.— 1972.— 34.— P. 412—422.
74. *Quade W., Collatz L.* Zur Interpolationtheorie der reelen periodishen Funktionen // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math.— 1938.— 30, K. 1.— P. 383—429.
75. *Великин В. Л.* О предельной связи между приближениями периодических функций сплайнами и тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР.— 1981.— 258, № 3.— С. 525—229.
76. *Великин В. Л.* Предельная связь для различных методов приближения периодических функций сплайнами и тригонометрическими полиномами // Anal. math.— 1987.— 13, № 1.— P. 45—74.
77. *Carleson L.* On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math.— 1966.— 116, № 1-2.— P. 135—157.
78. *Hunt R. A.* On the convergence of Pourier series // In Orthogonal expansions and their continuons analogues, Illinois Univ.— 1968.— P. 235—255.
79. *Женсыкбаев А. А.* О приближении периодических дифференцируемых функций интерполяционными сплайнами // Теория приближения функций и ее приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 81—86.
80. *Favard J.* Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques // C. r. Acad. sci. A.— 1936.— 203.— P. 1122—1124.
81. *Тайков Л. В.* О приближении в среднем некоторых классов периодических функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1967.— 88.— С. 61—70.
82. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев: Наук. думка, 1982.— 252 с.
83. *Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А.* Сплайны в инженерной геометрии.— М. : Машиностроение, 1985.— 224 с.
84. *Сендов Бл.* Хаусдорфовые приближения.— София: Изд-во Болг. АН, 1979.— 372 с.
85. *Корнейчук Н. П.* Об о тимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 6.— С. 737—743.
86. *Корнейчук Н. П.* Приближение и оптимальное кодирование гладких плоских кривых // Там же.— 1989.— 41, № 4.— С. 492—499.
87. *Мартынюк В. Т.* О приближении ломаными кривых, заданными параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике // Там же.— 1976.— 28, № 1.— С. 87—92.

88. *Мартынюк В. Т.* Некоторые вопросы приближения линий и поверхностей // Теория приближения функций.— М. : Наука, 1987.— С. 282—283.
89. *Назаренко Н. А.* О восстановлении плоских кривых с помощью параметрических эрмитовых сплайнов // Сплайны в задачах аппроксимации и сглаживания.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 33—44.
90. *Назаренко Н. А.* О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 2.— С. 201—205.
91. *Назаренко Н. А.* О локальном восстановлении кривых с помощью параметрических сплайнов // Геометрическая теория функций и топология.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 55—62.
92. *Назаренко Н. А.* Приближение кривых с помощью параметрических сплайнов // Конструктивная теория функций '81.— София : Изд-во Болг. АН, 1983.— С. 111—114.
93. *Назаренко Н. А.* Некоторые вопросы сплайн-аппроксимации кривых // Теория приближения функций.— М. : Наука, 1987.— С. 313—314.
94. *Вакарчук С. Б., Назаренко Н. А.* О приближении кривых интерполяционными параметрическими сплайнами // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 32—35.
95. *Вакарчук С. Б.* О приближении гладких кривых ломаными // Геометрическая теория функций и топология.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С. 15—19.
96. *Вакарчук С. Б.* Аппроксимация кривых и поверхностей сплайнами.— Киев, 1982.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 82.32).
97. *Вакарчук С. Б.* О приближении плоских параметрически заданных кривых ломаными // Моногенные функции и отображения.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982.— С. 107—113.
98. *Вакарчук С. Б.* О приближении кривых, заданных в параметрическом виде, при помощи сплайн-кривых // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 3.— С. 352—355.
99. *Вакарчук С. Б.* Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Изв. вузов. Математика.— 1988.— № 2.— С. 14—19.

Днепропетр. ун-т,
Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07,08,89