УДК 62.50

А. М. Красносельский

Совместная норма операторов и исследование нелинейных задач

Изучаются нелинейные операторные уравнения вида $x = Fx$ в вещественном гильбертовом пространстве H. Если оператор F вполне непрерывен и допускает оценку $\| Fx \| \leqslant \| Bx \| + b$, где B — непрерывный линейный оператор, то при $\| B \| < 1$ к уравнению $x = Fx$ применим принцип Шаудера, и у этого уравнения существует по крайней мере одно решение $x \in H$. Если верна оценка $\| Fx \| \leqslant \| B_1 x \| + \| B_2 x \| + b$, где B_1 и B_2 — ограниченные линейные операторы, то простейшее условие разрешимости уравнения $x = Fx$ имеет вид $\| B_1 \| + \| B_2 \| < 1$. Это условие удается ослабить.

Предлагаемый метод применяется для исследования двухточечной краевой задачи (см., например, [1—3]). Получены новые условия существования решений.

Вивчаються нелінійні операторні рівняння вигляду $x = Fx$ в дійсному гільбертовому просторі H. Якщо оператор F цілком неперервний і допускає оцінку $\| Fx \| \leqslant \| Bx \| + b$, де B — неперервний лінійний оператор, то за $\| B \| < 1$ до рівняння $x = Fx$ застосовний принцип Шаудера, і у цього рівняння існує в крайньому разі один розв'язок $x \in H$. Якщо вірна оцінка $\| Fx \| \leqslant \| B_1 x \| + \| B_2 x \| + b$, де B_1 і B_2 — обмежені лінійні оператори, то найпростіша умова розв'язності рівняння $x = Fx$ має вигляд $\| B_1 \| + \| B_2 \| < 1$. Цю умову вдається ослабити.

Запропонований метод застосовується до вивчення двоточкової крайової задачі (див., наприклад, [1—3]). Одержані нові умови існування розв'язків.

1. Основные определения. Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан сохраняющий норму положительно однородный нелинейный оператор $M : H \to H$, для которого

$$(M(x + y),\ Mz) \leqslant (Mx + My,\ Mz),\ x,\ y,\ z \in H, \tag{1}$$

причем равенство в (1) верно при всех $z \in H$ тогда и только тогда, когда $Mx + My = M(x + y)$. Оператор M называется модулем.

Если H — конечномерное пространство с ортонормированным базисом, то в качестве M можно взять оператор, переводящий вектор $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в вектор $\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$. Если $H = L_2$, то в качестве модуля можно взять оператор $Mx(t) = |x(t)|$.

В дальнейшем будем считать оператор M фиксированным.

Определение. *Совместной нормой двух линейных ограниченных операторов A и B в гильбертовом пространстве H с модулем M назовем число*

$$N(A, B) = N(A, B; H, M) = \sup_{\|x\| = 1} \| MAx + MBx \|. \tag{2}$$

Аналогичным образом можно определять совместную норму ограниченных операторов A и B, действующих в банаховых пространствах. Понятие совместной нормы распространяется и на наборы любого конечного числа ограниченных линейных операторов $A_1 : H \to H$, $i = 1, \ldots, n$, $n > 2$, равенством

$$N(A_1, \ldots, A_n) = \sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{i=1}^{K} MA_i x \right\|.$$

Пусть нелинейный оператор $\mathfrak{f}(x_1, x_2) : H \times H \to H$ удовлетворяет оценке

$$\| \mathfrak{f}(x_1, x_2) \| \leqslant \| k_1 M x_1 + k_2 M x_2 \| + c. \tag{3}$$

Эта оценка справедлива, например, если $\mathfrak{f}$ — оператор суперпозиции $\mathfrak{f}(x_1, x_2) = f(t, x_1(t), x_2(t))]$, $(\mathfrak{f} : L_2 \to L_2;\ Mx(t) = |x(t)|)$, причем

$$|f(t, x_1, x_2)| \leqslant k_1 |x_1| + k_2 |x_2| + c(t). \tag{4}$$

Если $N(k_1 A, k_2 B) < 1$, то в силу (3) оператор $x \to \mathfrak{f}(Ax, Bx)$ переводит шар Ш $(\rho) = \{x \in H,\ \| x \| \leqslant \rho\}$ радиуса $\rho = c\,[1 - N(k_1 A, k_2 B)]^{-1}$ в себя; если при этом оператор $\mathfrak{f}(Ax, Bx)$ вполне непрерывен в H, то в силу принципа Шаудера уравнение $x = \mathfrak{f}(Ax, Bx)$ имеет по крайней мере одно решение в шаре Ш (ρ). Поэтому умение вычислять (или хорошо оценивать) совместную норму операторов приводит к новым признакам существования решений различных нелинейных задач.

Очевидна простейшая оценка

$$N(A, B) \leqslant \| A \| + \| B \|. \tag{5}$$

Если операторы A и B вполне непрерывны, то оценка (5) неулучшаема тогда и только тогда, когда для некоторого $x \in H$, $\| x \| = 1$, верны равенства $\| Ax \| = \| A \|$, $\| Bx \| = \| B \|$ и векторы MAx и MBx коллинеарны.

