УДК 517.958

А. С. Копец

Разрывные решения в классической теории изгиба пластин

Получены необходимые и достаточные условия существования одного класса аналитических решений уравнений классической теории изгиба пластин в области, образованной удалением из бесконечной плоскости множества точек, принадлежащих произвольному кусочно-гладкому контуру. При этом предполагается, что все компоненты решения данного класса обладают свойством непрерывной продолжимости почти на все точки границы области, а граничные значения являются локально суммируемыми функциями на границе.

Здобуті необхідні та достатні умови існування одного класу аналітичних розв'язків рівнянь класичної теорії згину пластин в області, що утворена вилученням з нескінченної площини множини точок, які належать довільному кусково-гладкому контуру. При цьому передбачається, що всі компоненти розв'язку даного класу мають властивості неперервної продовжуваності майже на всі точки межі області, а самі межові значення являються локально сумовними функціями на межі.

Использование традиционных подходов к постановке и решению краевых задач в классической теории изгиба пластин (теории Кирхгофа) [1] приводит к случаю, когда физические компоненты решения имеют неинтегрируемые особенности в отдельных точках границы. Например, компоненты перерезывающих усилий, получаемые при решении задач классической теории изгиба для упругой пластины с разрезом, имеют такого рода особенности в вершинах разреза [1]. Такой результат противоречит самой процедуре построения уравнений математической модели процесса деформирования упругой пластины.

В данной статье сформулированы условия, учет которых позволит избежать таких противоречий при решении проблем, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния пластин в теории Кирхгофа.

1. Исходная система уравнений и основные определения. Напряженно-деформированное состояние, возникающее при изгибе тонкой пластинки, срединная поверхность которой отнесена к прямоугольной декартовой системе координат Ox_1, x_2, описывается в рамках рассматриваемой теории при помощи определенного набора характеристик, заданных на срединной поверхности и связанных между собой системой

линейных дифференциальных уравнений в частных производных [1]

$$\frac{\partial f_8}{\partial x_2}+\frac{\partial f_7}{\partial x_1}=0,$$

$$f_{i+6}=\frac{\partial f_{i+3}}{\partial x_i}+\frac{\partial f_6}{\partial x_j},$$

$$f_6=-D\,\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right),$$

$$f_{i+3}=-D\left(\frac{\partial f_{i+1}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial f_{j+1}}{\partial x_j}\right),$$

$$f_{i+1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_i};\qquad i,j=1,2;\ i\neq j. \tag{1}$$

Величины f_8, f_7 по своему физическому смыслу — это приведенные к срединной поверхности перерезывающие силы, f_6, f_5, f_4 — крутящие и изгибающие моменты, которые действуют в координатных сечениях пластинки. Функции f_3, f_2 соответствуют углам поворота срединной поверхности пластинки в направлении координатных осей; D, ν — постоянные, характеризующие механические свойства пластинки.

В дальнейшем координатную плоскость отождествляем с двумерным вещественным пространством R^2, элементы которого будем обозначать символами $x=(x_1, x_2)$ и $y=(y_1, y_2)$.

Пусть L — контур на плоскости Ox_1x_2, который имеет конечное число точек самопересечения и может быть отнесен к натуральному параметру s (начальную точку и направление отсчета дуговой абсциссы s считаем заданным):

$$L=\{(x_1,x_2)\colon\ x_1=\xi_1(s),\ x_2=\xi_2(s),\ s\in[a,b]\}.$$

Очевидно, если $\xi_1(s)$, $\xi_2(s)$ и их первые производные непрерывны почти всюду (за исключением конечного множества значений параметра s) в заданном интервале $[a, b]$, то контур является кусочно-гладким. В том случае, когда эти функции вместе с первыми производными непрерывны всюду на $[a, b]$, контур будет гладким. Гладкий контур замкнут, если $\xi_1(a)=\xi_1(b)$ и $\xi_2(a)=\xi_2(b)$.

