УДК 517.5

А. В. Бондарь, В. Ю. Романенко

Об условиях голоморфности липшицевых отображений гильбертовых пространств

Изучаются локально липшицевы отображения областей бесконечномерных гильбертовых пространств и доказывается теорема о голоморфности таких отображений, удовлетворяющих операторным условиям $\mathbb{C}$-дифференцируемости.

Вивчаються локально ліпшицеві відображення областей нескінченновимірних гільбертових просторів та доведена теорема про голоморфність таких відображень, які задовольняють операторним умовам $\mathbb{C}$-диференційовності.

В настоящей статье исследуются локально липшицевы отображения, обладающие либо постоянным оператором растяжения, либо постоянным оператором вращения. При этом используются определения и обозначения, введенные в [1, 2].

Теорема 1. *Пусть D — область комплексного гильбертова пространства H, S — подмножество в D, имеющее нулевую k-меру Хаусдорфа при некотором натуральном k, и $f : D \to H$ — локально липшицево отображение, принадлежащее семейству $\mathcal{F}(D, D\setminus S)$. Предположим, что в каждой точке $a \in D\setminus S$ выполняется одно из следующих условий:*

А) f обладает в точке a постоянным левым оператором растяжения $R_a^{(l)}$, и существует такое целое n, $2n \geqslant k$, что для любого $\mathbb{C}$-линейного подпространства $F \subset H$ размерности n оператор $f_{zF}(b)$ отличен от нулевого оператора в тех точках b сечения $(a+F)\cap D$, в которых существует отличная от нуля производная $f'_F(b)$ отображения f вдоль F;

Б) f обладает в точке a постоянным оператором вращения U_a;

В) Действительные или мнимые части всех производных операторов $L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a) \in \mathcal{P}(f, a)$ совпадают между собой.

Тогда f — голоморфное отображение.

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая теорема, представляющая также самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть Q — измеримое подмножество области $D \subset \mathbb{R}^n$, H — сепарабельное гильбертово пространство и $f : D \to H$ — отображение, удовлетворяющее условию*

$$\|f(z) - f(a)\| \leqslant M\|z - a\|, \quad \forall a \in Q, \quad \forall z \in D, \tag{1}$$

где $M = \mathrm{const}$. Тогда f дифференцируемо почти во всех (в смысле n-меры Лебега) точках множества Q.

Замечание. Если отображение f непрерывно, то требование сепарабельности H можно опустить.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 имеет локальный характер. Поэтому без ограничения общности в доказательстве можно считать, что D — n-мерный открытый шар в $\mathbb{R}^n$. Так как пространство H сепарабельно, то оно имеет счетный ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$. Пусть P_α — ортогональный проектор на одномерное подпространство $H_\alpha = \{y \in H : y = \lambda e_\alpha,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^1$. Каждая из функций $f_\alpha = P_\alpha \circ f$ удовлетворяет условию (1) и поэтому по теореме Степанова [3, с. 236] $\mathbb{R}$-дифференцируема почти в каждой точке множества Q. Обозначим через Q_α множество тех точек $a \in Q$, в которых существует производная $f'_\alpha(a)$, и положим $Q' = \bigcap_{\alpha=1}^{\infty} Q_\alpha$. Тогда $\operatorname{mes}(Q \setminus Q') = 0$ и $\forall a \in Q'$ существует производная $f'_\alpha(a)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$.

Пусть $P^{(m)}$ — ортогональный проектор на линейную оболочку первых m ортов базиса $\mathscr{E}$. Тогда $P^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{m} P_\alpha$, отображение $f_{(m)} = P^{(m)} \circ f$ $\mathbb{R}$-дифференцируемо в каждой точке $a \in Q'$ и

$$f'_{(m)}(a) = \sum_{\alpha=1}^{m} f'_\alpha(a).$$

Докажем, что $\forall e \in \mathbb{R}^n$ существует предел

$$\lim_{m\to\infty} f'_{(m)}(a)\, e = f'(a)\, e, \tag{2}$$

определяющий некоторое линейное непрерывное отображение $f'(a)$, $f'(a): \mathbb{R}^n \to H$. Если существование предела (2) доказано, то непрерывность и линейность оператора $f'(a)$ вытекает в силу теоремы из [4, с. 56].