Точное вычисление совместной нормы двух операторов без существенных дополнительных предположений невозможно. Ниже предлагаются лучшие чем (5) оценки совместной нормы. Для их получения удобно оценивать величину

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A, B) = \sup_{\|x\|=1} [q_1 \| Ax \|^2 + 2q_2 (MAx, MBx) + q_3 \| Bx \|^2]. \quad (6)$$

Если $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, то $\mathfrak{J} = [N(A, B)]^2$; если $q_1 = k_1^2$, $q_2 = k_1 k_2$, $q_3 = k_2^2$, то

$$\mathfrak{J} = [N(k_1 A, k_2 B)]^2. \quad (7)$$

2. Пример точного вычисления совместной нормы. Если $H = \mathbb{R}^n$ — конечномерное евклидово пространство с модулем $M(x_1, \ldots, x_n\} = \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, то величина (6), вычисленная для операторов

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}, \quad (8)$$

равна

$$\mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A, B) = \max_{i=1,\ldots,n} [q_1 a_i^2 + 2q_2 |a_i b_i| + q_3 b_i^2]. \quad (9)$$

В частности,

$$N(A, B) = \max_{i=1,\ldots,n} (|a_i| + |b_i|). \quad (10)$$

Пусть теперь H — бесконечномерное пространство, в котором действуют вполне непрерывные самосопряженные операторы A и B, причем $AB \equiv BA$. Тогда в H существует ортонормированный базис $\{e_i\}$, состоящий из общих собственных векторов e_i оператовов A и B. Предположим, что модуль M определяется формулой $Mx = \Sigma |(x, e_1)| e_i$ по базису $\{e_i\}$. Тогда величина (6) определяется аналогичным (9) равенством

$$\mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A, B) = \max_{i=1,\ldots,\infty} [q_1 a_i^2 + 2q_2 |a_i b_i| + q_3 b_i^2],$$

в котором через a_i и b_i обозначены собственные значения операторов A и B, отвечающие собственным векторам e_i. Но в реальных ситуациях модуль M не согласован с базисом из общих собственных векторов.

Приведем следующий пример. Пусть $H = L_2(\Omega, \mathbb{R}^1)$ и $Mx(t) = |x(t)|$. Если A и B — интегральные операторы с неотрицательными ядрами, то $N(A, B) = \| A + B \|$. Очевиден конечномерный аналог этой ситуации.

3. Оценки, не зависящие от модуля. Рассмотрим величину

$$\mathfrak{J}_1(q_1, q_2, q_3; A, B) = \sup_{\|x\|=1} [q_1 \| Ax \|^2 + 2q_2 \| Ax \| \cdot \| Bx \| + q_3 \| Bx \|^2]. \quad (11)$$

Так как модуль сохраняет норму, то $\mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A, B) \leqslant \mathfrak{J}_1(q_1, q_2, q_3; A, B)$. Величина (11) для операторов (8) вычисляется точно.

Обозначим через $\mathfrak{R}(q_1, q_2, q_3) = \mathfrak{R}(q)$ множество упорядоченных четверок $\{r_1, r_2, s_1, s_2\}$ таких чисел, что $r_1 > r_2 \geqslant 0$, $s_2 > s_1 \geqslant 0$ и наибольший корень $\zeta = \zeta(q, r_1, r_2, s_1, s_2)$ квадратного уравнения

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta} \zeta - q_1\right)\left(\frac{\Delta r}{\Delta} \zeta - q_3\right) = q_2^2 \quad (\Delta s = s_2 - s_1,\ \Delta r = r_1 - r_2,\ \Delta = r_1 s_2 - r_2 s_1) \quad (12)$$

удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\Delta}{\Delta r}\left[q_3 + q_2\left(\frac{r_2}{s_2}\right)^{1/2}\right] < \zeta < \frac{\Delta}{\Delta r}\left[q_3 + q_2\left(\frac{r_1}{s_1}\right)^{1/2}\right]. \quad (13)$$

Каждое уравнение (12) имеет по крайней мере один положительный корень, причем для максимального корня ζ справедливы оценки

$$\zeta \Delta s > q_1 \Delta, \quad \zeta \Delta r > q_3 \Delta. \quad (14)$$

Соотношениям (13) для корня ζ можно придать более симметричную форму

$$\left(\zeta\frac{\Delta s}{\Delta}-q_1\right)\frac{r_2}{s_2}<\left(\zeta\frac{\Delta r}{\Delta}-q_3\right)<\left(\zeta\frac{\Delta s}{\Delta}-q_1\right)\frac{r_1}{s_1}. \tag{15}$$

Приведем важный пример. Если

$$q_1q_3=q_2^2, \tag{16}$$

то $\zeta=\frac{\Delta}{\Delta r\Delta s}(q_1\Delta r+q_3\Delta s)$ и условие (15) перепишется в виде

$$\frac{r_2}{s_2}<\frac{q_1}{q_3}\left(\frac{\Delta r}{\Delta s}\right)^2<\frac{r_1}{s_1}.$$

Если выполняется условие (16), то $\zeta\geqslant q_1r_i+2q_2\sqrt{r_is_i}+q_3s_i$, $i=1, 2$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\mathfrak{J}_1(q_1, q_2, q_3; A, B)=\max\{J_1, J_2\},$$

где A и B — операторы (8), *а*

$$J_1=\max_{i=1,\ldots,n}[q_1a_i^2+2q_2|a_ib_i|+q_3b_i^2] \tag{17}$$

и

$$J_2=\max_{i,j:\{a_i^2,a_j^2,b_i^2,b_j^2\}\in\mathfrak{R}(q)}\zeta(q, a_i^2, a_j^2, b_i^2, b_j^2). \tag{18}$$

Максимум в (11) всегда достигается на некотором векторе $\{x_1, \ldots, x_n\}$, имеющем не более двух компонент, отличных от нуля; если $\mathfrak{J}_1=J_1$, то этот максимум достигается на векторе с единственной ненулевой компонентой.