Контур L на плоскости Ox_1x_2 отождествляем с замкнутым множеством L в пространстве R^2. Элементы этого множества обозначаем символами $t(s)=(\xi_1(s),\ \xi_2(s))$.

Будем говорить, что точка $t(s_*)$ контура L имеет кратность n, если имеется n различных значений $s_1, s_2, \ldots, s_n$ натурального параметра, для которых $t(s_1)=t(s_2)=\ldots=t(s_n)=t(s_*)$.

Нормаль, восстановленную в точке $t(s)$ кусочно-гладкого контура L, будем считать положительной (отрицательной), если при обходе контура в сторону возрастания параметра s нормаль окажется справа (слева).

Заметим, что положительное направление нормали в точке, определяемой значением дуговой абсциссы s, составляет с координатными осями Ox_1 и Ox_2 углы φ_1 и φ_2, величины которых могут быть найдены из соотношений

$$\cos\varphi_1=\frac{d\xi_2}{ds},\quad \cos\varphi_2=-\frac{d\xi_1}{ds}. \tag{2}$$

Рассмотрим произвольный кусочно-гладкий контур L на плоскости Ox_1x_2. Набор функций $\{f_k(x)\}$, $k=\overline{1,8}$, аналитических в открытой области $R^2\setminus L$, удовлетворяющих в этой области уравнениям (1) и терпящих разрыв по линии L, будем называть разрывным решением уравнений классической теории изгиба пластин с линией скачка L.

Разрывное решение с линией скачка L считаем регулярным (квазирегулярным) если 1) все компоненты этого решения f_k, $k=\overline{1,8}$, всюду (почти всюду) непрерывно продолжимы на границу L; 2) граничные значения этих компонент — локально суммируемые функции на контуре L; 3) производные $\partial f_k/\partial x_i$, $i = 1, 2$; $k = \overline{1, 8}$, являются локально суммируемыми функциями в пространстве R^2.

Граничное значение, к которому стремится компонента f_k квазирегулярного разрывного решения при подходе к линии скачка L со стороны положительной (отрицательной) нормали, обозначим символом f_k^+ (f_k^-). Разность граничных значений $f_k^+ - f_k^-$ определяет скачок компоненты f_k квазирегулярного разрывного решения на линии L. Для обозначения этой величины в дальнейшем используем символ $[f_k]$.

Пусть E обозначает множество изолированных точек на кусочно-гладком контуре L, включающее все концы этого контура (если таковые имеются). Будем говорить, что функция $\varphi(s)$, заданная на контуре L, принадлежит классу $H(E)$, если она удовлетворяет условию Гельдера [2, с. 18] на каждой из дуг, получаемых в результате разбиения данного контура множеством точек E, а при подходе точки $t(s) \in L$ к точке $t(s_*) \in E$ по любому непрерывному пути эта функция может быть задана равенством $\varphi(s) = \varphi_*(s)(t(s) - t(s_*))$, $0 \leqslant \alpha < 1$, где $\varphi_*(s)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера в окрестности точки $t(s_*)$ на контуре L (включая эту точку); α — постоянная, вообще говоря, зависящая от направления подхода к точке $t(s_*)$.

Из результатов работы [2] следует, что для всякой функции $\varphi(s)$, заданной на контуре L и принадлежащей классу $H(E)$, сингулярные интегралы

$$I_{ik}(x) = \frac{1}{\pi}\int_L \varphi(s)\frac{x_i - \xi_i(s)}{|x - t(s)|^2}\left(\frac{2(x_i - \xi_i(s))^2}{|x - t(s)|^2}\right)^{k-1} ds;$$

$$i, j, k = 1, 2;\; i \neq j, \tag{3}$$

имеют граничные значения почти всюду на контуре L. Причем последние также относятся к классу $H(E)$ и могут быть найдены с помощью формул Сохоцкого — Племеля [2, с. 55]

$$I_{ik}^{\pm}(t(s_0)) = \pm\varphi(s_0)\cos\varphi_i(s_0)(\cos^2\varphi_i(s_0) - \cos^2\varphi_j(s_0))^{k-1} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_L \varphi(s)\frac{\xi_i(s_0) - \xi_i(s)}{|t(s_0) - t(s)|^2}\left(\frac{2(\xi_j(s_0) - \xi_j(s))^2}{|t(s_0) - t(s)|^2}\right)^{k-1} ds;$$

$$i,\; j,\; k = 1,\; 2;\; i \neq j. \tag{4}$$

Здесь и далее используется обозначение $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

2. Интегральные представления квазирегулярных разрывных решений.