Очевидно, достаточно доказать (2) для векторов e, пробегающих единичную сферу в $\mathbb{R}^n$. Итак, пусть $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, и $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Обозначим

$$\frac{f(a + \lambda_k e) - f(a)}{\lambda_k} = \zeta_k \in H. \tag{3}$$

Из (1) вытекает, что $\|\zeta_k\| \leqslant M$ $\forall k = 1, 2, \ldots$. Поэтому из последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому вектору $\zeta \in H$ [5, с. 80]. Сохранив за этой подпоследовательностью то же обозначение, будем считать, что сама последовательность (3) слабо сходится к ζ. В частности, $\forall \alpha = 1, 2, \ldots$

$$P_\alpha \zeta = \lim_{k\to\infty} P_\alpha \zeta_k = \lim_{k\to\infty} \frac{P_\alpha \circ f(a + \lambda_k e) - P_\alpha \circ f(a)}{\lambda_k} = f'_\alpha(a)\, e,$$

и поэтому

$$P^{(m)} \zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} P_\alpha \zeta = \sum_{\alpha=1}^{m} f'_\alpha(a)\, e = f'_{(m)}(a)\, e. \tag{4}$$

Так как $\lim_{m\to\infty} P^{(m)} \zeta = \zeta$ существует, то из (4) вытекает, что предел в (2) также существует и равен ζ. Таким образом, наряду с (2) $\forall e \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$f'_{(m)}(a)\, e = p^{(m)} \circ f'(a)\, e,$$

а из (1) и (2) следует

$$\|f'(a)\| \leqslant M, \quad \|f'_{(m)}(a)\| \leqslant M, \quad \forall m = 1, 2, \ldots.$$

Согласно (1) функция $z \to f_\alpha(z)$ липшицева и, в частности, измерима на Q. Поэтому определенная почти всюду на Q функция $a \to f'_\alpha(a)$ также измерима [3, с. 232]. Отсюда следует [6, с. 204], что $\forall m$ измеримо отображение $a \to f'_{(m)}(a)$. Из (2) вытекает

$$\|f'_{(m)}(a) - f'(a)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, H)} \to 0$$

при $m \to \infty$. Действительно, если $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и для заданного $\varepsilon > 0$ $m(\varepsilon)$ выбрано в соответствии с (2) так, чтобы $\|f'_{(m)}(a)\tau_k - f'(a)\tau_k\| < \varepsilon$, $\forall k = 1, \ldots, n$, $\forall m > m(\varepsilon)$, то $\forall m > m(\varepsilon)$ справедливо

$$\|f'_{(m)}(a) - f'(a)\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, H)} \leqslant n\varepsilon.$$

Отсюда следует, что отображение $f' : Q' \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, H)$, при котором $a \in Q'$ переходит в $f'(a)$, также измеримо как поточечный предел измеримых отображений. По теореме Лузина [3, с. 89] (справедливой для отображений в сепарабельные метрические пространства) $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое компактное подмножество $K \subset Q'$, что $\operatorname{mes}(Q' \setminus K) < \varepsilon$ и отображение $a \to f'(a)$ непрерывно на K. Поэтому для завершения доказательства теоремы 2 достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если $K \subset Q'$ — такой компакт, что отображение $a \to f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, H)$ непрерывно на K, то в каждой точке плотности (относительно n-меры Лебега) компакта K оператор $f'(a)$ является производной (по Фреше) отображения f.*

Пусть a — точка плотности компакта K, $[a, \zeta]$ — отрезок с концами a и $\zeta \in D$, $K_\zeta = [a, \zeta] \cap K$, $K'_\zeta = [a, \zeta] \setminus K$, $|K'_\zeta|$ — линейная мера множества K'_ζ. Так как отображение $z \to f'(z)$ непрерывно на компакте K, то его модуль непрерывности

$$\omega(r) = \sup\{\| f'(z') - f'(z''), \ z', z'' \in K, \ \| z' - z'' \| < r\}$$

стремится к нулю при $r \to 0$. Докажем, что для любой точки $\zeta \in D$ имеет место оценка

$$\frac{\| f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a) \|}{\| \zeta - a \|} \leqslant \omega(\| \zeta - a \|) + 2M \frac{\| K'_\zeta \|}{\| \zeta - a \|}. \tag{5}$$

Пусть $\zeta \in D$ фиксировано и $\varphi : [0, 1] \to H$ — отображение, определенное равенством

$$\varphi(t) = f[(1 - t) a + t\zeta], \quad t \in [0, 1].$$

Так как D — шар, то отображение φ определено корректно $\forall t \in [0, 1]$. Обозначим через T замкнутое подмножество отрезка $[0, 1]$, состоящее из точки 1 и тех $t \in [0, 1]$, для которых $(1 - t) a + t\zeta \in K_\zeta$. Пусть $\tilde{\varphi} : [0, 1] \to H$ — отображение, совпадающее с φ на T и линейное на каждом интервале смежности (c_k, d_k), $k = 1, 2, \ldots$, к множеству T, т. е.