Несмотря на громоздкий вид чисел (17) и (18), в конкретных ситуациях теоремой 1 пользоваться легко.

Пусть, например, $n>2$, $a_i=[(i-1)^2+1]^{-1}$, $b_i=(i-1)a_i$ и верно условие (16). Тогда $J_1=\max\left\{q_1, \frac{1}{4}(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_3})^2\right\}$ и $J_2=q_1+\frac{1}{3}q_3$ $(q_3<9q_1)$. Следовательно, $\mathfrak{J}_1=\frac{1}{3}q_3+q_1$ при $q_3<9q_1$ и $\mathfrak{J}_1=\frac{1}{4}(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_3})^2$ при $q_3\leqslant 9q_1$.

Теорема 1 дает неулучшаемые оценки сверху выражения

$$q_1\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2+2q_2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2x_i^2\right)}+q_3\sum_{i=1}^n b_i^2x_i^2.$$

Из теоремы 1 вытекают оценки величины (11) для операторов в бесконечномерных пространствах. Пусть пространство H представимо в виде прямой суммы $H=\bigoplus_{i=1}^{\infty}\Pi_i$ ортогональных подпространств. Пусть операторы A и B допускают для любого $x\in H$, $x=\Sigma x_ie_i$ $(e_i\in\Pi_i)$ оценки

$$\|Ax\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2x_i^2,\quad \|Bx\|^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2x_i^2,\quad a_i,\ b_i\to 0. \tag{19}$$

Такие оценки справедливы (со знаками $=$ вместо $\leqslant$), например, если операторы A и B вполне непрерывны, самосопряжены и коммутируют. В этом случае верны разложения

$$Ax=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(x, e_i)e_i,\quad Bx=\sum_{i=1}^{\infty}b_i(x, e_i)e_i \tag{20}$$

со взаимно ортогональными векторами e_1; из них следуют оценки (19).

Рассмотрим последовательности A_n и B_n операторов, удовлетворяющих при каждом $n = 1, 2, \ldots$ оценкам

$$\| A_n x \|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x_i^2, \quad \| B_n x \|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i^2 x_i^2. \tag{21}$$

Если возможны представления (20), то в качестве операторов A_n и B_n естественно выбрать операторы

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} a_i (x, e_i) e_i, \quad B_n x = \sum_{i=1}^{n} b_i (x, e_i) e_i. \tag{22}$$

Так как $a_i, b_i \to 0$, то при достаточно больших n выполняется равенство $\mathfrak{I}_1(q_1, q_2, q_3; A; B) = \mathfrak{I}_1(q_1, q_2, q_3; A_n, B_n)$ и в силу теоремы 1 верны оценки

$$\mathfrak{I}(q_1, q_2, q_3; A, B) \leqslant \mathfrak{I}_1(q_1, q_2, q_3; A, B) \leqslant \max(J_1, J_2), \tag{23}$$

где J_1 и J_2 — величины, определяемые формулами (17) и (18), в которых индексы i и j принимают любые натуральные значения. Сформулируем доказанный факт в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть операторы A и B действуют в гильбертовом пространстве H и вполне непрерывны, причем для некоторой системы подпространств* Π_i *выполняются оценки* (19). *Тогда справедливо неравенство* (23).

Замечание. Аналогичные теоремам 1 и 2 утверждения могут быть получены для оценок величин

$$\max_{\|x\|=1} \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} \| A_i x \| \cdot \| A_j x \|. \tag{24}$$

Если операторы A_i диагональны в общем базисе, то величина (24) может быть вычислена точно. Максимум в (24) достигается на векторах x, имеющих не более m ненулевых компонент.

4. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы рассмотрим задачу об условном экстремуме функции

$$\mathbf{J}(x) = q_1 \sum_{l=1}^{n} \xi_l x_l^2 + 2q_2 \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{n} \xi_l x_l^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \eta_l x_l^2\right)} + q_3 \sum_{l=1}^{n} \eta_l x_l^2 \tag{25}$$

(с неотрицательными коэффициентами ξ и η) на сфере

$$\sum_{l=1}^{n} x_l^2 = 1. \tag{26}$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим лагранжиан

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = \mathbf{J}(x) - \lambda \left(\sum_{l=1}^{n} x_l^2 - 1\right)$$

и приравняем нулю его частные производные.