Теорема 1. *Пусть L — произвольный замкнутый гладкий контур конечной длины на плоскости Ox_1x_2, имеющий конечное число точек самопересечения. Набор функций $\{f_k(x)\}$, $k = \overline{1, 8}$, заданных в открытой области $R^2 \setminus L$, определяет квазирегулярное разрывное решение уравнений классической теории изгиба пластин с граничными значениями из класса $H(E)$ тогда и только тогда, когда* 1) *скачки граничных значений заданного множества функций определены почти для всех точек контура L и принадлежат классу $H(E)$;* 2) *скачки $[f_k]$, $k = \overline{1, 3}$, и сумма $[f_4] + [f_5]$ дифференцируемы по параметру дуги s данного контура почти всюду за исключением точек, принадлежащих множеству $E \subset L$) и их производные связаны с остальными функциями скачка соотношениями*

$$\frac{d[f_1]}{ds} = [f_3]\cos\varphi_1 - [f_2]\cos\varphi_2,$$

$$D(1 - \nu)\frac{d[f_2]}{ds} = -([f_6]\cos\varphi_1 + [f_5]\cos\varphi_2) + \frac{[f_4] + [f_5]}{(1 + \nu)}\cos\varphi_2,$$

$$D(1-\nu)\frac{d[f_3]}{ds}=([f_6]\cos\varphi_2+[f_4]\cos\varphi_1)-\frac{[f_4]+[f_5]}{(1+\nu)}\cos\varphi_1,$$

$$\frac{d}{ds}([f_4]+[f_5])=(1+\nu)([f_8]\cos\varphi_1-[f_7]\cos\varphi_2); \tag{5}$$

3) *для всякой точки контура L, принадлежащей множеству E и имеющей кратность n (каждой такой точке соответствиет свой набор $s_1, s_2, \ldots s_n$ значений дуговой абсциссы), выполняются условия*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\{[f_i](s_k+\varepsilon)-[f_i](s_k-\varepsilon)\}=0; \qquad i=\overline{1,3};$$

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{[f_4](s_k+\varepsilon)+[f_5](s_k+\varepsilon)-[f_4](s_k-\varepsilon)-[f_5](s_k-\varepsilon)\}=0 \tag{6}$$

(*для* $s_k=a$ *следует считать* $[f_i](s_k-\varepsilon)=0$, *а для* $s_k=b-[f_i](s_k+\varepsilon)=0$);
4) *значения функций* f_k, $k=\overline{1,8}$, *в области* $R^2\setminus L$ *выражаются через скачки их граничных значений и значения функций* f_k^0, *которые аналитичны в* R^2 *и удовлетворяют системе уравнений* (1),

$$f_k(x)=f_k^0(x)+\int_L\sum_{l=1}^{8}F_{kl}(x-t(s))\,h_l(s)\,ds; \qquad k=\overline{1,8}; \tag{7}$$