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in T, \\ \dfrac{\varphi(d_k) - \varphi(c_k)}{d_k - c_k} t + \dfrac{\varphi(c_k) d_k - \varphi(d_k) c_k}{d_k - c_k}, & t \in (c_k, d_k). \end{cases} \tag{6}$$

Из (1) вытекает, что отображение $\tilde{\varphi}$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условию Липшица с константой $M \| \zeta - a \|$. и при любом $\alpha = 1, 2, \ldots$ $P_\alpha \circ \tilde{\varphi} : [0, 1] \to H_\alpha \simeq \mathbb{R}^1$ — липшицева функция. Поэтому производная $(p_\alpha \circ \tilde{\varphi})'(t)$ существует почти всюду на $[0, 1]$ и

$$P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(1) - P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(0) = \int_0^1 (P_\alpha \circ \tilde{\varphi})'(t)\, dt. \tag{7}$$

Кроме того, в каждой точке линейной плотности множества имеем

$$(P_\alpha \circ \tilde{\varphi})'(t) = P_\alpha \circ f'[(1 - t) a + t\zeta](\zeta - a).$$

Действительно, если $t \in T \setminus \{1\}$, $\tau \in T$ и $\tau \to t$, то

$$\frac{f_\alpha[(1 - \tau) a + \tau\zeta] - f_\alpha[(1 - t) a + t\zeta]}{\tau - t} \to f'_\alpha[(1 - t) a + t\zeta](\zeta - a) =$$
$$= P_\alpha \circ f'[(1 - t) a + t\zeta](\zeta - a). \tag{8}$$

Далее, если t — точка плотности множества T и $\tau \in (c_k, d_k)$, $k = k(\tau)$, то

$$\lim_{\tau \to t} \frac{|\tau - c_{k(\tau)}|}{|\tau - t|} = 0.$$

Отсюда и из липшицевости функции $P_\alpha \circ \tilde{\varphi}$ следует, что (8) имеет место $\forall \tau \in [0, 1]$. В самом деле, если $\tau \in (c_k, d_k)$, то

$$\frac{P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(\tau) - P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(t)}{\tau - t} = \frac{P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(\tau) - P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(c_k)}{\tau - t} +$$

$$+ \frac{P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(c_k) - P_\alpha \circ \tilde{\varphi}(t)}{c_k - t} \, \frac{c_k - t}{\tau - t},$$

причем первое слагаемое в приведенном равенстве стремится к нулю при $\tau \to t$, а второе, очевидно, стремится к тому же пределу, что и в (8).

Согласно (6) в каждой точке $t \in (c_k, d_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, существует производная

$$\tilde{\varphi}'(t) = \frac{\varphi(d_k) - \varphi(c_k)}{d_k - c_k} \in H.$$

Во всех точках плотности множества T положим по определению

$$\tilde{\varphi}'(t) = f'[(1 - t)a + t\zeta](\zeta - a).$$

Тогда отображение $t \to \tilde{\varphi}'(t)$ определено почти всюду на отрезке [0, 1] и ограничено по норме константой $M \| \zeta - a \|$. Следовательно, существует интеграл

$$\int_0^1 \tilde{\varphi}'(t)\, dt \in H.$$

Так как P_α — линейный непрерывный оператор и $P_\alpha \circ \tilde{\varphi}'(t) = (P_\alpha \circ \tilde{\varphi})'(t)$, то [6, с. 166] $\forall \alpha = 1, 2, \ldots$

$$P_\alpha \int_0^1 \tilde{\varphi}'(t)\, dt = \int_0^1 P_\alpha \circ \tilde{\varphi}'(t)\, dt = \int_0^1 (P_\alpha \circ \tilde{\varphi})'(t)\, dt.$$

Отсюда и из (7) получаем

$$P_\alpha (\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0)) = P_\alpha \int_0^1 \tilde{\varphi}'(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\tilde{\varphi}(1) - \tilde{\varphi}(0) = \int_0^1 \tilde{\varphi}'(t)\, dt,$$