Равенство $\partial\mathscr{L}/\partial\lambda = 0$ эквивалентно (26); равенства $\partial\mathscr{L}/\partial x_l = 0$ имеют вид

$$x_l \left\{ q_1 \xi_l + q_2 \left[\xi_l \frac{u}{v} + \eta_l \frac{v}{u} \right] + q_3 \eta_l - \lambda \right\} = 0, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{27}$$

В (27) и далее используются обозначения

$$u = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \xi_l x_l^2}, \quad v = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \eta_l x_l^2}.$$

Если каждое из равенств (27) умножить на x_l и полученные соотношения сложить, то получится равенство

$$q_1 \sum_{l=1}^{n} \xi_l x_l^2 + 2q_2 \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{n} \xi_l x_l^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \eta_l x_l^2\right)} + q_3 \sum_{l=1}^{n} \eta_l x_l^2 - \lambda \sum_{l=1}^{n} x_l^2 = 0,$$

т. е. $\lambda = \mathbf{J}(x)$. Таким образом, значения функции (25) на каждой экстремали $\{x, \lambda\}$ равно λ.

Вернемся к анализу уравнений (27). Для каждого l по крайней мере одно из чисел x_l или $\tau_l = q_1\xi_l + q_2\left[\frac{u}{v}\xi_l + \frac{v}{u}\eta_l\right] + q_3\eta_l - \lambda$ равно нулю. Если все числа x_l, кроме одного $x_m = 1$, равны нулю, то

$$\mathbf{J}(x) = q_1\xi_m + 2q_2\sqrt{\xi_m\eta_m} + q_3\eta_m. \tag{28}$$

Если x_i и x_j, $i \neq j$, отличны от нуля, то $\tau_i = \tau_j = 0$ и числа $z_1 = q_1 + q_2\frac{u}{v}$, $z_2 = q_3 + q_2\frac{v}{u}$ являются решениями системы двух линейных уравнений

$$z_1\xi_i + z_2\eta_i = \lambda, \quad z_1\xi_j + z_2\eta_j = \lambda. \tag{29}$$

Случай, когда $\Delta = \xi_i\eta_j - \xi_j\eta_i = 0$ можно не рассматривать. При $\Delta \neq 0$ из (29) вытекают равенства

$$z_1 = \frac{\lambda}{\Delta}\Delta\eta, \quad z_2 = \frac{\lambda}{\Delta}\Delta\xi, \quad \Delta\xi = \xi_i - \xi_j, \quad \Delta\eta = \eta_j - \eta_i. \tag{30}$$

Выберем номера i и j так, чтобы величина Δ была положительной (если $\Delta < 0$, то поменяем номера i и j). Так как z_1, $z_2 > 0$, то $\xi_i > \xi_j$, $\eta_j > \eta_i$; поэтому из определения чисел z_1 и z_2 и из (30) вытекают равенства

$$q_2\frac{u}{v} = \frac{\lambda\Delta\xi}{\Delta} - q_3, \quad q_2\frac{v}{u} = \frac{\lambda\Delta\eta}{\Delta} - q_1. \tag{31}$$

Таким образом, число λ является максимальным корнем уравнения

$$\left(\frac{\Delta\eta}{\Delta}\lambda - q_1\right)\left(\frac{\Delta\xi}{\Delta}\lambda - q_3\right) = q_2^2,$$

совпадающего с (12). Тем самым показали, что каждый экстремум λ является корнем ζ уравнения (12) (либо λ равно одному из чисел (28)).

Покажем, что максимум функции (25) достигается на векторах, имеющих не более двух компонент, отличных от нуля.

Пусть x_i, x_j и x_k отличны от нуля. Тогда $\tau_i = \tau_j = \tau_k = 0$, т. е. $z_1\xi_i + z_2\eta_i = \lambda$, $z_1\xi_j + z_2\eta_j = \lambda$, и $z_1\xi_k + z_2\eta_k = \lambda$. Поэтому при некоторых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1)$ справедлива одна из трех систем равенств

$$\begin{cases} \xi_i = \varepsilon_1\xi_j + \varepsilon_2\xi_k, \\ \eta_i = \varepsilon_1\eta_j + \varepsilon_2\eta_k, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_j = \varepsilon_1\xi_k + \varepsilon_2\xi_i, \\ \eta_j = \varepsilon_1\eta_k + \varepsilon_2\eta_i, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_k = \varepsilon_1\xi_i + \varepsilon_2\xi_j, \\ \eta_k = \varepsilon_1\eta_k + \varepsilon_2\eta_i. \end{cases} \tag{32}$$

Без ограничения общности будем считать, что справедлива последняя из систем (32). Положим в экстремали $\{\lambda, x_1, \ldots, x_n\}$ вместо x_i, x_j и x_k новые значения $x_i' = \sqrt{x_i^2 + \varepsilon_1 x_k^2}$, $x_j' = \sqrt{x_j^2 + \varepsilon_2 x_k^2}$ $x_k' = 0$. Полученный вектор $\{\lambda, x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_j', \ldots, x_k', \ldots, x_n\}$ также является экстремалью. Значение функции (25) на новой экстремали сохраняется, но у новой экстремали на одну ненулевую компоненту меньше.

Итак, экстремальному значению λ соответствует вектор с двумя ненулевыми компонентами x_i и x_j. Для доказательства теоремы 1 осталось доказать, что для экстремали $\{\lambda, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0, \ldots, x_j, \ldots, 0\}$ имеет место включение $\{\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\} \in \mathfrak{R}(q)$. Из тождеств $\xi_i x_i^2 + \xi_j x_j^2 = u^2$, и $\eta_i x_i^2 +$

$+\eta_j x_j^2 = v^2$ следуют соотношения

$$\frac{\xi_j}{\eta_j} < \left(\frac{u}{v}\right)^2 < \frac{\xi_i}{\eta_i},$$

совпадающие (в силу (31)) с условием (13) для выполнения включения $\{\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\} \in \mathfrak{R}(q)$. Теорема доказана.