где

$$h_i=[f_1]\cos\varphi_i,\ h_{i+2}=[f_{i+1}]\cos\varphi_i,\ h_5=[f_2]\cos\varphi_2+[f_3]\cos\varphi_1,$$

$$h_{i+5}=[f_{i+3}]\cos\varphi_i+[f_6]\cos\varphi_j,\ h_8=[f_7]\cos\varphi_1+[f_8]\cos\varphi_2; \tag{8}$$

$$F_{1i}(x)=\left(\frac{\partial^3}{\partial x_i^3}+\frac{\partial^3}{\partial x_i\partial x_j^2}\right)\Phi(x),\ F_{1(i+2)}(x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)\Phi(x),$$

$$F_{15}(x)=(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\Phi(x),\ F_{1(i+5)}(x)=-\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi(x),$$

$$F_{18}(x)=-\frac{1}{D}\Phi(x),$$

$$F_{(i+1)l}(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}F_{1l}(x),\ F_{(i+3)l}(x)=-D\left(\frac{\partial}{\partial x_i}F_{(i+1)l}(x)+\nu\frac{\partial}{\partial x_j}F_{(j+1)l}(x)\right),$$

$$F_{6l}(x)=-D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}F_{2l}(x)+\frac{\partial}{\partial x_1}F_{3l}(x)\right),\ F_{(i+6)l}(x)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}F_{(i+3)l}(x)+\frac{\partial}{\partial x_j}F_{6l}(x); \qquad i,j=1,2;\ i\neq j; \tag{9}$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{8\pi}|x|^2\ln|x|. \tag{10}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть множество функций $\{f_k\}$, $k=\overline{1,8}$, определяет квазирегулярное разрывное решение с линией скачка L заданного вида. Причем такое, что граничные значения его принадлежат рассматриваемому классу $H(E)$.

Поскольку функции f_k, $\partial f_k/\partial x_i$, $k=\overline{1,8}$; $i=1,2$, локально суммируемы в R^2 по определению, следовательно, каждой из них может быть поставлен в соответствие (согласно лемме Дюбуа-Реймона [3]) регулярный функционал из пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'(R^2)$. Очевидно, для этих функционалов сохранят свою силу равенства (1). Более того, между регулярными функционалами f_k и $\partial f_k/\partial x_i$ существует связь, которая определяется формулой

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \partial_i f_k - ([f_k]\cos\varphi_i)\,\delta_L, \tag{11}$$

вытекающей из совокупности свойств функций f_k и результатов работы [4].

Здесь и далее для обозначения регулярных обобщенных функций используются те же символы, что и для соответствующих локально суммируемых функций. Символ ∂_i обозначает обобщенную производную по координате x_i; запись m (s δ_L соответствует контурной дельта-функции с плотностью m (s), локально суммируемой по контуру L. Операцию свертки двух обобщенных функций будем отмечать символом *.

С помощью зависимостей (11) функциональные равенства (1) преобразуются в систему функциональных уравнений (при их записи используем обозначения (8))

$$\begin{gathered}
f_{i+1} = \partial_i f_1 - h_i\delta_L,\\
f_{i+3} = -D\,(\partial_i f_{i+1} + \nu\partial_j f_{j+1} - h_{i+2}\delta_L - \nu h_{j+2}\delta_L),\\
f_6 = -D\,\frac{1-\nu}{2}\,(\partial_2 f_2 + \partial_1 f_3 - h_5\delta_L),\\
f_{i+6} = \partial_i f_{i+3} + \partial_j f_6 - h_{i+5}\delta_L,\\
\partial_2 f_8 + \partial_1 f_7 - h_8\delta_L = 0; \qquad i, j = 1, 2;\ i \neq j.
\end{gathered} \tag{12}$$

Исключая из нее величины f_k, $k = \overline{2, 8}$, приходим к одному уравнению

$$(\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4)\, f_1 = g. \tag{13}$$

Выражение для функционала g, фигурирующего в этом уравнении, имеет вид

$$\begin{gathered}
g = -\frac{1}{D}\,\{h_8\delta_L + \partial_2(h_7\delta_L) + \partial_1(h_6\delta_L)\} + (1+\nu)\,\partial_1\partial_2(h_5\delta_L) + \\
+ \partial_2^2(h_4\delta_L + \nu h_3\delta_L) + \partial_1^2(h_3\delta_L + \nu h_4\delta_L) + \\
+ (\partial_2^3 + \partial_1^2\partial_2)(h_2\delta_L) + (\partial_1^3 + \partial_1\partial_2^2)(h_1\delta_L).
\end{gathered} \tag{14}$$

Так как носитель обобщенной функции g (совпадающий с множеством точек контура L) — по предположению компактное множество в R^2, то всякое решение уравнения (13) в пространстве $\mathcal{D}'$ (R^2) имеет вид [3]

$$f_1 = f_1^0 + \Phi * g, \tag{15}$$

где Φ — фундаментальное решение для бигармонического оператора, явный вид которого определяется формулой (10) [5, с. 248], f_1^0 — регулярный функционал, удовлетворяющий бигармоническому уравнению.