а так как $\tilde{\varphi}(1) = f(\zeta)$, $\tilde{\varphi}(0) = f(a)$, то

$$f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a) = \int_0^1 (\tilde{\varphi}'(t) - f'(a)(\zeta - a))\, dt. \qquad (9)$$

Положим $T' = [0, 1] \setminus T$. Тогда $| T' | \| \zeta - a \| = | K'_\zeta |$ и из (9) получаем оценку

$$\| f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a) \| \leqslant \int_T \| f'[(1 - t)a + t\zeta] - f'(a) \|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, H)} \| \zeta -$$

$$- a \| \, dt + \int_{T'} \| \tilde{\varphi}'(t) - f'(a)(\zeta - a) \| \, dt \leqslant \omega(\| \zeta - a \|) \| \zeta - a \| + 2M K'_\zeta.$$

Тем самым неравенство (5) доказано.

Обозначим

$$V_\varepsilon = \left\{ \zeta \in D : \frac{\| f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a) \|}{\| \zeta - a \|} < \varepsilon \right\}$$

и докажем, что $\forall \varepsilon > 0$ точка a является точкой плотности множества V_ε. Так как $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $r(\varepsilon) > 0$, что $\omega(r) < (\varepsilon)\ \forall r < r(\varepsilon)$. Положим

$$W_\varepsilon = \{\zeta \in D : |K'_\zeta| < \varepsilon \|\zeta - a\|\}.$$

Тогда из оценки (5) вытекает

$$V_{(2M+1)\varepsilon} \cap B(a, r) \supset W_\varepsilon \cap B(a, r) \quad \forall r < r(\varepsilon),$$

где $B(a, r)$ — шар радиуса r с центром a. Поэтому достаточно доказать, что a — точка плотности множества $W_\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$.

Пусть μ — n-мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, σ — $(n-1)$-мера Хаусдорфа на единичной сфере S пространства $\mathbb{R}^n$, $\chi(A, x)$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Так как a — точка плотности компакта K, то при $r \to 0$

$$q(r) = \frac{\mu[B(a, r) \setminus K]}{\mu[B(a, r)]} \to 0.$$

Используя формулу интегрирования в полярных координатах [3, с. 270], получаем

$$\mu[B(a, r) \setminus K] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi[B(a, r) \setminus K, x]\, d\mu(x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_S \rho^{n-1} \chi[B(a, r) \setminus K,\ a +$$

$$+ \rho x]\, d\rho d\sigma(x) \geqslant \int\limits_0^{|K'_{a+rx}|} \int\limits_S \rho^{n-1} d\rho d\sigma(x) = \frac{1}{n} \int\limits_S |K'_{a+rx}|^n d\sigma(x). \tag{10}$$

Учитывая, что $\mu[B(a, r)] = \dfrac{\sigma(S)}{n} r^n$, из (10) имеем

$$\int\limits_S |K'_{a+rx}|^n d\sigma(x) \leqslant q(r)\, r^n \sigma(S). \tag{11}$$

Пусть $A(r) = \{x \in S : |K'_{a+rx}| > r \sqrt[2n]{q(r)}\}$. Тогда из (11) следует

$$\sigma[A(r)] \leqslant \sigma(S) \sqrt{q(r)}.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $q(r) \to 0$ при $r \to 0$, то найдется такое $r_0(\varepsilon)$, что $\sqrt[2n]{q(r)} < \varepsilon\ \forall r < r_0(\varepsilon)$. Если $x \in S \setminus A(r)$ и $r < r_0(\varepsilon)$, то

$$|K'_{a+rx}| \leqslant r \sqrt[2n]{q(r)} < \varepsilon r.$$

Следовательно, точка $a + rx$ принадлежит W_ε. Отсюда

$$\frac{\mu[W_\varepsilon \cap B(a, r)]}{\mu[B(a, r)]} = \frac{n}{\sigma(S) r^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_S \rho^{n-1} \chi[W_\varepsilon \cap B(a, r), a + \rho x]\, d\rho d\sigma(x) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{\sigma(S) r^n} \int\limits_{S \setminus A(r)} \int\limits_0^r \rho^{n-1} d\rho d\sigma(x) = \frac{\sigma(S \setminus A(r))}{\sigma(S)} \geqslant 1 - \sqrt{q(r)} \to 1$$