5. Оценки, зависящие от модуля. Пусть числа $\lambda_A \geqslant \mu_A \geqslant 0$, $\lambda_B \geqslant \mu_B \geqslant 0$ и $\gamma < 1$, а ортогональные подпространства E_0 и E_1 $(H = E_0 \oplus \oplus E_1)$ таковы, что

$$\| Ax_0 \| \leqslant \lambda_A \| x_0 \|, \quad \| Bx_0 \| \leqslant \lambda_B \| x_0 \|, \quad x_0 \in E_0, \tag{33}$$

$$\| Ax_1 \| \leqslant \mu_A \| x_1 \|, \quad \| Bx_1 \| \leqslant \mu_B \| x_1 \|, \quad x_1 \in E_1, \tag{34}$$

$$(M(Ax_0), M(Bx_0)) \leqslant \gamma \lambda_A \lambda_B \| x_0 \|^2, \quad x_0 \in E_0, \tag{35}$$

$$(Ax_0, Ax_1) = (Bx_0, Bx_1) = 0, \quad x_0 \in E_0, \quad x_1 \in E_1. \tag{36}$$

Из оценок (33) следует равенство (35) с $\gamma = 1$. Величины λ_A и λ_B могут совпадать с нормами $\| A \|$ и $\| B \|$ операторов A и B.

Введем функцию

$$D = D(q_1, q_2, q_3, \lambda_A, \lambda_B, \mu_A, \mu_B, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} q_1(\lambda_A^2 + \mu_A^2) + q_3(\lambda_B^2 + \mu_B^2) + $$
$$+ 2q_2(\gamma\lambda_A\lambda_B + \mu_A\mu_B) +$$
$$+ \sqrt{[q_1(\lambda_A^2 - \mu_A^2) + q_3(\lambda_B^2 - \mu_B^2) + 2q_2(\gamma\lambda_A\lambda_B - \mu_A\mu_B)]^2 + 4q_2^2(\lambda_A\mu_B + \mu_A\lambda_B)^2}. \tag{37}$$

Теорема 3. *В условиях п. 5 справедлива оценка*

$$\mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A, B) \leqslant \frac{1}{2} D(q_1, q_2, q_3, \lambda_A, \lambda_B, \mu_A, \mu_B, \gamma). \tag{38}$$

Теорема 3 не всегда дает оценку величины (6), лучшую чем $\mathfrak{J}(q_1, q_2, q_3; A; B) \leqslant q_1\lambda_A^2 + 2q_2\lambda_A\lambda_B + q_3\lambda_B$. Очевидна оценка $D \leqslant 2[q_1\lambda_A^2 + 2q_2\gamma\lambda_A \times \times \lambda_B + q_3\lambda_B^2 + q_2(\lambda_A\mu_B + \lambda_B\lambda_A)]$.

Доказательству теоремы 3 предпошлем такую лемму.

Лемма 1. *Максимум функции двух переменных*

$$\mathcal{F}(u, v) = 2au^2 + 2buv + 2cv^2, \quad a, b, c \geqslant 0, \tag{39}$$

на окружности $u^2 + v^2 = 1$ равен числу

$$a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}. \tag{40}$$

Утверждение леммы следует из следующего факта: максимум (40) квадратичной формы (39) совпадает со спектральным радиусом матрицы

$$\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix}.$$

Доказательство теоремы 3. Введем для каждого $x \in H$, отличного от нуля, обозначения $u = \| Px \| / \| x \|$, $v = \| Qx \| / \| x \|$, где P и Q — ортопроекторы на подпространства E_0 и E_1 соответственно. Очевидно, $u^2 + v^2 = 1$. Из (36) вытекает справедливость для любого $x \in H$ равенств $\| Ax \|^2 = \| APx \|^2 + \| AQx \|^2$, $\| Bx \|^2 = \| BPx \| + \| BQx \|^2$. Поэтому из (33) и (34) следуют оценки

$$\| Ax \|^2 = (\lambda_A^2 u^2 + \mu_A^2 v^2) \| x \|^2, \quad \| Bx \|^2 = (\lambda_B^2 u^2 + \mu_B^2 v^2) \| x \|^2. \tag{41}$$

Для оценки величины (MAx, MBx) воспользуемся предположением (35) и неравенством треугольника (1). Из соотношений

$$(MAx, MBx) \leqslant (MAPx, MBPx) + (MAQx, MBPx) + (MAPx, MBQx) +$$

$$+ (MAQx, MBQx) \leqslant \gamma\lambda_A\lambda_B \| Px \|^2 + \mu_A\lambda_B \| Qx \| \cdot \| Px \| + \lambda_A\mu_B \| Px \| \cdot \| Qx \| + \\ + \mu_A\mu_B \| Qx \|^2 = [\gamma\lambda_A\lambda_B u^2 + (\mu_A\lambda_B + \lambda_A\mu_B) uv + \mu_A\mu_B v^2] \cdot \| x \|^2$$

и (41) в силу леммы 1 следует утверждение теоремы 3.