Отметим, что вследствие гипоэллиптичности бигармонического оператора регулярному функционалу f_1^0 соответствует бесконечно дифференцируемая в R^2 функция [3].

Подставляя (14) в (15) и учитывая свойства дифференцирования свертки обобщенных функций, получаем выражение, использование которого в соотношениях (12) позволяет представить компоненты решения систем в виде

$$f_k + f_k^0 + \sum_{l=1}^{8} F_{kl} * h_l\delta_L - e_k\delta_L, \tag{16}$$

где

$$f_{i+1}^0 = \partial_i f_1^0,\ f_{i+3}^0 = -D\,(\partial_i f_{i+1}^0 + \nu\partial_j f_{j+1}^0),$$

$$f_6^0 = -D\frac{1-\nu}{2}(\partial_2 f_2^0 + \partial_1 f_3^0),\ f_{i+6}^0 = \partial_i f_{i+3}^0 + \partial_j f_6^0; \tag{17}$$

$$e_1 = 0,\ e_{i+1} = h_i,\ e_{i+3} = -D(h_{i+2} + \nu h_{j+2}),$$

$$e_6 = -D\frac{1-\nu}{2}h_5,\ e_{i+6} = h_{i+6}, \qquad i,\ j = 1, 2;\ i \neq j.$$

Выражения для функционалов F_{kl} определяются формулами (9), если в последних символах классической производной $\partial/\partial x_i$ заменить символом обобщенной производной ∂_i.

Так как функция (10), соответствующая фундаментальному решению бигармонического оператора, принадлежит $C^\infty(R^2 \setminus \{0\})$, то согласно утверждению, сформулированному в [3, с. 70] сужения функционалов (16) на открытую область $R^2 \setminus L$ — бесконечно дифференцируемые функции в этой области и значения этих сужений во всякой внутренней точке области могут быть найдены по формуле

$$f_k(x) = f_k^0(x) + \sum_{l=1}^{8}(h_l(s)\,\delta_L(y),\ F_{kl}(x-y)), \quad x \in R^2 \setminus L. \tag{18}$$

Выражение в круглых скобках — билинейная форма, которая определяет значение обобщенной функции с компактным носителем $h_l(s)\,\delta_L$ на бесконечно дифференцируемой функции $F_{kl}(x-y)$.

Равенства (17) свидетельствуют о том, что функции $f_k^0(x)$, $k=\overline{1,8}$ составляют аналитическое решение системы (1) в R^2.

С помощью определения контурной дельта-функции выражения (18) могут быть представлены в форме (7).

Поскольку сужение функциональных равенств (12) на область $R^2 \setminus L$ приводит к классическим равенствам (1), то можно утверждать, что построено общее представление квазирегулярного разрывного решения с линией скачка L заданного вида.

Убедимся теперь в том, что граничные значения рассматриваемого квазирегулярного разрывного решения удовлетворяют остальным условиям теоремы.