при $r \to 0$, т. е. a — точка плотности множества W_ε. Отсюда вытекает, что a — точка плотности множества $V_\varepsilon \forall\ \varepsilon > 0$, т. е. она является точкой плотности и для пересечения $K \cap V_\varepsilon \forall > 0$. Следовательно,

$$\mu[K \cap V_\varepsilon \cap B(a, r)] \leqslant (1 - p(r))\, \mu[B(a, r)],$$

где $p(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$p[(1+\varepsilon)r](1+\varepsilon)^n < \varepsilon^n \qquad \forall r < \delta.$$

Пусть $\zeta \in D$ и $r = \|\zeta - a\| < \delta$. Так как шар $B(\zeta, r\varepsilon)$ содержится в шаре $B(a, r+r\varepsilon)$ и имеет меру $r^n\varepsilon^n n^{-1}\sigma(S)$, а мера множества $K \cap V_\varepsilon \cap B(a, r+r\varepsilon)$ отличается от меры шара $B(a, r+r\varepsilon)$ на величину, не превышающую $p[(1+\varepsilon)r](1+\varepsilon)^n r^n n^{-1}\sigma(S)$, то в шаре $B(\zeta, r\varepsilon)$ найдется точка ζ', принадлежащая множеству $K \cap V_\varepsilon$. Тогда $\|\zeta' - \zeta\| < r\varepsilon$, и согласно (1)

$$\|f(\zeta) - f(\zeta')\| \leqslant M\varepsilon \|\zeta - a\|,$$

а так как $\zeta' \in V_\varepsilon$, то

$$\|f(\zeta') - f(a) - f'(a)(\zeta' - a)\| < \varepsilon\|\zeta' - a\| < \varepsilon(1+\varepsilon)\|\zeta - a\|.$$

Отсюда

$$\|f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a)\| = \|f(\zeta) - f(\zeta') + f(\zeta') - f(a) -$$
$$- f'(a)(\zeta' - a) + f'(a)(\zeta' - \zeta)\| \leqslant M\varepsilon\|\zeta - a\| +$$
$$+ \varepsilon(1+\varepsilon)\|\zeta - a\| + M\varepsilon\|\zeta - a\| = \varepsilon(2M + 1 + \varepsilon)\|\zeta - a\|.$$

Тем самым утверждение 1, а вместе с ним и теорема 2, доказаны.

Доказательство теоремы 1. Пусть z_0 — произвольная точка области D, F — $\mathbb{C}$-линейное подпространство в H размерности n (где n удовлетворяет условию A)) и $D' = (z_0 + F) \cap D$ — открытое подмножество комплексно n-мерного пространства $z_0 + F \simeq \mathbb{C}^n$. Так как $f|_{D'}$ локально удовлетворяет условию Липшица в D', то по теореме 2 $\mathbb{R}$-производная $(f|_{D'})'(z)$ существует во всех точках $z \in D' \setminus S'$, где S' имеет нулевую $2n$-меру Лебега. По условию множество $D' \cap S$ также имеет нулевую $2n$-меру Лебега. Из условий А), Б), В) и лемм 2 — 4 [2] вытекает, что в каждой точке $a \in D' \setminus (S \cup S')$ отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо вдоль F. Следовательно, для любого $\mathbb{C}$-линейного функционала $l: H \to \mathbb{C}$ функция $f_l = l \circ (f|_{D'}) : D' \to \mathbb{C}$ локально липшицева в D' и почти всюду в D' $\mathbb{C}$-дифференцируема. По лемме 11 [7] и теореме Хартогса [8, с. 41] функция f_l голоморфна в D'. Так как это верно для любого функционала l, то отображение $f|_{D'}$ голоморфно [4, с. 96], а поскольку это справедливо для любой точки $z_0 \in D$ и любого n-мерного подпространства $F \subset H$, то f голоморфно в D [9, с. 31]. Теорема 1 доказана.

1. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* О производных операторах и условиях голоморфности отображений гильбертовых пространств // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 10.— С. 1322—1328.
2. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* Об операторных условиях $\mathbb{C}$-дифференцируемости // Там же.— № 11.— С. 1448—1454.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.— М. : Наука, 1978.— 760 с.
4. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 444 с.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— Харьков : Вища шк., 1977.— 316 с.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование (меры, интегрирование мер).— М. : Наука, 1967.— 396 с.
7. *Бондарь А. В.* Многомерный вариант одной теоремы Бора // Десятая математическая школа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 382—395.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2-х ч.— М. : Наука, 1985.— Ч. II.— 336 с.
9. *Бурбаки Н.* Дифференциальные и аналитические многообразия (сводка результатов).— М. : Мир, 1975.— 220 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.02.90