Аналоги теоремы 3 справедливы для квадратичных форм вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} (MA_i x, \ MA_j x).$$

Если при всех $i, j = 1, \ldots, n$ и при всех $x \in H$ справедливы соотношения.

$$\| A_i Px \| \leqslant \lambda_j \| Px \|, \quad \| A_i Qx \| \leqslant \mu_i \| Qx \|, \quad (A_i Px, A_i Qx) = 0,$$
$$(MA_i Px, MA_j Px) \leqslant \gamma_{ij}\lambda_i\lambda_j \| Px \|^2, \quad i \neq j,$$

где $\gamma_{ij} < 1$, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} (MA_i x, MA_j x) \leqslant r \| x \|^2, \tag{42}$$

где r — спектральный радиус матрицы

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ii}\lambda_i^2 + \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} q_{ij}\lambda_i\lambda_j\gamma_{ij} & \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} q_{ij}\lambda_i\mu_j \\ \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} q_{ij}\lambda_i\mu_j & \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ii}\mu_i^2 + \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} q_{ij}\mu_i\mu_j \end{bmatrix}.$$

6. Двухточечная краевая задача. Рассмотрим краевую задачу

$$z'' + \alpha z = f(t, z, z'), \quad z(0) = z(\pi) = 0. \tag{43}$$

Нелинейность $f(t, z, y) : [0, \pi] \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и удовлетворяющей оценке

$$| f(t, z, y) | \leqslant k_1 | z | + k_2 | y | + c, \quad -\infty < z, \quad y < \infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi. \tag{44}$$

При $\alpha \neq n^2$, $n \in \mathbb{N}$ краевая задача (43) эквивалентна операторному уравнению

$$x(t) = f[t, Ax(t), A_1 x(t)], \tag{45}$$

где A и A_1 — действующие в $L_2 = L_2(0, \pi)$ вполне непрерывные операторы

$$Ax(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha} (x(t), \sin nt) \sin nt \tag{46}$$

и

$$A_1 x(t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \alpha} (x(t), \sin nt) \cos nt. \tag{47}$$

Эквивалентность задачи (43) уравнению (45) означает, что каждому решению $x(t) \in L_2$ операторного уравнения (45) соответствует решение $z(t) = Ax(t) \in C^2$ задачи (43) и, обратно, каждому решению $z(t) \in C^2$ задачи (43) соответствует решение $x(t) = f[t, z(t), z'(t)]$ уравнения (45).

Отметим, что каждое решение $x(t) \in L_2$ операторного уравнения (45) является непрерывной функцией. Отметим также, что значения операторов (46) и (47) связаны соотношением $\frac{d}{dt} Ax(t) \equiv A_1 x(t)$.

Теорема 5. *Пусть совместная норма $N(k_1 A, \ k_2 A_1) = N(k_1 A, k_2 A_1; \ L_2, |\cdot|)$ операторов $k_1 A$ и $k_2 A_1$ меньше 1. Тогда двухточечная краевая задача (43) имеет по крайней мере одно дважды непрерывно дифференцируемое решение.*

Утверждение теоремы 5 вытекает из принципа Шаудера: вполне непрерывный в L_2 оператор $x(t) \to f[t, Ax(t), A_1x(t)]$ оставляет инвариантным шар $\{\|x\| \leqslant [1 - N(k_1A, k_2A_1)]^{-1} c\sqrt{\pi}\} \in L_2$.

Можно привести пример нелинейности $f(t, z, y)$, для которой верна оценка (44), но $N(k_1A, k_2A_1) = 1$, и задача (43) не имеет ни одного абсолютно непрерывно дифференцируемого решения.

Так как нормы операторов (46) и (47) в L_2 определяются равенствами $\|A\| = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} |n^2 - \alpha|^{-1}$, $\|A_1\| = \max\limits_{n\in\mathbb{N}} n|n^2 - \alpha|^{-1}$, то утверждение теоремы 5 остается в силе, если вместо $N(k_1A, k_2A_1) < 1$ выполняется более жесткое ограничение

$$k_1 \max_{n\in\mathbb{N}} |n^2 - \alpha|^{-1} + k_2 \max_{n\in\mathbb{N}} n|n^2 - \alpha|^{-1} < 1. \tag{48}$$

В частности, при $1 < \alpha < 2$ оба максимума в (48) достигаются при $n = 1$; поэтому (48) имеет в этом случае вид

$$k_1 + k_2 < \alpha - 1. \tag{49}$$

При $2 \leqslant \alpha \leqslant 2\frac{1}{2}$ ограничение (48) принимает вид

$$\frac{k_1}{\alpha - 1} + \frac{2k_2}{4 - \alpha} < 1.$$

Нетрудно записать (48) и для других значений α. Если $n^2 < \alpha \leqslant n^2 + n$, то $k_1\|A\| + k_2\|A_1\| = \dfrac{k_1 + k_2n}{\alpha - n^2}$; если $n^2 + n + \dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant (n+1)^2$, то $k_1\|A\| + k_2\|A_1\| = \dfrac{k_1 + k_2(n+1)}{(n+1)^2 - \alpha}$; если $n^2 + n < \alpha \leqslant n^2 + n + \dfrac{1}{2}$, то $k_1\|A\| + k_2\|A_1\| = \dfrac{k_1}{\alpha - n^2} + \dfrac{k_2(n+1)}{(n+1)^2 - \alpha}$. Далее будут приведены примеры оценок совместной нормы операторов k_1A и k_2A_1, которые приводят к лучшим, чем (48), условиям разрешимости задачи (43). Отдельно рассматриваются случаи $1 < \alpha < 2$ и $2 < \alpha < 2\frac{1}{2}$. При больших, чем $2\frac{1}{2}$, значениях α можно провести аналогичные построения.