В силу непрерывной продолжимости компонент данного решения почти на все точки контура L для окрестности всякой неособой точки $t(s) \in L$ должны выполняться соотношения, вытекающие из уравнений (1) и формулы (2):

$$\frac{df_1^\pm}{ds} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^\pm \frac{d\xi_1}{ds} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^\pm \frac{d\xi_2}{ds} = -f_2^\pm\cos\varphi_2 + f_3^\pm\cos\varphi_1,$$

$$\frac{df_2^\pm}{ds} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)^\pm \frac{d\xi_1}{ds} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^\pm \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{1}{D(1-\nu^2)}\{(f_4^\pm - \nu f_5^\pm)\cos\varphi_2 -$$
$$-(1+\nu)f_6^\pm\cos\varphi_1\},$$

$$\frac{df_3^\pm}{ds} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)^\pm \frac{d\xi_1}{ds} + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)^\pm \frac{d\xi_2}{ds} = \frac{1}{D(1-\nu^2)}\{(1+\nu)f_6^\pm\cos\varphi_2 -$$
$$-(f_5^\pm - \nu f_4^\pm)\cos\varphi_1\},$$

$$\frac{d(f_4+f_5)^\pm}{ds} = \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1} + \frac{\partial f_5}{\partial x_1}\right)^\pm \frac{d\xi_1}{ds} + \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_2} + \frac{\partial f_5}{\partial x_2}\right)^\pm \frac{d\xi_2}{ds} =$$
$$= (1+\nu)\{-f_7^\pm\cos\varphi_2 + f_8^\pm\cos\varphi_1\}.$$

Анализируя контурные интегралы в представлениях (7), приходим к выводу, что граничные значения у этих интегралов существуют почти всюду только в том случае, когда для каждой точки из множества E выполняются условия (8). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в области $R^2 \setminus L$ заданы функции f_k, $k = \overline{1, 8}$, которые на контуре L имеют граничные значения и удовлетворяют условиям 1—4 теоремы.

Аналитичность функций f_k в области $R^2 \setminus L$ со всей очевидностью следует из представлений (7). Подставляя эти же представления в исходную систему уравнений (1), легко убедиться, что рассматриваемые функции удовлетворяют исходной системе уравнений.

Каждый контурный интеграл в представлениях (7) с учетом зависимостей (2), (5) может быть разбит на сумму сингулярных интегралов вида (3) и интегралов с регулярным ядром. Осуществляя в выражениях (7) такое разбиение и переходя в них к пределу, когда точка $x \in R^2 \setminus L$ стремится к точке $t(s_0) \in L$, оставаясь все время со стороны положительной либо отрицательной нормали, с помощью формул (4) находим

$$f_k^{\pm}(t(s_0)) = \pm \frac{1}{2} r_k(s_0) + \int_L \sum_{l=1}^{8} F_{kl}(t(s_0) - t(s)) h_l(s)\, ds, \qquad k = \overline{1, 8}, \tag{19}$$

где

$$r_1(s) = [f_1],$$

$$r_{i+1}(s) = (-1)^i \frac{d[f_1]}{ds} \cos\varphi_j + [f_{i+1}] \cos^2\varphi_i + [f_{j+1}] \cos\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

$$r_{i+3}(s) = (-1)^{i+1}(1-\nu)\left\{D \frac{d[f_{i+1}]}{ds} \cos\varphi_j (2\cos^2\varphi_i + (1+\nu)\cos^2\varphi_j) + \right.$$

$$\left. + (1-\nu) D \frac{d[f_{j+1}]}{ds} \cos\varphi_i \cos^2\varphi_j \right\} +$$

$$+ ([f_{i+3}] \cos\varphi_i + [f_6] \cos\varphi_j) \cos\varphi_i (\cos^2\varphi_i + \nu\cos^2\varphi_j) +$$

$$+ ([f_{j+3}] \cos\varphi_j + [f_6] \cos\varphi_i) \cos\varphi_j (\cos^2\varphi_i + \nu\cos^2\varphi_j),$$

$$r_6(s) = (1-\nu)\left\{D \frac{d[f_3]}{ds} \cos\varphi_2 (\cos^2\varphi_2 + \nu\cos^2\varphi_1) - D \frac{d[f_2]}{ds} \cos\varphi_1 \times \right.$$

$$\times (\cos^2\varphi_1 + \nu\cos^2\varphi_2) + ([f_4]\cos\varphi_1 + [f_6]\cos\varphi_2)\cos\varphi_2\cos^2\varphi_1 +$$

$$+ ([f_5]\cos\varphi_2 + [f_6]\cos\varphi_1)\cos\varphi_1\cos^2\varphi_2),$$

$$r_{i+6}(s) = \frac{(-1)^i}{1+\nu} \frac{d}{ds}([f_4] + [f_5]) \cos\varphi_j + [f_{i+6}]\cos^2\varphi_i +$$

$$+ [f_{j+6}] \cos\varphi_1 \cos\varphi_2, \qquad i, j = 1, 2;\ i \neq j. \tag{20}$$