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$p[(1+\varepsilon)r](1+\varepsilon)^n < \varepsilon^n \qquad \forall r < \delta.$$

Пусть $\zeta \in D$ и $r = \|\zeta - a\| < \delta$. Так как шар $B(\zeta, r\varepsilon)$ содержится в шаре $B(a, r + r\varepsilon)$ и имеет меру $r^n\varepsilon^n n^{-1}\sigma(S)$, а мера множества $K \cap V_\varepsilon \cap B(a, r+r\varepsilon)$ отличается от меры шара $B(a, r + r\varepsilon)$ на величину, не превышающую $p[(1+\varepsilon)r](1+\varepsilon)^n r^n n^{-1}\sigma(S)$, то в шаре $B(\zeta, r\varepsilon)$ найдется точка ζ', принадлежащая множеству $K \cap V_\varepsilon$. Тогда $\|\zeta' - \zeta\| < r\varepsilon$, и согласно (1)

$$\|f(\zeta) - f(\zeta')\| \leqslant M\varepsilon\|\zeta - a\|,$$

а так как $\zeta' \in V_\varepsilon$, то

$$\|f(\zeta') - f(a) - f'(a)(\zeta' - a)\| < \varepsilon\|\zeta' - a\| < \varepsilon(1+\varepsilon)\|\zeta - a\|.$$

Отсюда

$$\|f(\zeta) - f(a) - f'(a)(\zeta - a)\| = \|f(\zeta) - f(\zeta') + f(\zeta') - f(a) -$$
$$- f'(a)(\zeta' - a) + f'(a)(\zeta' - \zeta)\| \leqslant M\varepsilon\|\zeta - a\| +$$
$$+ \varepsilon(1+\varepsilon)\|\zeta - a\| + M\varepsilon\|\zeta - a\| = \varepsilon(2M + 1 + \varepsilon)\|\zeta - a\|.$$

Тем самым утверждение 1, а вместе с ним и теорема 2, доказаны.

Доказательство теоремы 1. Пусть z_0 — произвольная точка области D, F — $\mathbb{C}$-линейное подпространство в H размерности n (где n удовлетворяет условию А)) и $D' = (z_0 + F) \cap D$ — открытое подмножество комплексно n-мерного пространства $z_0 + F \simeq \mathbb{C}^n$. Так как $f|_{D'}$ локально удовлетворяет условию Липшица в D', то по теореме 2 $\mathbb{R}$-производная $(f|_{D'})'(z)$ существует во всех точках $z \in D' \setminus S'$, где S' имеет нулевую $2n$-меру Лебега. По условию множество $D' \cap S$ также имеет нулевую $2n$-меру Лебега. Из условий А), Б), В) и лемм 2 — 4 [2] вытекает, что в каждой точке $a \in D' \setminus (S \cup S')$ отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо вдоль F. Следовательно, для любого $\mathbb{C}$-линейного функционала $l: H \to \mathbb{C}$ функция $f_l = l \circ (f|_{D'}): D' \to \mathbb{C}$ локально липшицева в D' и почти всюду в D' $\mathbb{C}$-дифференцируема. По лемме 11 [7] и теореме Хартогса [8, с. 41] функция f_l голоморфна в D'. Так как это верно для любого функционала l, то отображение $f|_{D'}$ голоморфно [4, с. 96], а поскольку это справедливо для любой точки $z_0 \in D$ и любого n-мерного подпространства $F \subset H$, то f голоморфно в D [9, с. 31]. Теорема 1 доказана.

1. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* О производных операторах и условиях голоморфности отображений гильбертовых пространств // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 10.— С. 1322—1328.
2. *Бондарь А. В., Романенко В. Ю.* Об операторных условиях $\mathbb{C}$-дифференцируемости // Там же.— № 11.— С. 1448—1454.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры.— М. : Наука, 1978.— 760 с.
4. *Рудин У.* Функциональный анализ.— М. : Мир, 1975.— 444 с.
5. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.— Харьков : Вища шк., 1977.— 316 с.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование (меры, интегрирование мер).— М. : Наука, 1967.— 396 с.
7. *Бондарь А. В.* Многомерный вариант одной теоремы Бора // Десятая математическая школа.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1974.— С. 382—395.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2-х ч.— М. : Наука, 1985.— Ч. II.— 336 с.
9. *Бурбаки Н.* Дифференциальные и аналитические многообразия (сводка результатов).— М. : Мир, 1975.— 220 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.02.90