7. Случай $1 < \alpha < 2$. В этом случае условие разрешимости задачи (43) имеет вид (49). Теорема 3 приводит к менее ограничительным условиям.

Разобьем L_2 в прямую сумму подпространств

$$E_0 = \{x_0(t) : x_0(t) = \xi \sin t, \xi \in R^1\}, \; E_1 = \{x_1(t) : (x_1(t), \sin t) = 0\}. \tag{50}$$

Для операторов A и A_1 верны соотношения (33)—(36), причем $\lambda_A = \lambda_{A_1} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, $\mu_A = \dfrac{1}{4 - \alpha}$, $\mu_{A_1} = \dfrac{2}{4 - \alpha}$, $\gamma = \dfrac{2}{\pi}$. Поэтому величина $N(k_1A, k_2A_1)$ допускает оценку

$$2N^2(k_1A, k_2A_1) \leqslant D\left(k_1^2, k_1k_2, k_2^2, \frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{\alpha - 1}, \frac{1}{4 - \alpha}, \frac{2}{4 - \alpha}, \frac{2}{\pi}\right),$$

где D—функция (37). Условие (48) разрешимости задачи (43) можно заменить условием $D < 2$. Это условие при $1 < \alpha < \alpha_0$, $\alpha_0 \in (1, 2)$, при любых k_1 и k_2 менее ограничительно, чем (48). При $\alpha_0 \leqslant \alpha < 2$ условие $D < 2$ менее ограничительно, чем (48), лишь при достаточно малых отношениях k_2/k_1.

Например, пусть $\alpha = 1\frac{1}{2}$, а нелинейность $f(t, z, y)$ удовлетворяет оценке (44), в которой $k_1 = k_2 = k$. Тогда условие (48) имеет вид $k < 1/4$, а условие $D < 2$ приводит к менее ограничительному соотношению $k < \approx 0{,}27$.

8. Случай $2<\alpha<2\frac{1}{2}$. В этом случае выполняются оценки

$$||Ax||^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^2-\alpha|}x_n^2,\quad \|A_1x\|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{|n^2-\alpha|}x_n^2,$$

где x_n — коэффициенты разложения вектора x по ортонормированному в L_2 базису $\{e_n(t)\}=\{\sqrt{2\pi^{-1}}\sin nt\}$. Для получения менее ограничительных, чем (48), условий разрешимости двухточечной краевой задачи (43) воспользуемся теоремой 2 при $q_1=k_1^2,\ q_2=k_1k_2,\ q_3=k_2^2,\ k_2\neq 0$. Так как при $2<\alpha<2\frac{1}{2}$ верны неравенства $(\alpha-1)^{-1}>(4-\alpha)^{-1}>\ldots>(n^2-\alpha)^{-1}>\ldots$ и неравенства $2(4-\alpha)^{-1}>(\alpha-1)^{-1}>3(9-\alpha)^{-1}>\ldots>n(n^2-\alpha)^{-1}>\ldots$, то

$$J_1=\max\left\{\frac{1}{(\alpha-1)^2}(k_1+k_2)^2,\ \frac{1}{(4-\alpha)^2}(k_1+2k_2)^2\right\}.$$

При $\frac{k_1}{k_2}>\frac{3(\alpha-2)}{5-2\alpha}$ выполняется равенство $J_1=\left(\frac{k_1+k_2}{\alpha-1}\right)^2$, при $\frac{k_1}{k_2}\leqslant\frac{3(\alpha-2)}{5-2\alpha}$ — равенство $J_1=\left[\frac{k_1+2k_2}{4-\alpha}\right]^2$. Перейдем к оценке величины J_2. При

$$\frac{\alpha^2-4}{2(5-2\alpha)}<\frac{k_1}{k_2}<\frac{\alpha^2-4}{5-2\alpha}\tag{51}$$

верно включение $\{(\alpha-1)^{-2},\ (4-\alpha)^{-2},\ (\alpha-1)^{-2},\ 4(4-\alpha)^{-2}\}\in\Re(k_1^2,\ k_1k_2,\ k_2^2)$ и поэтому выполняется равенство

$$J_2=\frac{k_1^2}{\alpha^2-4}+\frac{k_2^2}{5-2\alpha}.$$

Если же неравенства (51) не выполняются, то заведомо $J_1\geqslant J_2$. Так как при всех $\alpha\in\left(2,\ 2\frac{1}{2}\right)$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{\alpha^2-4}{2(5-2\alpha)}<\frac{3(\alpha-2)}{5-2\alpha}<\frac{\alpha^2-4}{5-2\alpha},$$