Контурный интеграл в формуле (19) следует понимать как главное значение по Коши [2].

Подстановка зависимостей (5) в соотношения (20) приводит к равенствам $r_k(s) = [f_k]$, $k = \overline{1, 8}$, которые свидетельствуют о том, что разности граничных значений величин, найденных по формулам (18), совпадают со значениями соответствующих функций скачка разрывного решения.

Из теоремы Племеля — Привалова и результатов работы [2] следует, что функции, построенные по формулам (19), будут принадлежать классу $H(E)$ на контуре L.

Остается показать, что производные $\partial f_k / \partial x_i$, $i = 1, 2$; $k = \overline{1, 8}$, — локально суммируемые функции всюду в R^2. Дифференцируя выражения (7) по координате x_i, $i = 1, 2$, убеждаемся, что получаемые в результате такой операции представления определяют функции, которые являются аналитическими в области $R^2 \setminus L$. Таким образом, предположение о локальной суммируемости данных функций в R^2 окажется истинным, если показать, что все они суммируемы в окрестности контура L. Доказательство этого факта несложное и проводится с учетом известных оценок поведения интеграла типа Коши и его производной вблизи линии интегрирования [2]. Теорема доказана.

Следствие. *Если в условиях предыдущей теоремы положить* $E = \varnothing$, *то множество функций, удовлетворяющее всем требованиям теоремы, определяет регулярное разрывное решение для системы уравнений* (1).

Теорема 1 допускает обобщение на кусочно-гладкие контуры.

Теорема 2. *Пусть* L — *кусочно-гладкий контур на плоскости* Ox_1x_2, *который является частью некоторого гладкого замкнутого контура* L_c *конечной длины* ($L \subset L_c$), E — *множество изолированных точек на контуре* L, F — *совокупность всех тех точек, при переходе через которые направление положительной нормали к контуру* L *изменяется скачкообразно. Набор функций* $\{f_k\}$, $k = \overline{1, 8}$, *заданных в открытой области* $R^3 \diagdown L$, *определяет квазирегулярное разрывное решение уравнений* (1) *с граничными значениями из класса* $H(E)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* 1, 2, 4 *теоремы 1 и такое условие: для всякой точки* $t(S_c) \in E \cup F$, *которой соответствует* n *значений* $s_{c1}, s_{c2}, \ldots, s_{cn}$ *дуговой абсциссы контура* L_c, *выполняются соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{n} \{[f_i]_c (s_{ck} + \varepsilon) - [f_i]_c (s_{ck} - \varepsilon)\} = 0, \qquad i = \overline{1, 3},$$

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \{[f_4](s_{ck} + \varepsilon) + [f_5](s_{ck} + \varepsilon) - [f_4]_c (s_{ck} - \varepsilon) - [f_5]_c (s_{ck} - \varepsilon)\} = 0,$$

где $[f_i]_c$ — *разность граничных значений функции* f_i *на контуре* L_c.

Регулярность разрывного решения в этом случае обеспечивается выполнением дополнительного условия: скачки $[f_k]_c$, $k = \overline{1, 8}$, удовлетворяют условию Гельдера на гладком контуре L_c.

1. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин.— Киев : Наук. думка, 1979.— 400 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 512 с.
3. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1976. — 280 с.
4. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук.— М. : Мир, 1965.— 408 с.
5. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике.— М. : Мир, 1978.— 520 с.

Львов. ун-т

Получено 20.06.88