то

$$N(k_1A,\ k_2A_1)\leqslant\begin{cases}\dfrac{k_1+2k_2}{4-\alpha} & \text{при } \dfrac{k_1}{k_2}\leqslant\dfrac{\alpha^2-4}{2(5-2\alpha)},\\[2ex] \sqrt{\dfrac{k_1^2}{\alpha^2-4}+\dfrac{k_2^2}{5-2\alpha}} & \text{при } \dfrac{\alpha^2-4}{2(5-2\alpha)}<\dfrac{k_1}{k_2}<\dfrac{\alpha^2-4}{5-2\alpha},\\[2ex] \dfrac{k_1+k_2}{\alpha-1} & \text{при } \dfrac{\alpha^2-4}{5-2\alpha}\leqslant\dfrac{k_1}{k_2}.\end{cases}$$

9. Односторонние условия разрешимости двухточечной краевой задачи. В [3] приведены условия существования решения краевой задачи

$$x''+f(t,\ x,\ x')=0,\quad x(0)=x(\pi)=0,\tag{52}$$

имеющие вид односторонних ограничений

$$\begin{gathered}f(t,\ x,\ y)\leqslant k_1|x|+k_2|y|+a(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\pi,\quad x\geqslant 0,\quad -\infty<y<\infty,\\ f(t,\ x,\ y)\geqslant -k_1|x|-k_2|y|-a(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\pi,\quad x\leqslant 0,\quad -\infty<y<\infty.\end{gathered}\tag{53}$$

Показано, что при $k_1+k_2<1$, $k_1, k_2 \geqslant 0$, оценки (53) гарантируют разрешимость задачи (52). Полученные оценки величины (6) позволяют ослабить основное ограничение $k_1+k_2<1$.

Следуя [3], заменим (52) эквивалентным операторным уравнением

$$x = Hf(t, Hx, Vx), \tag{54}$$

в котором

$$Hx(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x(t), \sin nt)\sin nt, \quad Vx(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(x(t), \sin nt)\cos nt.$$

Справедливы равенства $\frac{d}{dt}Hx(t) = Vx(t)$ и $H^2 = -A$, где A — оператор (46) при $\alpha = 0$. Оператор V изометричен в $L_2 = L_2(0, \pi)$; оператор H вполне непрерывен самосопряжен и положительно определен в L_2, действует и вполне непрерывен как оператор из L_2 в C. Каждому решению $x \in L_2$ уравнения (54) соответствует решение $Hx \in C^2$ задачи (52). При этом функция $f(t, x, y)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных. Как обычно, модуль в L_2 задается равенством $Mx(t) = |x(t)|$.

Т е о р е м а 6. *Пусть справедливо условие*

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\left(k_1, \frac{1}{2}k_2, 0; H, V\right) < 1. \tag{55}$$

Тогда двухточечная краевая задача (52) *имеет по крайней мере одно дважды непрерывно дифференцируемое решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [3]. При этом используется априорная оценка норм в L_2 решений уравнения $x = Hf(t, Hx, Vx)$. Такая оценка в условиях теоремы 6 имеет вид $\|x\| \leqslant \|a(t)\|(1-\mathfrak{J})^{-1}$ и следует из соотношений

$$\|x\|^2 = (x, Hf(t, Hx, Vx)) = (Hx, f(t, Hx, Vx)) \leqslant k_1\|Hx\|^2 + k_2(|Hx|, |Vx|) +$$
$$+ \|a(t)\|\cdot\|Hx\| \leqslant \mathfrak{J}\|x\|^2 + \|a(t)\|\,\|x\|.$$

Для применения теоремы 6 необходимы конструктивные оценки величины $\mathfrak{J}$. Пусть E_0 и E_1 — подпространства (50). Так как $\|Hx_0\| \leqslant \|x_0\|$, $\|Vx_0\| = \|x_0\|$, $x_0 \in E_0$, $\|Hx_1\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1\|$, $\|Vx_1\| = \|x_1\|$, $x_1 \in E_1$, и $(|H\sin t|, |V\sin t|) = \frac{2}{\pi}\|\sin t\|^2$, то (в силу теоремы 3)

$$2\mathfrak{J} \leqslant \sqrt{\left[\frac{3}{4}k_1 + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)k_2\right]^2 + \frac{9}{4}k_2^2} + \frac{5}{4}k_1 + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\right)k_2. \tag{56}$$

Оценка (56) менее ограничительна, чем $\mathfrak{J} \leqslant k_1 + k_2$, при

$$0 < \frac{k_2}{k_1} < \frac{12\pi - 24}{16+\pi} \approx 0{,}72.$$

Таким образом, (55) можно заменить достаточным условием

$$k_1 + k_2 < 1 \text{ при } \frac{k_2}{k_1} \geqslant \frac{12\pi - 24}{16+\pi},$$

$$\sqrt{\left[\frac{3}{4}k_1 + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)k_2\right]^2 + \frac{9}{4}k_2^2} + \frac{5}{4}k_1 + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2}\right)k_2 < 2 \text{ при}$$

$$\frac{k_2}{k_1} < \frac{12\pi - 24}{16+\pi}.$$

1. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения : В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1954.— 324 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.— 351 с.
3. *Красносельский М. А.* Об одной краевой задаче // Изд-во АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**.— С. 241—252.

НПО АСУ «Москва»

Получено 15.01.90